МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

DOI:10.26104/NNTIK.2023.79.81.001

Аблабеков Б.С., Байсеркеева А.Б., Кендирбаева А.Ж.

ТЕСКЕРИ УБАКЫТТАГЫ ЖЫЛУУЛУК ӨТКӨРГҮЧТҮН ТЕҢДЕМЕСИ ҮЧҮН КВАЗИНВЕРСИЯ ЫКМАСЫ

Аблабеков Б.С., Байсеркеева А.Б., Кендирбаева А.Ж.

МЕТОД КВАЗИОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОБРАТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

B. Ablabekov, A. Baiserkeeva, A. Kendirbaeva

QUASI-INVERSION METHOD FOR THE THERMAL CONDUCTIVITY EQUATION WITH TIME REVERSE

УДК: 517.95

Математикалык маселелердин ичинен баштапкы маалыматтардагы кичине өзгөрүүлөргө карата чечимдери туруксуз болгон маселелердин классы бар. Алар баштапкы маалыматтардагы өзүм билемдик менен майда өзгөрүүлөр чечимдердин чоң өзгөрүшүнө алып келиши мүмкүн экендиги менен мүнөздөлөт. Бул проблема туура эмес түзүлгөндүгү белгилүү. Бул иште кээ бир прикладдык маселелерди изилдөөдө пайда болгон жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемеси үчүн тескери Коши маселеси формулировкаланган жана чечилген. Биз дененин ичиндеги белгилүү бир жерде өлчөнгөн температуранын тарыхына негизделген денедеги беттик температураны билгибиз келет. Бул чечим (эгерде ал бар болсо) маалыматтарга үзгүлтүксүз көз каранды эмес деген мааниде начар коюлган маселе. Ошондуктан жылуулук өткөрүмдүүлүктүн начар коюлган маселеси ар кандай регуляризациялоо ыкмаларын колдонуу менен чечилет. Алардын бири Лион ыкмасы болуп саналат, ал квазиинверсия ыкмасы деп аталат. Квазиинверсия ыкмасы баштапкы теңдемени бузуудан турат. Башкача айтканда, изилденип жаткан маселе классикалык жактан туура болгон нормалдаштырылган маселелердин үй-бүлөсү менен алмаштырылат жана анын чечилиши белгилүү бир шарттарда баштапкы маселенин чечилишине жакындайт.

Негизги сөздөр: *жылуулук теңдемеси, ретроспективдүү маселе, тескери маселе, регуляризацияланган чыгарылыш.*

Среди математических задач выделяется класс задач, решения которых неустойчивы к малым изменениям исходных данных. Они характеризуются тем, что сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к большим изменениям решений. Хорошо известно, что данная задача некорректно поставлена. В данной работе поставлена и решена обратная задача Коши для уравнения теплопроводности, которое возникает при исследовании некоторых прикладных задачах. Мы хотим знать температуру поверхности в теле на основе истории измеренной температуры в фиксированном месте внутри тела. Это некорректная задача в том смысле, что решение (если оно существует) не зависит непрерывно от данных. Поэтому решают некорректную задачу теплопроводности с помощью различных методов регуляризации. Одним из них является метод Лионса, который называется методом квазиобращения. Метод квазиобращения состоит в возмущении исходного уравнения. Другими словами исследуемая задача заменяется семейством регуляризованных задач, которое является классически корректным, и его решение при определенных условиях сходится к решению исходной задачи.

Ключевые слова: *уравнение теплопроводности, ретроспективная задача, обратная задача, регуляризованное решение.*

Among mathematical problems, there is a class of problems whose solutions are unstable to small changes in the initial data. They are characterized by the fact that arbitrarily small changes in the initial data can lead to large changes in solutions. It is well known that this problem is formulated incorrectly. In this work, the inverse Cauchy problem is formulated and solved for the heat conduction equation, which arises in the study of some applied problems. We want to know the surface temperature in a body based on the history of measured temperature at a fixed location inside the body. This is an ill-posed problem in the sense that the solution (if it exists) does not depend continuously on the data. Therefore, the ill-posed problem of thermal conductivity is solved using various regularization methods. One of them is the Lyons method, which is called the quasi-inversion method. The quasi-inversion method consists of perturbing the original equation. In other words, the problem under study is replaced by a family of regularized problems, which is classically correct, and its solution, under certain conditions, converges to the solution of the original problem.

Key words: *heat equation, retrospective problem, inverse problem, regularized solution.*

Введение. Краевая задача для уравнения теплопроводности с обратным временем (ретроспективная обратная задача) для уравнения теплопроводности является классическим примером некорректно поставленных задач математической физики. Это задача построения решения обратного уравнения теплопроводности удовлетворяющие однородным граничным данным, т. е. найти $u(x,t)$, $(x,t) \in \Omega$ такое, что

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega, \\ u(x,T) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{0.1}$$

где $\Omega = \{(x,t) | x \in (0,\pi), t \in (0,T)\}$, $T > 0 - const$, $\varphi(x)$, $f(x,t) -$ заданные функция.

Известно, что эта задача некорректна, некорректность задачи обусловлена неустойчивостью решения относительно малых возмущений начального условия. Из существующих методов решения обратной задачи теплопроводности отметим метод квазиобращения [1], который, однако, связан с повышением порядка уравнения, что приводит к значительным трудностям при его численной реализации. Метод квазиобращения впервые был применен для решения уравнения теплопроводности с обратным течением времени французским ученым Р. Лионсом [1], далее он был развит в работах [2-11].

Отметим, что В.К. Ивановым было построено регуляризванное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем в бесконечной полосе заменив уравнение регуляризованным уравнением, т.е. рассматривал задачу [2]:

$$\begin{cases} \vartheta_t - \vartheta_{xx} - \alpha\vartheta_{xxxx} = 0, x \in \mathbb{R}, \ t \in (0,T), \\ \vartheta(x,T) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{0.2}$$

Аналогично, в прямоугольнике , вместо задачи (0.1 расматривалось начально-краевая задача для уравнения четвертого порядка [1,7]:

$$\begin{cases} \vartheta_t - \vartheta_{xx} - \alpha\,\vartheta_{xxxx} = 0, \quad x \in (0,\pi), t \in (0,T) \\ \vartheta(0,t) = \vartheta(\pi,t) = 0, \vartheta_{xx}(0,t) = \vartheta_{xx}(\pi,t) = 0, 0 \le t \le T, \\ \vartheta(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases} \tag{0.3}$$

В работе для устойчивого решения некорректной задачи теплопроводности развивается метод квазиобращения, основанный на переходе к задаче для возмущенного уравнения, для которого задача корректна. Параметр возмущения выступает в качестве параметра регуляризации. В работах [3-6] качестве вариантов метода квазиобращения предложен вариант, основанный на решении псевдопараболического уравнения и установлены сходимость приближенного решение к точному решению, когда параметр регуляризации стремится к нулю.

В работах [7-10] введено класс корректности с переходом к «близкой» задаче с начальными нелокальными условиями, а именно с заменой начального условия $u(x,T) = \varphi(x)$ на условие $u(x,T) + \alpha u(x,0) = \varphi(x)$, где $\alpha > 0 -$ достаточно малое число, выступающие в роли параметра регуляризации.

1. Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с обратным временем

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \\ u(x,T) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{1.1}$$

Определение 1. Функция $u(x,t) \in C([0,T]; H_0^1(0,\pi))$ называется обобщенным решением в Ω начально-краевой задачи (1.1), если она удовлетворяет тождеству

$$\frac{d}{dt} < u(x,t), \eta(x) > - < u(x,t), \eta^{''}(x) > = < f(x,t), \eta(x) >, \tag{1.2}$$

и $< u(x,T), \eta(x) > = < \varphi(x), \eta(x) >$ для любой функции $\eta(x) \in H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)$. Здесь $< \cdot, \cdot > -$ скалярное произведение в $L_2(0,\pi)$.

Для задачи (1.1) справедлива следующая

Теорема 1.1. Пусть выполнены условия: $\varphi(x) \in H_0^1(0,\pi)$, $f(x,t) \in C([0,T]; L_2(0,\pi))$. Тогда обобщенное решение $u(x,t) \in C([0,T]; H_0^1(0,\pi)) \cap C^1([0,T]; L_2(0,\pi))$ задачи (1.1) существует, единственно и имеет вид

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_k e^{k^2(T-t)}-\int_t^T e^{-k^2(t-\tau)}f_k(\tau)d\tau\right]\sin kx. \qquad (1.3)$$

Доказательство. Предположим, что решение $u=u(x,t)$ задачи (1.1) существует. Обозначая $\frac{2}{\pi}<u(x,t),\sin kx>=u_k(t),$ имеем

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin kx. \qquad (1.4)$$

Тогда из задачи (1.1) имеем

$$\begin{cases}u_k^{'}(t)+k^2u_k(t)=f_k(t),\\ u_k(T)=\varphi_k,\end{cases} \qquad (1.5)$$

где $\varphi_k=\frac{2}{\pi}<\varphi(x), sinkx>$, $f_k(t)=\frac{2}{\pi}<f(x,t),\sin kx>\cdot$

Система (1.6) представляет собой задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Общий интеграл уравнение в (1.6) имеет вид

$$u_k(t)=e^{-k^2t}\left[C_k+\int_0^t e^{k^2\tau}f_k(\tau)d\tau\right],\quad C_k=const.$$

Используя начальное условие в (1.5) находим

$$u_k(t)=\varphi_k e^{k^2(T-t)}-\int_t^T e^{-k^2(t-\tau)}f_k(\tau)d\tau,\quad k=1,2,3,... \quad . \qquad (1.6)$$

Подставляя (1.7) в (1.5), получим формулы (1.3).

Таким образом, если задача (1.1) имеет обобщенное решение, то она представляется рядом (1.7). А из формулы следует единственность обобщенного решение задачи (1.1). Теорема 1.1 доказана.

Теорема 1.2. Пусть $f(x,t)\in C([0,T];H_0^1(0,\pi))$, $\varphi(x)\in C^1[0,\pi],$ $\varphi^{''}(x)\in L_2(0,\pi)$ и выполнены условия согласования $f(0,t)=f(\pi,t)=0$, $\varphi(0)=\varphi(\pi)=0,$ $\varphi^{''}(0)=\varphi^{''}(\pi)=0$. Тогда формула (1.7) дает классическое решение задачи (1.1).

Заметим, что функция $u(x,t)$ является точным гладким решением задачи (1.2), если функции $f(x,t),\varphi(x)$ является гладким.

Применяя метод Фурье для решения задачи (1.1), получим формулу для вычисления $u(x,0)=\psi(x)$ при заданной $\varphi(x)$ и $f(x,t)$.

$$u(x,0)=\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_k e^{k^2T}-\int_0^T e^{-k^2(t-\tau)}f_k(\tau)d\tau\right]\sin kx. \qquad (1.7)$$

Обратная задача, состоящая в определении $\varphi(x)$ по заданной функции $\psi(x)$, представляет собой задачу нахождения решения из условий:

$$\begin{cases}u_t(x,t)-u_{xx}(x,t)=f(x,t),\quad (x,t)\in\Omega,\\ u(x,T)=\psi(x),\quad 0\le x\le\pi,\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad 0\le t\le T,\end{cases} \qquad (1.8)$$

Теорема 1.3. Задача (1.1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_k e^{k^2T}-\int_0^T e^{k^2\tau}f_k(\tau)d\tau\right]<\infty. \qquad (1.8)$$

Доказательство. Предположим, что задача (1.1) имеет единственное решение $u(x,t) \in C([0,T]; H_0^1(0,\pi)) \cap C^1([0,T]; L_2(0,\pi))$, которое представимо в виде (1.8).

Отсюда, имеем

$$u_k(0) = \varphi_k e^{k^2 T} - \int_0^T e^{k^2\tau} f_k(\tau)d\tau.$$

Тогда $\|u(x,0)\|_{L_2(0,\pi)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_k e^{k^2 T} - \int_0^T e^{k^2\tau} f_k(\tau)d\tau\right]^2 < \infty.$

Пусть теперь выполнено условие (1.9).

Тогда функция $\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_k e^{k^2 T} - \int_0^T e^{k^2(T-\tau)} f_k(\tau)d\tau\right]\sin kx \in L_2(0,\pi).$ (1.9)

Рассмотрим теперь задачу (1.8). Эта задача имеет единственное решение, которое выражается формулой

$$u(x,t) = \left(\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t} < \psi(x), \sin kx > + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} < f(x,\tau), \sin kx > d\tau\right)\sin kx. \quad (1.10)$$

Положив $t = T$ в (1.10), находим

$$u(x,T) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{-k^2 T}\left(\varphi_k e^{k^2 T} - \int_0^T e^{k^2\tau} f_k(\tau)d\tau\right) + \int_0^T e^{-k^2(T-\tau)} f_k(\tau)\right)\sin kx = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k \sin kx = \varphi(x).$$

Следовательно, функция $u(x,t)$ является единственным решением задачи (1.1). Теорема 1.3 доказана.

Приведем пример, где показывается, что задача Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем является неустойчивой относительно малых изменений начальных данных.

Действительно, пусть $f(x,t) = 0$ и $\varphi(x) = e^{-\sqrt{k}}\sin kx$. Вычислим коэффициент φ_k:

$$\varphi_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin kx dx = \frac{2e^{-\sqrt{k}}}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 kx dx = e^{-\sqrt{k}}.$$

Тогда решение задачи (1.1) имеет вид

$$u(x,t) = e^{k^2(T-t)-\sqrt{k}}\sin kx. \quad (1.12)$$

В пространстве $L_2(0,\pi)$ имеем

$\|u(x,T)\|_{L_2}^2 = \int_0^{\pi} e^{-k}\sin^2 kx dx = e^{-k} \to 0$ при $k \to \infty$,

т.е. начальное условие сколь угодно малое. Точное

$$\|u(x,t)\|_{L_2}^2 = e^{2k^2(T-t)-k}\int_0^{\pi}\sin^2 kx dx = \frac{\pi}{2}e^{2k^2(T-t)-k} \to \infty \text{ при } k \to \infty. \quad (1.13)$$

При $k \to \infty$ функция $e^{-\sqrt{k}}\sin kx$, представляющая собой данные задачи (1.1) стремится к нулю с производными всех порядков. Тем не менее, решение задачи, как видно из формулы (1.13), при любом фиксированном $0 < t < T$ является неограниченной. Следовательно, какую бы норму мы ни выбрали для оценки начальных данных, мы не сможем утверждать, что из малости этой нормы вытекает малость решения.

2. Корректность регуляризованной задачи и оценка погрешности. В этом разделе мы изучаем регуляризованную задачу и покажем ее корректность. Метод квазиобращения основан на переходе от задачи (1.1), определяющей оператор B_α^{-1}, к задаче для уравнения более высокого порядка, содержащего малый параметр.

Как и в работах [2,3], рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{cases} u_{\alpha t} - u_{\alpha xx} - \alpha u_{\alpha xxt} = f(x,t), \quad (x,t) \in (0,\pi)\times(0,T), \\ u_\alpha(x,T) = \psi(x), \quad 0 \le x \le \pi, \\ u_\alpha(0,t) = u_\alpha(\pi,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации. Задачу (2.1) будем называть регуляризованной задачей.

Теорема 2.1. Если функции $\varphi(x) \in H_0^1(0,\pi)$, $f(x,t) \in C([0,T];L_2(0,\pi))$, то обобщенное решение задачи (2.1) существует, единственно и дается формулой

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\psi_k \exp\left(\frac{k^2}{1+\alpha k^2}(T-t)\right) - \frac{1}{1+\alpha k^2}\int_t^T f_k(\tau)\exp\left(\frac{k^2}{1+\alpha k^2}(\tau - t)\right)d\tau\right]\sin kx, \tag{2.2}$$

где

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi_k \sin kx,\ \psi_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \psi(x)\sin kx dx,$$

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin kx,\ f_k(t) = \frac{2}{\pi} < f(x,t), \sin kx > .$$

Доказательство. Как и в доказательство предположим, что решение $u_\alpha = u_\alpha(x,t)$ задачи (2.1) существует. Решение задачи (2.1) будем искать в виде

$$u_\alpha(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{\alpha k}(t)\sin kx. \tag{2.3}$$

где

$$u_{\alpha k}(t) = \frac{2}{\pi} < u_\alpha(x,t), \sin kx >.$$

Тогда из задачи (2.1) имеем

$$\begin{cases} u'_{\alpha k}(t) + \dfrac{k^2}{1+\alpha k^2}u_{\alpha k}(t) = \dfrac{1}{1+\alpha k^2} f_k(t), \\ u_{\alpha k}(T) = \psi_k. \end{cases} \tag{2.4}$$

Решением задачи (2.4) является

$$u_{\alpha k}(t) = \varphi_k e^{\frac{k^2}{1+\alpha k^2}(T-t)} - \frac{1}{1+\alpha k^2}\int_t^T e^{\frac{k^2}{1+\alpha k^2}(t-\tau)} f_k(\tau)d\tau, \quad k = 1,2,3,... \quad . \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (2.3) получим формулу (2.2). Теорема 2.2 доказано. Остановимся на вопрос устойчивости. Для простоты положим $f(x,t) = 0$

Теорема 2.2. Пусть для функции выполнены условия теоремы 1. Тогда для решения задачи (2.1) справедлива оценка

$$\|u_\alpha(x,t)\|_{L_2} \le \exp\left(\frac{2}{\alpha}(T-t)\right)\|\varphi(x)\|_{L_2}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Из того, что

$$\frac{k^2}{1+\alpha k^2} \le \frac{1}{\alpha} \tag{2.7}$$

и из (2.2) следует

$$\left\|u_\alpha(x,t)\right\|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_k\right|^2 \exp\left(\frac{2k^2}{1+\alpha k^2}(T-t)\right) \le \exp(\frac{2}{\alpha}(T-t))\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_k\right|^2 = \exp(\frac{2}{\alpha}(T-t))\left\|\varphi\right\|^2.$$

Таким образом, оценка (2.6), обеспечивающая устойчивость по начальным данным решения задачи (2.1) доказана. Следовательно, задача (2.ё) поставлено корректно в смысле Адамара при $\alpha > 0$.

3. Регуляризация и оценка погрешности. В этом разделе мы регуляризуем задачу (1.1) возмущая уравнение. Исследуем оценка погрешности между регуляризованным и точным решением. Предположим, что функции $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ заданы ее приближением в среднеквадратической метрике, т.е. вместо $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ нам известны $f_\delta(x,t)$ и $\varphi_\delta(x)$ такая, что

$$\left\|f_\delta(x,t)-f(x,t)\right\|_{L_2(0,\pi;L_2(0,T))} \le \delta,\ \left\|\varphi_\delta(x)-\varphi(x)\right\|_{L_2(0,\pi)} \le \delta. \tag{3.1}$$

Как и в работах [1,2,5], покажем, что семейство операторов B_α, переводящих функции $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ в решение задачи (2.1), определяемое формулой (2.2), регуляризирующим семейством по отношению к задаче (1.1).

Обозначим через $\varphi_\alpha(x) = u_\alpha(x,T)$. Покажем, что при определенных предположениях функцию $\varphi_\alpha(x)$ можно рассматривать в качестве приближенного решения задачи с обратным временем. Эта задача представляет собой задачу решения уравнения

$$B_\alpha \varphi_\alpha = \psi\ . \tag{3.2}$$

Будем считать, что оператор B_α действует из $L_2[0,\pi]$ в $L_2[0,\pi]$.

Рассмотрим задачу решения уравнения (3.2) в случае приближенно заданной правой части $\psi(x)$.

Предположим, что для функции $\overline{\psi}(x) \in L_2[0,\pi]$ существует решение уравнения (3.2) $\overline{\varphi}(x) \in L_2[0,\pi]$. Однако $\overline{\psi}(x)$ неизвестна, а вместо нее заданы функция $\psi_\delta(x) \in L_2[0,\pi]$ и величина погрешности δ, такие, что

$$\left\|\psi_\delta(x)-\overline{\psi}(x)\right\|_{L_2[0,\pi]} \le \delta. \tag{3.3}$$

В этом случае в использовать качестве приближенного решения задачи функцию $\varphi_\delta(x) = B_\alpha^{-1}\psi_\delta(x)$ невозможно, поскольку B_α^{-1}, во-первых, определен не для всех $\psi_\delta(x) \in L_2[0,\pi]$, а во-вторых, не является непрерывным.

Рассмотрим семейство линейных операторов R_α, определяемых формулой (3.2), а именно $R_\alpha\psi(x) = u_\alpha(x,T)$. Из формулы (3.2) следует, что

$$R_\alpha\psi = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \psi(\xi)\sin(k\xi)\,d\xi\,\exp\left\{\frac{2k^2}{1+\alpha k^2}T\right\}\sin(kx). \tag{3.4}$$

Для любого $\alpha > 0$ оператор R_α определен на всем пространстве $L_2[0,\pi]$ и непрерывен, если его рассматривать действующим из $L_2[0,\pi]$ в $L_2[0,\pi]$.

Покажем, что функцию можно рассматривать в качестве приближеннного решения уравнения (.2).

Теорема 3.1. Пусть функция $\alpha(\delta)$ такова, что $\alpha(\delta) > 0$ при $\delta > 0$, $\alpha(\delta) \to 0$ и $\exp\left\{\frac{T}{\alpha(\delta)}\right\}\delta \to 0$ при $\delta \to 0$. Тогда

$$\left\|\varphi_{\alpha(\delta)}(x)-\overline{\varphi}(x)\right\|_{L_2[0,\pi]} \to 0 \text{ при } \delta \to 0, \text{ где } \varphi_{\alpha(\delta)}(x) = R_{\alpha(\delta)}\psi_\delta.$$

Доказательство. Рассмотрим элемент $R_\alpha\psi_\delta(x)$, где $\alpha > 0$, оценим $\left\|R_\alpha\psi_\delta - \overline{\varphi}\right\|_{L_2[0,\pi]}$. Из неравенства треугольника следует, что

$$\left\|R_\alpha\psi_\delta - \overline{\varphi}\right\|_{L_2[0,\pi]} \le \left\|R_\alpha\psi_\delta - R_\alpha\overline{\psi}\right\|_{L_2[0,\pi]} + \left\|R_\alpha\overline{\psi} - \overline{\varphi}\right\|_{L_2[0,\pi]}. \tag{3.5}$$

Оценим первое слагаемое в правой части этого неравенства. Учитывая линейность оператора и неравенства (3.4), получим, что

$$\|R_\alpha\psi_\delta - R_\alpha\overline{\psi}\|_{L2[0,\pi]} \le \|R_\alpha\|\cdot\|\psi_\delta - \overline{\psi}\|_{L2[0,\pi]} \le \|R_\alpha\|\delta, \qquad (3.6)$$

где $\|R_\alpha\|$ - норма оператора R_α, рассматриваемого действующим из $L_2[0,\pi]$ в $L_2[0,\pi]$.

Оценим $\|R_\alpha\|$. Так как система функций $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin(nx),\quad n=1,2,...,$ является полной ортонормированной системой в $L_2[0,\pi]$, то, используя равенство Парсеваля и формулу (3.4), получим, что для любой функции $\psi(x)\in L_2[0,\pi]$

$$\|R_\alpha\psi\|^2_{L2[0,\pi]} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi \psi(\xi)\sin(k\xi)d\xi\right)^2 \exp\left\{\frac{2k^2}{1+\alpha k^2}T\right\}.$$

Так как для любого натурального $\boldsymbol{n}$ справедливо неравенство $\dfrac{k^2}{1+\alpha k^2}\le\dfrac{1}{\alpha}$, то

$$\|R_\alpha\psi\|^2_{L2[0,\pi]} \le \exp\left\{\frac{T}{\alpha}\right\}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi \psi(\xi)\sin(k\xi)d\xi\right)^2.$$

Из равенства Парсеваля следует, что ряд, стоящий в правой части этого неравенства, равен $\|\psi\|^2_{L2[0,\pi]}$. Следовательно,

$$\|R_\alpha\psi\|^2_{L2[0,\pi]} \le \exp\left\{\frac{T}{\alpha}\right\}\|\psi\|^2_{L2[0,\pi]},$$

а значит,

$$\|R_\alpha\| \le \exp\left\{\frac{T}{\alpha}\right\}.$$

Учитывая неравенства (2.3.19), получим, что

$$\|R_\alpha\psi_\delta - R_\alpha\overline{\psi}\|_{L_2[0,\pi]} \le \exp\left\{\frac{T}{4\alpha}\right\}\cdot\delta. \qquad (3.7)$$

Оценим второе слагаемое в правой части неравенства (3.5). Так как

$\overline{\psi} = K\,\overline{\varphi}$, то $\overline{\psi}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \overline{\varphi}(\xi)\sin(k\xi)d\xi \exp\{-k^2T\}\sin(kx).$

Следовательно, для всех $k=1,2,...,$

$$\int_0^\pi \overline{\psi}(\xi)\sin(k\xi)d\xi = \int_0^\pi \overline{\varphi}(\xi)\sin(k\xi)d\xi\cdot\exp\{-k^2T\}.$$

Используя эти формулы, получим, что

$$R_\alpha\overline{\psi}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \overline{\varphi}(\xi)\sin(k\xi)d\xi \exp\left\{-\frac{2k^2}{1+\alpha k^2}T\right\}\sin(kx),$$

$$R_\alpha\overline{\psi}(x) - \overline{\psi}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \overline{\psi}(\xi)\sin(k\xi)d\xi\left[\exp\left\{-\frac{\alpha k^2}{1+\alpha k^2}T\right\}-1\right]\sin(kx).$$

Учитывая это представление и равенство Парсеваля, получим

$$\|R_\alpha\overline{\psi}(x) - \overline{\varphi}(x)\|^2_{L2[0,\pi]} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi \overline{\varphi}(\xi)\sin(k\xi)d\xi\right)^2\left[1-\exp\left\{-\frac{\alpha k^2}{1+\alpha k^2}T\right\}\right]^2.$$

Покажем, что функция $p(\alpha)=\left\|R_\alpha\overline{\psi}(x)-\overline{\varphi}(x)\right\|^2_{L_2[0,\pi]}\to 0$ при $\alpha\to 0$.

Действительно, так как ряд

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi\overline{\varphi}(\xi)\sin(k\xi)d\xi\right)^2=\left\|\overline{\varphi}\right\|^2_{L_2[0,\pi]}$ сходится, то для любого $\varepsilon>0$ существует $N>0$, такое, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi\overline{\varphi}(\xi)\sin(k\xi)d\xi\right)^2\left[1-\exp\left\{-\frac{\alpha k^2}{1+\alpha k^2}T\right\}\right]^2\le\frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $\alpha>0$. С другой стороны, так как при $\alpha\to 0$, существует такое $\alpha(\varepsilon)$, что при $0<\alpha<\alpha(\varepsilon)$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi\overline{\varphi}(\xi)\sin(k\xi)d\xi\right)^2\left[1-\exp\left\{-\frac{\alpha k^2}{1+\alpha k^2}T\right\}\right]^2\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $p(\alpha)\to 0$ при $\alpha\to 0$.

Из неравенства (2.3.18), (2.3.20) имеем

$$\left\|R_\alpha\psi_\delta-\overline{\varphi}\right\|_{L_2[0,\pi]}\le\exp\left\{\frac{T}{\alpha}\right\}\cdot\delta+\sqrt{p(\alpha)}.$$

Таким образом, если функция $\alpha(\delta)$ удовлетворяет условиям теоремы, то $\exp\left\{\frac{T}{4\alpha(\delta)}\right\}\cdot\delta\to 0$ и $\sqrt{p(\alpha(\delta))}\to 0$ при $\delta\to 0$, а значит, и $\left\|R_\alpha\psi_\delta-\overline{\varphi}\right\|_{L_2[0,\pi]}\to 0$ при $\delta\to 0$, что и доказывает теорему 3.1.

Заключение. Эта работа посвящена к решению краевой задачи для уравнения теплопроводности с обратным временем. Изучали некорректную задачу Коши с обратным временем для уравнения теплопроводности. При исследовании поставленной задачи мы применили методы Фурье, псевдопараболической регуляризации, квази-обращения.

Литература:

1. Латтес Р., Лионс Ж.Л. Метод квазиобращения и его приложения. - М.: Мир, 1970. - 336 с.
2. Иванов В.К. Задача квазиобращения для уравнения теплопроводности в равномерной метрике // Дифференц. уравнения, 1972, Т.8. - №4. - 652-658 с.
3. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. - Бишкек. - Илим. - 2001. - 181 с.
4. Аблабеков Б.С. Байсеркеева А.Б. Задача Коши с обратным временем для двумерного уравнения теплопроводности // Изв. КГТУ им. И. Раззакова. 2017. – №4 (44). - С. 324-329.
5. Colton D. The Approximation of solutions to the Backwards Heat Equation in a Nonhomogeneous Medium // J. Math. Anal. And appl. 72 (1979). - 418-429.
6. Showalter R.E. F1nal value problem for evolut1on equat1ons// J. Math. Anal. Appl. - 1974. - V.47. - P. 563-572.
7. Вабищевич П.Н. Нелокальные параболические задачи и обратная задача теплопроводности //Дифференц. уравнения, 1981. Т.17. - №7. - 1193-1199 р.
8. Clark G.W., Oppenheimer S.F. Quasireversibility methods for non-well posed problems, Elect. J. Diff. Eqns., 1994, 8 (1994). - 1-9 p.
9. D.D. Trong, P.H. Quan, T.V. Khanh, N.H. Tuan, A nonlinear case of the 1-D backward heat problem: Regularization and error estimate, Z. Anal. Anwend. 26 (2). - (2007). - 231-245 p.
10. Trong D.D., Tuan N.H. Regularization and error estimates for nonhomogeneous backward heat problems, Electron. J. Di_. Eqns., 2006, 4(2006). - 1-10 p.