DOI:10.26104/NNTIK.2023.17.19.002

Каракеев Т.Т., Эсенаманова Г.К.

ЭКИ КӨЗ КАРАНДЫСЫЗ ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ ҮЧҮНЧҮ ТҮРДӨГҮ ВОЛЬТЕРРАНЫН СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИН РЕГУЛЯРДОО

Каракеев Т.Т., Эсенаманова Г.К.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

T. Karakeev, G. Esenamanova

REGULARIZATION OF LINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS THE THIRD KIND WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES

УДК: 517.968.22

Макалада эки көз карандысыз өзгөрүлмөлүү үчүнчү түрдөгү Вольтерранын сызыктуу интегралдык теңдемелерин үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинде регулярдоо маселеси изилденет. Интегралга кирбеген, изделүүчү функцияга көбөйтүлгөн белгилүү функция монотондуу болуп, кемибөөчү же өспөөчү болот. Берилген интегралдык оператордун жардамы менен интегралдык теңдеме эквиваленттүү өзгөртүлөт жана бул учурда анын тиби сакталат. Коэффициенттик функция менен ядронун байланышы такталып, анын негизинде регулярдоо оператору түзүлөт. Лаврентьевдик типтеги метод негизделген, регулярдалган чыгарылыштын так чыгарылышка бир калыпта жыйналуусу жана теңдеменин чыгарылышынын үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинде жалгыздыгы далилденген.

***Негизги сөздөр**: регулярдоо, Вольтерранын теңдемелери, бир калыпта жыйналуу, кичи параметр.*

В работе исследованы вопросы регуляризации линейных двумерных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в пространстве непрерывных функций. Известная функция при искомой функции вне интеграла является монотонной функцией – неубывающей или невозрастающей по первому аргументу при всех значений второго аргумента. С помощью некоторого интегрального оператора проводится эквивалентное преобразование изучаемого интегрального уравнения, которое не меняет тип уравнения. Приводится условие, связывающее коэффициентную функцию и ядра на диагонали, которое допускает построение регуляризирующего оператора. Доказана сходимость метода регуляризации лаврентьевского типа по равномерной метрике, получены оценка разности регуляризованного решения и точного решения интегрального уравнения и условия единственности решения интегрального уравнения с двумя независимыми переменными в пространстве непрерывных функций.

***Ключевые слова**: регуляризация, уравнение Вольтерра, равномерная сходимость, малый параметр.*

The paper examines the issues of regularization of linear two-dimensional Volterra integral equations of the third kind in the space of continuous functions. A known function for the desired function outside the integral is a monotonic function - non-decreasing or non-increasing in the first argument for all values of the second argument. Using some integral operator, an equivalent transformation of the integral equation being studied is carried out, which does not change the type of the equation. A condition is given that connects the coefficient function and the kernels on the diagonal, which allows the construction of a regularizing operator. The convergence of the Laurentian type regularization method with respect to a uniform metric is proved, an estimate is obtained for the difference between the regularized solution and the exact solution of the integral equation, and conditions for the uniqueness of the solution of the integral equation with two independent variables in the space of continuous functions are obtained.

***Key words**: regularization, Volterra equation, uniform convergence, small parameter.*

В работах [1-3,10] исследованы вопросы регуляризируемости интегральных уравнений Вольтерра третьего рода. В [1, 4, 6, 7, 11] одним из существенных условий для построения регуляризированных уравнений, которые обладают свойством вольтерровости и относятся к методам лаврентьевского типа [8, с. 49] является свойство монотонности известной функции $p(x)$ при искомой функции вне интеграла. Целью данного исследования является изучение возможности распространение метода регуляризации лаврентьевского типа на случай интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с двумя независимыми переменными и оператором умножения на непрерывную функцию $p(x,y)$, которая является неубывающей либо невозрастающей по x функцией при всех y из заданного отрезка.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра третьего рода

$$p(x,y)u(x,y)+\int\limits_0^x K(x,y,s)u(s,y)ds+\int\limits_0^x\int\limits_0^y Q_0(x,y,s,\tau)u(s,\tau)d\tau ds=g(x,y), \qquad (1)$$

где известные функции $p(x,y),\ K(x,y,s),\ Q_0(x,y,s,\tau),\ g(x,y)$ подчиняются условиям:

а) $g(x,y),p(x,y)\in C(D), D=[0,b]\times[0,c]$;

б) $K(x,y,s)\in C(D_0),\ K(x,y,x)\geq 0, D_0=\{(x,y,s)/0\leq s\leq x\leq b, 0\leq y\leq c\}$;

в) $G(x,y) \geq d_1 > 0, G(x,y) = C_0 p(x,y) + K(x,y,x), 0 < d_1, C_0 = const;$

г) $Q_0(x,y,s,\tau) \in C(D_1), \quad D_1 = \{(x,y,s,\tau) / \ 0 \leq s \leq x \leq b, \ \ 0 \leq \tau \leq y \leq c\}, Q_0(x,y,x,\tau) = 0.$

Пусть I- тождественный оператор, J- оператор Волтерра: $Jv = \int_0^x v(s,y)ds$. Действуя оператором $I + C_0 J$ на уравнение (1) получим уравнение вида

$$p(x,y)u(x,y) + \int_0^x G(s,y)u(s,y)ds = \int_0^x L(x,y,s)u(s,y)ds + \int_0^x \int_0^y Q(x,y,s,\tau)\, u(s,\tau)d\tau ds + f(x,y), \qquad (2)$$

где

$$L(x,y,s) = K(s,y,s) - K(x,y,s) - C_0 \int_s^x K(\nu,y,s)d\nu, \ Q(x,y,s,\tau) = -Q_0(x,y,s,\tau) -$$
$$- C_0 \int_s^x Q_0(\nu,y,s,\tau)d\nu\,, f(x,y) = g(x,y) + C_0 \int_0^x g(s,y)ds.$$

Рассмотрим уравнение с малым параметром ε из интервала (0,1)

$$\big(\varepsilon + p(x,y)\big)u_\varepsilon(x,y) + \int_0^x G(s,y)\, u_\varepsilon(s,y)ds = \int_0^x L(x,y,s)\, u_\varepsilon(s,y)ds +$$
$$+ \int_0^x \int_0^y Q(x,y,s,\tau)u_\varepsilon(s,\tau)d\tau ds + \varepsilon u(0,y) + f(x,y). \qquad (3)$$

Воспользуемся резольвентой

$$-\frac{1}{\varepsilon + p(x,y)} exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon + p(\nu,y)}\right) G(s,y)$$

ядра $\Big(-G(s,y)/\big(\varepsilon + p(x,y)\big)\Big)$ и, уравнение (3) приведем к следующему эквивалентному виду

$$u_\varepsilon(x,y) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x,y)} \int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon + p(\nu,y)}\right) \frac{G(s,y)}{\varepsilon + p(s,y)} \left\{ \int_0^s L(s,y,\nu) \times \right.$$
$$u_\varepsilon(\nu,y)d\nu - \int_0^x L(x,y,\nu)u_\varepsilon(\nu,y)d\nu + \int_0^s \int_0^y Q(s,y,\nu,\tau)u_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau d\nu -$$
$$\left. - \int_0^x \int_0^y Q(x,y,\nu,\tau)\, u_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau d\nu + f(s,y) - f(x,y) \right\} ds +$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon + p(x,y)} exp\left(-\int_0^x \frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon + p(\nu,y)}\right) \left\{ \int_0^x L(x,y,s)\, u_\varepsilon(s,y)ds + \right.$$
$$\left. + \int_0^x \int_0^y Q(x,y,s,\tau)\, u_\varepsilon(s,\tau)d\tau ds + f(x,y) \right\}. \qquad (4)$$

В теории интегральных уравнений важное значение имеет известное неравенство Гронуолла-Бельмана. Докажем двумерный аналог неравенства из [9, с. 59].

Лемма 1. Пусть для всех $0 \leq s \leq x \leq b, \ \ 0 \leq \tau \leq y \leq c$ функция $v(x,y)$ неотрицательна и удовлетворяет неравенству

$$v(x,y) \leq c_1 + c_2 \int_0^x v(s,y)ds + c_3 \int_0^x \int_0^y v(s,\tau)d\tau ds,$$

где c_1, c_2, c_3 – постоянные, $c_1 > 0, c_2 \geq 0, c_3 \geq 0.$

Тогда

$$v(x,y) \leq c_1 \exp\big(x(c_2 + c_3 y)\big).$$

Доказательство. Введем обозначение

$$w(x,y) = c_1 + c_2 \int_0^x v(s,y)ds + c_3 \int_0^x \int_0^y v(s,\tau)d\tau ds.$$

Отсюда путем дифференцирования получим

$$w_x(x,y) = c_2 v(x,y) + c_3 \int_0^y v(x,\tau)d\tau.$$

В силу неотрицательности функции $v(x,y)$ для $\tau \le y$ $w(x,\tau) \le w(x,y)$. Используя это неравенство и условие леммы 1 из соотношения

$$\frac{w_x(x,y)}{w(x,y)} = c_2 \frac{v(x,y)}{w(x,y)} + c_3 \int_0^y \frac{v(x,\tau)}{w(x,y)} d\tau$$

имеем

$$\frac{w_x(x,y)}{w(x,y)} \le c_2 + c_3 y.$$

Учитывая, что $w(0,y) = c_1$, интегрируем последнее неравенство в пределах от 0 до x. Тогда

$$w(x,y) \le c_1 \exp\big(x(c_2 + c_3 y)\big).$$

Так как по условию $v(x,y) \le w(x,y)$, то получим требуемое неравенство.

Пусть

д) $g(0,y) = p(0,y) = 0$, $p(x,y) > 0$, $\forall x \in (0,b], \forall y \in [0,c]$, $p(x,y)$ – неубывающая по x функция в области D;

ж) $M_2 = C_0 L_K + L_{K1}$, $L_K = Lip(K(x,y,s)|x)$, $L_{K1} = Lip(K_x(x,y,s)|x)$,
$M_3 = C_0 L_{Q0} + L_{Q1}, L_{Q0} = Lip(Q_0(x,y,v,\tau)|x), L_{Q1} = Lip(Q_{0x}(x,y,v,\tau)|x)$.

Для оператора $(H_\varepsilon u)(x,y)$, заданного в виде

$$(H_\varepsilon u)(x,y) \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p(x,y)} exp\left(-\int_0^x \frac{G(v,y)}{\varepsilon + p(v,y)} dv\right)[u(0,y) - u(x,y)] -$$

$$-\frac{\varepsilon}{\varepsilon + p(x,y)} \int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(v,y)}{\varepsilon + p(v,y)} dv\right) \frac{G(s,y)}{\varepsilon + p(s,y)} [u(s,y) - u(x,y)]ds, \qquad (5)$$

имеет место [1]

Лемма 2. При выполнении условий *а) - д)* для $u(x,y) \in C(D)$ имеет место оценка

$$\|(H_\varepsilon u)(x,y)\|_{C(D)} \le 4(d_1 e)^{-1} \varepsilon^{1-\beta} \|u(x,y)\|_{C(D)} + \omega_u(\varepsilon^\beta),$$

где $\|\cdot\|_{C(D)} = \max_D |\cdot|$, $\omega_u(\varepsilon^\beta) = \sup_{\substack{|x-s| \le \varepsilon^\beta \\ y \in [0,c]}} |u(x,y) - u(s,y)|$, $\quad 0 < \beta < 1$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия *а*) – *ж*), и уравнение (1) имеет решение $u(x,y) \in C(D)$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ решение уравнения (3) равномерно сходится к решению уравнения (2). При этом имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon(x,y) - u(x,y)\|_{C(D)} \le M_1 \left(4(d_1 e)^{-1} \varepsilon^{1-\beta} \|u(x,y)\|_{C(D)} + \omega_u(\varepsilon^\beta)\right),$$

$$M_1 = \exp\big(bM_0(1+c)\big), M_0 = (M_2 + M_3) d_1^{-1} (2 + e^{-1}).$$

Доказательство. Положим $\eta_\varepsilon(x,y) = u_\varepsilon(x,y) - u(x,y)$, где $u(x,y)$ – решение уравнения (1). Тогда из (5) получим следующее уравнение

$$\eta_\varepsilon(x,y) = -\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)}d\nu\right)\frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}\left\{\int_0^s L(s,y,\nu)\times\right.$$
$$\times\,\eta_\varepsilon(\nu,y)d\nu - \int_0^x L(x,y,\nu)\eta_\varepsilon(\nu,y)d\nu + \int_0^s\int_0^y Q(s,y,\nu,\tau)\eta_\varepsilon(\nu,\tau)\,d\tau d\nu -$$
$$\left.-\int_0^x\int_0^y Q(x,y,\nu,\tau)\,\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau d\nu + \varepsilon\big(u(s,y)-u(x,y)\big)\right\}ds +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}exp\left(-\int_0^x \frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon+p(\nu,y)}\right)\left\{\int_0^x L(x,y,s)\,\eta_\varepsilon(s,y)ds +\right.$$
$$\left.+\int_0^x\int_0^y Q(x,y,s,\tau)\eta_\varepsilon(s,\tau)d\tau ds + \varepsilon[u(0,y)-u(x,y)]\right\}. \qquad (6)$$

Так как $p(x,y)$ неубывающая по x в области D, то при $\nu \le x$

$$\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)} \le \frac{1}{\varepsilon+p(\nu,y)},\,(x,y)\in D\,.$$

Тогда используя условие $G(x,y)\ge d_1,(x,y)\in D$, для функции

$$L_\varepsilon(x,y) = \frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)}d\nu\right)\frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}(x-s)ds$$

получим

$$|L_\varepsilon(x,y)| \le d_1^{-1}\int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)}d\nu\right)\frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}\int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)}d\nu\, ds$$
$$= \left|\rho = W_\varepsilon(x,y,s) = \int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)}d\nu\right| = d_1^{-1}\int_0^{W_\varepsilon(x,y,0)} e^{-\rho}\rho d\rho <$$
$$d_1^{-1}\int_0^\infty e^{-\rho}\rho d\rho = d_1^{-1}.$$

Так как

$$|L(x,y,\nu)-\;L(s,y,\nu)| \le M_2(x-s), |Q(x,y,\nu,\tau)-\;Q(s,y,\nu,\tau)| \le M_3(x-s),$$

то

$$\left|-\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)}d\nu\right)\frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}\left\{\int_0^s L(s,y,\nu)\times\right.\right.$$
$$\times\,\eta_\varepsilon(\nu,y)d\nu - \int_0^x L(x,y,\nu)\eta_\varepsilon(\nu,y)d\nu + \int_0^s\int_0^y Q(s,y,\nu,\tau)\eta_\varepsilon(\nu,\tau)\,d\tau d\nu -$$
$$\left.\left.-\int_0^x\int_0^y Q(x,y,\nu,\tau)\,\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau d\nu\right\}ds\right| \le 2(M_2+M_3)|L_\varepsilon(x,y)|\left\{\int_0^x|\eta_\varepsilon(\nu,y)|\,d\nu\right.$$
$$\left.+\int_0^x\int_0^y|\eta_\varepsilon(\nu,\tau)|\,d\tau d\nu\right\};$$

$$\left|\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}exp\left(-\int_0^x\frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon+p(\nu,y)}\right)\left\{\int_0^x L(x,y,s)\,\eta_\varepsilon(s,y)ds+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^x\int_0^y Q(x,y,s,\tau)\eta_\varepsilon(s,\tau)d\tau ds\right\}\right|\le(M_2+M_3)\frac{d_1^{-1}}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x G(\nu,y)d\nu\times$$

$$\times\,exp\left(-\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x G(\nu,y)d\nu\right)\left\{\int_0^x|\eta_\varepsilon(\nu,y)|\,d\nu\;+\int_0^x\int_0^y|\eta_\varepsilon(\nu,\tau)|\,d\tau d\nu\right\}\le$$

$$\le(M_2+M_3)d_1^{-1}e^{-1}\left\{\int_0^x|\eta_\varepsilon(\nu,y)|\,d\nu\;+\int_{0,}^x\int_0^y|\eta_\varepsilon(\nu,\tau)|\,d\tau d\nu\right\},$$

$$\sup_{\rho\ge0}[\rho e^{-\rho}]\le e^{-1},\qquad \rho=\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x G(\nu,y)d\nu.$$

В силу полученных оценок из (6) имеем

$$|\eta_\varepsilon(x,y)|\le M_0\left\{\int_0^x|\eta_\varepsilon(\nu,y)|\,d\nu\;+\int_0^x\int_0^y|\eta_\varepsilon(\nu,\tau)|\,d\tau d\nu\right\}+\|(H_\varepsilon u)(x,y)\|_{C(D)},$$

где $M_0=(M_2+M_3)d_1^{-1}(2+e^{-1})$.

Отсюда, используя Лемму 1 получим оценку

$$|\eta_\varepsilon(x,y)|\le\exp\big(xM_0(1+y)\big)\|(H_\varepsilon u)(x,y)\|_{C(D)}.$$

Следовательно, переходя к норме в $C(D)$ и используя оценку Леммы 2, при $\varepsilon\to0$, получим, что регуляризованное решение $u_\varepsilon(x,y)\to u(x,y)$ равномерно. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 1 решение уравнения (1) единственно в $\mathrm{C}(D)$.

Предположим, что

е) $p(b,y)=0,\ p(x,y)>0,\ \forall x\in[0,b),\forall y\in[0,c],\ p(x,y)$ – невозрастающая по *x* функция в области D.

Лемма 3. При выполнении условий *а)-г), е)* для функций $u(x,\tau)\in C(D)$, имеет место оценка

$$\|\varepsilon(H_\varepsilon v)(x,y)\|_C\le d_2(\varepsilon\mathrm{p}^{-1}(0)+(d_1\theta_2 e)^{-1}\varepsilon^{1-\beta})\|u(x,y)\|_{C(D_0)}+d_3\omega_v(\varepsilon^\beta),$$

где

$$d_2=4+2M_0\ d_3=1+\theta_2^{-1},\theta_2=1-\theta_1,0<\theta_1<1,$$

$$\omega_u\big(\varepsilon^\beta\big)=\sup_{|x-t|\le\varepsilon^\beta}|u(x,y)-u(t,y)|,\quad 1/2\le\beta<1.$$

Доказательство. В силу условий *а)-г), е)* найдутся такие положительные C_0 и $\theta_1<1$, что $\theta_1 G(x,y)+p_s'(x,y)\ge0$. Тогда учитывая свойство *а)* для функции $p(x)$: $p(x,y)\le p(t,y),\ 0\le t\le x\le b,\ y\in[0,c]$ имеем

$$\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x\frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}ds\right)dt=$$

$$=\int_0^x exp\left(-\int_t^x\frac{G(s,y)+p_s'(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}ds\right)\frac{1}{\varepsilon+p(t,y)}dt\le$$

$$\le\int_0^x exp\left(-\int_t^x\frac{\theta_2 G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}ds\right)\frac{1}{\varepsilon+p(t,y)}dt.\qquad(5)$$

Используя тождество

$$exp(-\int_t^x \frac{p'_s(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)}) = \frac{\varepsilon+p(t,y)}{\varepsilon+p(x,y)}, \forall x \in [0, b-\varepsilon^\beta], y \in [0,c],$$

для всех $x \in [0, b-\varepsilon^\beta], \frac{1}{2} \le \beta < 1$ имеем

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x,y)} exp(-\int_0^x \frac{G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)}) |u(x,y)-u(0,y)| \le 2\frac{\varepsilon}{p(0,y)} \|u(x,y)\|_{C(D)}.$$

Пусть $0 \le x \le \varepsilon^\beta,\ 1/2 \le \beta < 1,\ 0 \le \tau \le T$. Тогда

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x,y)} \int_0^x exp(-\int_t^x \frac{G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)}) \frac{G(t,y)}{\varepsilon+p(t,y)} |u(x,y)-u(t,y)|dt \le \omega_u(\varepsilon^\beta).$$

Если $\varepsilon^\beta \le x \le b-\varepsilon^\beta$, то используя условия *а*)-*в*) и (5) получим

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x,y)} \int_0^x exp(-\int_t^x \frac{G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)}) \frac{G(t,y)}{\varepsilon+p(t,y)} |u(x,y)-u(t,y)|dt \le$$

$$\le \varepsilon \int_0^x exp(-\int_t^x \frac{\theta_2 G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)}) \frac{G(t,y)}{[\varepsilon+p(t,y)]^2} |u(x,y)-u(t,y)|dt \le$$

$$\le \varepsilon \int_0^{x-\varepsilon^\beta} exp(-\int_t^x \frac{\theta_2 G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)}) \frac{G(t,y)}{[\varepsilon+p(t,y)]^2} |u(x,y)-u(t,y)|dt +$$

$$+\varepsilon \int_{x-\varepsilon^\beta}^x G(t,y)\, exp(-\int_t^x \frac{\theta_2 G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)}) \frac{1}{[\varepsilon+p(t,y)]^2} |u(x,y)-u(t,y)|dt \le$$

$$\le 2\|u(x,y)\|_{C(D)} \frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x-\varepsilon^\beta,y)} \int_0^{x-\varepsilon^\beta} exp(-\int_t^x \frac{\theta_2 G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)}) \times$$

$$\times \frac{G(t,y)}{\varepsilon+p(t,y)} + \theta_2^{-1}\omega_v(\varepsilon^\beta) \le\le (2\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x-\varepsilon^\beta,y)} \times$$

$$\times exp(-\int_{x-\varepsilon^\beta}^x \frac{\theta_2 G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)}) \|u(x,y)\|_{C(D)} + \omega_v(\varepsilon^\beta))\theta_2^{-1} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x-\varepsilon^\beta,y)} exp(-\frac{\theta_2 d_1 \varepsilon^\beta}{\varepsilon+p(x-\varepsilon^\beta,y)}) + \omega_v(\varepsilon^\beta)) \times$$

$$\times \theta_2^{-1}(2\|u(x,y)\|_{C(\mathrm{D})} \le 2\|u(x,y)\|_{C(D)}(d_1\theta_2^2 e)^{-1}\varepsilon^{1-\beta} + \theta_2^{-1}\omega_v(\varepsilon^\beta).$$

Если $b-\varepsilon^\beta \le x \le b,\ 1/2 \le \beta < 1,\ 0 \le y \le c$, то в силу условия *а*)-*в*) и свойство функции $p(x)$ получим

$$|\varepsilon \frac{u(x,y)-u(0,y)}{\varepsilon+p(x,y)} exp(-\int_0^x \frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)} ds)| \le \|u(x,y)\|_{C(\mathrm{D})} \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+p(x,y)}$$

$$exp(-\int_0^{b-\varepsilon^\beta} \frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)} ds) \le 2\frac{\varepsilon+p(b-\varepsilon^\beta,y)}{p(0,y)} \|u(x,y)\|_{C(D)} \times$$

$$\le exp(-\int_0^{b-\varepsilon^\beta} \frac{G(s,y)+p_s(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)} ds)\|u(x,y)\|_{C(D)} \le 2\frac{1+M_1}{p(0,y)}\varepsilon\|u(x,y)\|_{C(D)},$$

где $M_1 = \|p(x,y)\|_{C(D)}$;

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x,y)} \int_0^x exp(-\int_t^x \frac{G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)}) \frac{G(t,y)}{\varepsilon+p(t,y)} |u(x,y)-u(t,y)|dt =$$

$$= \int_0^{x-\varepsilon^\beta} exp(-\int_t^x \frac{G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)}) \frac{G(t,y)}{\varepsilon+p(t,y)} |u(x,y)-u(t,y)| dt +$$

$$+ \int_{x-\varepsilon^\beta}^{x} exp\,(-\int_t^x \frac{G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)}) \frac{G(t,y)}{\varepsilon+p(t,y)} |u(x,y)-u(t,y)| dt\} \times$$

$$\times \frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x,y)} \le \frac{\varepsilon\left(\varepsilon+p\left(x-\varepsilon^\beta,y\right)\right)}{\varepsilon+p(x,y)} 2\|u(x,y)\|_{C(D)} \times$$

$$\times \int_0^{x-\varepsilon^\beta} exp(-\int_t^x \frac{\theta_1 G(s,y)+p_s(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)} ds)\, exp(-\theta_2 \int_t^x \frac{G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)}) \times$$

$$\times \frac{G(t,y)}{[\varepsilon+p(t,y)]^2} dt + \omega_v\left(\varepsilon^\beta\right) \le \theta_2^{-1} \frac{\varepsilon+p\left(b-\varepsilon^\beta,y\right)}{\varepsilon+p\left(x-\varepsilon^\beta,y\right)} \times$$

$$\times exp(-\theta_2 \int_{x-\varepsilon^\beta}^{x} \frac{G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)})\, 2\|u(x,y)\|_{C(D)} + \omega_v\left(\varepsilon^\beta\right) \le$$

$$\le 2\|u(x,y)\|_{C(D)} \theta_2^{-1} \frac{\varepsilon+M_1\varepsilon^{2\beta}}{\varepsilon+p(x-\varepsilon^\beta,y)} exp(-\theta_2 \frac{d_1\varepsilon^\beta}{\varepsilon+p(x-\varepsilon^\beta,y)}) +$$

$$+\omega_v(\varepsilon^\beta) \le 2\|u(x,y)\|_{C(\mathrm{D})} (\theta_2^2 d_1 e)^{-1} (1+M_0) \times \varepsilon^{1-\beta} + \omega_v(\varepsilon^\beta).$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия *а) -г), ж-е)* и уравнение (1) имеет решение $u(x,\tau) \in C(D)$. Тогда решение уравнения (3) равномерно сходится к решению уравнения (1) при $\varepsilon \to 0$ и имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon(x,y)-u(x,y)\|_{C(D)} \le C_2\left(d_2\left(\mathrm{p}^{-1}(0,y)\varepsilon+(d_1\theta_2 e)^{-1}\varepsilon^{1-\beta}\right)\|u(x,y)\|_{C(D_0)} + d_3\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)\right),$$

где $d_2, d_3, \omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)$ - определяются также как в лемме 1, $0 < C_2 = const.$

Следствие 2. При выполнении условий теоремы 2 решение уравнения (1) единственно в $C(D)$.

Литература:

1. Асанов А. Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода/ А.Асанов, Г.Ободоева // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1994. – Вып. 25. – С. 65-74.
2. Бухгейм А.Л. Уравнение Вольтерра и обратные задачи / А.Л.Бухгейм. Новосибирск: Наука, 1983. – С. 207.
3. Булатов М.В. Регуляризация вырожденных систем интегральных уравнений Вольтерра / М.В. Булатов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2002. – Т. 42, № 3. – С. 330-335.
4. Глушак А.В. Численное решение линейной обратной задачи для уравнения Эйлера-Дарбу/ А.В.Глушак, Т.Т.Каракеев // ЖВМиМФ. – 2006. – Т. 46. - № 5. – С. 848-857.
5. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. М.: Наука, 1967. – С. 472.
6. Каракеев Т.Т. Регуляризация нелокальной граничной задачи для псевдопараболических уравнений / Т.Т. Каракеев //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. -Бишкек: Илим, 2003. – Вып.32. – С. 179-183.
7. Омуров Т.Д. Регуляризация и численные методы решения обратных и нелокальных краевых задач. / Т.Д. Омуров, Т.Т. Каракеев. Бишкек: Илим, 2006. – С. 164.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1986. – С. 287.
9. Филатов А.Н. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний / А.Н. Филатов, Л.В. Шарова. – М., 1976. - С. 67.
10. Янно Я. Регуляризация одного уравнения Вольтерра I рода равносильного уравнению III рода / Я.Янно //Учен. зап. Тартуск. гос. ун-та, 1987. – Вып.762. – С. 16-30.
11. Karakeev T.T. Regularization of Systems of Volterra Linear Integral Equations of the Third Kind / T.T.Karakeev // Lobachevskii J. of Mathematics, 2020, 41 (9), P. 1816-1821.