МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

DOI:10.26104/NNTIK.2023.74.61.001

Каракеев Т.Т., Мустафаева Н.Т.

ЖЫЛМАКАЙ БЕРИЛИШТҮҮ БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ ВОЛЬТЕРРАНЫН ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИН РЕГУЛЯРДОО

Каракеев Т.Т., Мустафаева Н.Т.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА С ГЛАДКИМИ ДАННЫМИ

T. Karakeev, N. Mustafayeva

REGULARIZATION OF LINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH SMOOTH DATA

УДК: 517.968.22

Макалада сызыктуу жылмакай берилиштеги биринчи түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемесинин чыгарылышы жашайт жана үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинде жатат деген шартта бул теңдемени регулярдоо маселеси каралат. Теңдеменин ядросу үзгүлтүксүз туундуга ээ болгон функция жана диагоналда кесиндинин ички чекитинде нолго айланат. Вольтерранын биринчи түрдөгү интегралдык теңдемеси берилген дифференциалдык оператордун таасири менен чыгаруу маанисинде эквиваленттүү болгон Вольтерранын үчүнчү түрдөгү интегралдык теңдемесине келтирилет. Интегралдоо кесиндисин экиге бөлүү менен камтылган областар методу колдонулуп, киргизилген талапта камтылган областардагы чыгарылыштардын үзгүлтүксүз улануусу камсыздалат. Теңдеменин вольтеррдик касиетин сактаган Лавретьев тибиндеги регулярдоочу оператор түзүлүп, регулярдалган теңдеменин чыгарылышынын так чыгарылышка бир калыпта жыйналуусу далилденген жана Гельдер мейкиндигинде теңдеменин чыгарылышынын жалгыздыгын камсыздаган шарттар алынган.
Негизги сөздөр: *интегралдык теңдеме, регулярдоо, кичи параметр, бир калыпта жыйналуу.*

В работе изучаются вопросы регуляризации решения линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода, решение которого существует и принадлежит пространству непрерывных функций. Ядро уравнения является дифференцируемой функцией и на диагонали вырождается во внутренней точке отрезка интегрирования. Интегральное уравнение Вольтерра первого рода, действием некоторого дифференциального оператора, сводится к эквивалентному, в смысле разрешимости, интегральному уравнению Вольтерра третьего рода. Применяется метод подобластей, разбивая отрезок интегрирования на две части. В рамках наложенных требований выполняется условие согласования решений в точке стыка частичных отрезков. Построен регуляризирующий оператор лаврентьевского типа, сохраняющий свойство вольтерровости уравнения. Доказана равномерная сходимость регуляризованного решения к точному решению, установлены условия единственности решения в пространстве Гельдера.
Ключевые слова: *интегральное уравнение, регуляризация, малый параметр, равномерная сходимость.*

The paper studies the issues of regularization of the solution of linear Volterra integral equations of the first kind, the solution of which exists and belongs to the space of continuous functions. The kernel of the equation is a differentiable function and degenerates on the diagonal at the inner point of the integration segment. The Volterra integral equation of the first kind, by the action of a certain differential operator, is reduced to an equivalent, in the sense of solvability, Volterra integral equation of the third kind. The subdomain method is used, dividing the integration segment into two parts. Within the framework of the imposed requirements, the condition for coordination of solutions at the junction of partial segments is satisfied. A regularizing operator of Laurentian type is constructed that preserves the Volterra property of the equation. The uniform convergence of the regularized solution to the exact solution is proved, and conditions for the uniqueness of the solution in Hölder space are established.
Key words*: integral equation, regularization, small parameter, uniform convergence.*

Теория интегральных уравнений Вольтерра первого рода, к настоящему времени достаточно полно развита в случаях, когда ядро $K(x,t)$ на диагонали не обращается в ноль ни в одной точке заданного отрезка или ядра на диагонали тождественный ноль вместе со своими производными по x до порядка $n-1$ включительно, а производная порядка n на диагонали не обращается в ноль ни в одной точке заданного отрезка [1-4]. Сложности возникают, когда ядро на диагонали обращается в ноль в точках заданного отрезка. При таких условиях одним из эффективных методов исследования являются методы регуляризации [5-8, 12].

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^x K(x,t)u(t)dt = g(x), \tag{1}$$

где заданные функции $g(x)$ и $K(x,t)$ удовлетворяют условиям:

а) $K(x,t) \in C^{1,0}(D)$, $D = \{(x,t)/\ 0 \le t \le x \le b\}, k(x) = K(x,x)$,

$g(x), k(x) \in C^1\,[0,b]$, $g^{(i)}(0) = k^{(i)}(b_1) = 0, 0 < k(x)\ \forall x \in [0,b_1) \cup (b_1 b]$, $i = 0{,}1, b_1 \in (0,b)$;

б) $k(x) -$ невозрастающая функция при $x \in [0,b_1]$;

в) $k(x)$ $-$неубывающая функция при $x \in [b_1,b]$.

Действуя оператором $C_1 I + D$, где I – тождественный оператор, $0 < C_1 = const$, $D = d/dx$ дифференциальный оператор из уравнения (1) получим интегральное уравнение Вольтерра третьего рода

$$k(x)u(x) + \int_0^x L(x,t)u(t)dt = f(x), \tag{2}$$

где $L(x,t) = C_1 K(x,t) + K_x(x,t), f(x) = C_1 g(x) + g'(x)$.

При $x \in [0,b_1]$, из (2) получим уравнение

$$k(x)v(x) + \int_0^x L(x,t)v(t)dt = f(x), x \in [0,b_1]. \tag{3}$$

Перепишем уравнение (3) в виде

$$k(x)v(x) + \int_0^x L(t,t)v(t)dt = \int_0^x [L(t,t) - L(x,t)]v(t)dt + f(x), \tag{4}$$

и рассмотрим уравнение с малым параметром ε из интервала (0,1)

$$\big(\varepsilon + k(x)\big)v_\varepsilon(x) + \int_0^x L(t,t)\,v_\varepsilon(t)dt = \int_0^x [L(t,t) - L(x,t)]\,v_\varepsilon(t)dt\ + \varepsilon v(0) + f(x), \qquad x \in [0,b_1]. \tag{5}$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия *а), б)*, $L(x,x) \ge d_1 > 0$ и уравнение (1) имеет решение $u(x) \in C^\gamma[0,b], 0 < \gamma \le 1$. Тогда, при $\varepsilon \to 0$, решение уравнения (5) равномерно сходится к решению уравнения (3), причем, имеет место оценка

$$\|v_\varepsilon(x) - v(x)\|_{C[0,b_1]} \le \exp\,(b_1 M_2 M_1)\ (d_2\varepsilon + d_3\varepsilon^\gamma)\|u\|_{\gamma *},$$

$M_2 = 2\theta_1^{-2} d_1^{-1} + b_1 k^{-1}(0)$, $0 < \theta_1 < 1$, $M_1 = (L_1 + C_1 L_2)$, $\|\cdot\|_{C[0,b_1]} = \max\limits_{[0,b_1]}|\cdot|$, $L_1 = \max\limits_{D}|K_x(x,t)|$, $0 < L_2 -$ коэффициент Липшица функции $K_x(x,t)$ по аргументу x, $\|u\|_{\gamma *} = \sup\limits_{\substack{(x,s)\in[0,b]\\ x\ne s}} \{|v(x) - v(s)|/|x-s|^\gamma\}$,

$$d_4 = \max_{[0,b_1]}|k'(x)|, d_2 = (1+d_4)b^\gamma/k(0), d_3 = (2+d_4)\gamma_0^{-(1+\gamma)} d_1^{-\gamma},\ \gamma_0 = min(\,\theta_1, 1-\gamma).$$

Доказательство. С помощью подстановки

$$\eta_\varepsilon(x) = v_\varepsilon(x) - v(x) \tag{6}$$

из (5) и (4) получим

$$\big(\varepsilon + k(x)\big)\eta_\varepsilon(x) + \int_0^x L(t,t)\,\eta_\varepsilon(t)dt = \int_0^x [L(t,t) - L(x,t)]\,\eta_\varepsilon(t)dt\ + \varepsilon[v(0) - v(x)], x \in [0,b_1].$$

Данное уравнение, используя резольвенту

$$R(x,t;\varepsilon) = -\frac{L(t,t)}{\varepsilon + k(x)} exp\left(-\int_t^x \frac{L(s,s)}{\varepsilon + k(s)} ds\right)$$

ядра $\left(-\frac{L(t,t)}{\varepsilon + k(x)}\right)$, преобразуем к следующему виду

$$\eta_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon + k(x)} \int_0^x \frac{exp[W_\varepsilon(x,t)]L(t,t)}{\varepsilon + k(t)} \left\{\int_0^t [L(s,s) - L(t,s)]\eta_\varepsilon(s)ds + \varepsilon[v(0) - v(t)]\right\} dt + \frac{1}{\varepsilon + k(x)} \times$$

$$\times\left\{\int_0^x [L(t,t)-L(x,t)]\,\eta_\varepsilon(t)dt+\varepsilon[v(0)-v(x)]\right\}, x\in[0,b_1],$$

где $W_\varepsilon(x,t)=\int_t^x \frac{L(s,s)}{\varepsilon+k(s)}ds$. Вносим здесь эквивалентное изменение. Тогда

$$\eta_\varepsilon(x)=-\frac{1}{\varepsilon+k(x)}\int_0^x exp[-W_\varepsilon(x,t)]\frac{L(t,t)}{\varepsilon+k(t)}\left\{\int_0^t [L(x,s)-L(t,s)]\eta_\varepsilon(s)ds\right.$$
$$\left.+\int_t^x [L(x,s)-L(s,s)]\eta_\varepsilon(s)ds+\varepsilon[v(t)-v(x)]\right\}dt+\frac{exp[-W_\varepsilon(x,0)]}{\varepsilon+k(x)}\times$$
$$\times\left\{\int_0^x [L(t,t)-L(x,t)]\,\eta_\varepsilon(t)dt-\varepsilon[v(x)-v(0)]\right\}, x\in[0,b_1]. \quad (7)$$

Воспользуемся обозначением

$$G_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon+k(x)}\int_0^x exp[-W_\varepsilon(x,t)]\frac{L(t,t)}{\varepsilon+k(t)}(x-t)dt, x\in[0,b_1].$$

Так как $k(x)$ невозрастающая, то при $s\le x$

$$\frac{1}{\varepsilon+k(s)}\le\frac{1}{\varepsilon+k(x)}$$

и из условий *а*),*б*) следует [9, с.22]

$$L(x,x)\theta_2+k'(x)\ge 0, \theta_1+\theta_2=1, 0<\theta_1<1 \quad (8)$$

Тогда используя данные неравенства, условие $L(x,x)\ge d_1>0$ и формулу

$$\frac{\varepsilon+k(t)}{\varepsilon+k(x)}exp[-W_\varepsilon(x,t)]=exp\left[-\int_t^x \frac{L(s,s)+k'(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right] \quad (9)$$

получим

$$|G_\varepsilon(x)|\le d_1^{-1}\int_0^x exp[-W_\varepsilon(x,t)]\frac{L(t,t)}{\varepsilon+k(t)}\frac{\varepsilon+k(t)}{\varepsilon+k(x)}\int_t^x\frac{L(s,s)ds}{\varepsilon+k(s)}dt=$$
$$=d_1^{-1}\int_0^x exp[-\theta_1 W_\varepsilon(x,t)]\frac{L(t,t)}{\varepsilon+k(t)}\int_t^x\frac{L(s,s)ds}{\varepsilon+k(s)}dt\le d_1^{-1}\theta_1^{-2}.$$

На основе данной оценки, учитывая, что $|L(x,s)-L(t,\mathrm{s})|\le M_1(x-t), t\le x$ имеем

$$\left|-\frac{1}{\varepsilon+k(x)}\int_0^x\frac{exp[-W_\varepsilon(x,t)]L(t,t)}{\varepsilon+k(t)}\left\{\int_0^t [L(x,s)-L(t,s)]\eta_\varepsilon(s)ds+\int_t^x [L(x,s)-L(s,s)]\eta_\varepsilon(s)ds\right|\right.$$
$$\le 2M_1|G_\varepsilon(x)|\int_0^x|\eta_\varepsilon(t)|dt\le 2d_1^{-1}\theta_1^{-2}M_1\int_0^x|\eta_\varepsilon(t)|dt.$$

Для второго слагаемого из (7), используем неравенство (8) и формулу (9). Тогда

$$\left|\frac{exp[-W_\varepsilon(x,0)]}{\varepsilon+k(x)}\int_0^x [L(t,t)-L(x,t)]\,\eta_\varepsilon(t)dt\right|\le M_1\frac{b_1}{\varepsilon+k(0)}\times exp\left(-\int_0^x\frac{L(s,s)+k'(s)}{\varepsilon+k(s)}ds\right)\int_0^x|\eta_\varepsilon(t)|dt$$
$$\le b_1k^{-1}(0)M_1\int_0^x|\eta_\varepsilon(t)|dt.$$

В силу данных оценок из (7) получим

$$|\eta_\varepsilon(x)| \le M_2M_1\int_0^x |\eta_\varepsilon(t)|dt + |(H_\varepsilon v)(x)|, \tag{10}$$

где $(H_\varepsilon u)(x) \equiv \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+k(x)}\displaystyle\int_0^x \dfrac{exp[-W_\varepsilon(x,t)]L(t,t)}{\varepsilon+k(t)}[v(x)-v(t)]\,dt - \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+k(x)}\exp[-W_\varepsilon(x,0)][v(x)-v(0)], x \in [0,b_1].$ (11)

Применим неравенство Гроноулла-Белльмана [11, с. 38] и перейдем к норме. Тогда из (10) приходим к оценке

$$\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b_1]} \le exp(b_1M_2M_1)\|(H_\varepsilon v)(x)\|_{C[0,b_1]}.$$

При выполнении условия *а-б,* при всех функций $v(x) \in C^\gamma[0,b], 0 < \gamma \le$ для оператора $(H_\varepsilon u)(x)$ имеет место оценка [9, с.65]

$$\|(H_\varepsilon u)(x)\|_{C[0,b_1]} \le (d_2\varepsilon + d_3\varepsilon^\gamma)\|u\|_{\gamma*},$$

где $d_3 = (2+d_4)\gamma_0^{-(1+\gamma)}d_1^{-\gamma}$, $d_2 = (1+d_4){b_1}^\gamma/k(0)$, $\gamma_0 = min(\theta_1, 1-\gamma)$.

Следовательно, учитывая (6), при $\varepsilon \to 0$, функция $u_\varepsilon(x) \to u(x)$ равномерно.

Пусть $x \in [b_1, b]$. Тогда из (2) получим

$$k(x)w(x) + \int_{b_1}^x L(x,t)w(t)dt = F(x), x \in [b_1, b] \tag{12}$$

или

$$k(x)w(x) + \int_{b_1}^x L(t,t)w(t)dt = \int_{b_1}^x [L(t,t) - L(x,t)]w(t)dt + F(x), \tag{13}$$

где $F(x) = f(x) - \int_0^{b_1} L(x,t)v(t)dt\,, x \in [b_1,b], F(b_1) = 0.$

Уравнение с малым параметром ε из интервала (0,1), соответствующее уравнению (13), имеет вид

$$\big(\varepsilon + k(x)\big)w_\varepsilon(x) + \int_{b_1}^x L(t,t)\,w_\varepsilon(t)dt = \int_{b_1}^x [L(t,t) - L(x,t)]\,w_\varepsilon(t)dt\ + \varepsilon w(b_1) + F(x),$$
$$w(b_1) = v_\varepsilon(b_1), x \in [b_1, b] \tag{14}$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия *а*), *в*), и $L(x,x) \ge d_1 > 0$. Тогда, при $\varepsilon \to 0$, решение уравнения (14) равномерно сходится к решению уравнения (12), причем, имеет место оценка

$$\|w_\varepsilon(x) - w(x)\|_{C[b_1,b]} \le M_0\varepsilon^\gamma\ ,$$

где $M_0 = d_1^{-\gamma}(d_5+d_6)M_3\left\|\mathcal{U}\right\|_{\gamma*}, d_5 = \int_{b_1}^\infty \tau^\gamma\, e^{-\tau}d\tau, d_6 = \sup\limits_{\tau\ge 0}(\tau^\gamma e^{-\tau}),$

$M_3 = exp(M_1(b-b_1)d_1^{-1}[(1+b_1)e^{-b_1} + e^{-1}]).$

Доказательство. С помощью подстановки

$$\mu_\varepsilon(x) = w_\varepsilon(x) - w(x), x \in [b_1, b] \tag{15}$$

из (13) и (14) получим

$$\big(\varepsilon + k(x)\big)\mu_\varepsilon(x) + \int_{b_1}^x L(t,t)\,\mu_\varepsilon(t)dt = \int_{b_1}^x [L(t,t) - L(x,t)]\,\mu_\varepsilon(t)dt\ + \varepsilon[w(b_1) - w(x)], x \in [b_1, b]. \tag{16}$$

Так как $k(x)$ неубывающая при $x \in [b_1, b]$, то при $s \leq x$

$$\frac{1}{\varepsilon + k(x)} \leq \frac{1}{\varepsilon + k(s)}.$$

Тогда используя условие $L(x,x) \geq d_1 > 0$, для функции

$$G_{\varepsilon 1}(x) = \frac{1}{\varepsilon + k(x)} \int_{b_1}^{x} \exp[-W_\varepsilon(x,t)] \frac{L(t,t)}{\varepsilon + k(t)} (x-t) dt$$

получим

$$|G_{\varepsilon 1}(x)| \leq d_1^{-1} \int_{b_1}^{x} \frac{exp[-W_\varepsilon(x,t)]L(t,t)}{\varepsilon + k(t)} \int_{t}^{x} \frac{L(s,s)ds}{\varepsilon + k(s)} dt \leq (1+b_1)e^{-b_1} d_1^{-1}.$$

На основе данной оценки из уравнения

$$\mu_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon + k(x)} \int_{b_1}^{x} exp[-W_\varepsilon(x,t)] \frac{L(t,t)}{\varepsilon + k(t)} \left\{ \int_{b_1}^{t} [L(x,s) - L(t,s)] \times \right.$$
$$\left. \times \mu_\varepsilon(s)ds + \int_{t}^{x} [L(x,s) - L(s,s)]\mu_\varepsilon(s)ds + \varepsilon[w(t) - w(x)] \right\} dt +$$
$$+ \frac{exp[-W_\varepsilon(x,0)]}{\varepsilon + k(x)} \times \left\{ \int_{b_1}^{x} [L(t,t) - L(x,t)]\, \eta_\varepsilon(t)dt + \varepsilon[w(b_1) - w(x)] \right\}. \quad (17)$$

имеем

$$\left| -\frac{1}{\varepsilon + k(x)} \int_{b_1}^{x} \frac{exp[-W_\varepsilon(x,t)]L(t,t)}{\varepsilon + k(t)} \left\{ \int_{b_1}^{t} [L(x,s) - L(t,s)]\mu_\varepsilon(s)ds + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \int_{t}^{x} [L(x,s) - L(s,s)]\mu_\varepsilon(s)ds \right| \leq M_1 |G_{\varepsilon 1}(x)| \int_{b_1}^{x} |\mu_\varepsilon(t)|dt \leq$$
$$\leq d_1^{-1} M_4 \int_{b_1}^{x} |\mu_\varepsilon(t)|dt\,, M_4 = M_1(1+b_1)e^{-b_1}.$$

Используя неравенство $\sup_{v \geq 0}[ve^{-v}] \leq e^{-1}, v = \frac{1}{\varepsilon + k(x)} \int_{b_1}^{x} L(s,s)ds$ и условие *в*) для функции $k(x)$, имеем

$$\left| \frac{exp[-W_\varepsilon(x,b_1)]}{\varepsilon + k(x)} \int_{b_1}^{x} [L(t,t) - L(x,t)]\, \mu_\varepsilon(t)dt \right| \leq M_1 \frac{d_1^{-1}}{\varepsilon + k(x)} \times$$
$$\times exp\left(-\frac{1}{\varepsilon + k(x)} \int_{b_1}^{x} L(s,s)ds \right) \int_{b_1}^{x} L(s,s)ds \int_{b_1}^{x} |\mu_\varepsilon(t)|dt \leq$$
$$\leq \sup_{v \geq 0}[ve^{-v}]\, d_1^{-1} M_1 \int_{b_1}^{x} |\mu_\varepsilon(t)|dt \leq (ed_1)^{-1} M_1 \int_{b_1}^{x} |\mu_\varepsilon(t)|dt.$$

В силу данных оценок из (17) получим

$$|\mu_\varepsilon(x)| \leq d_1^{-1}\left((1+b_1)e^{-b_1} + e^{-1}\right)M_1 \int_{b_1}^{x} |\mu_\varepsilon(t)|dt + |(H_\varepsilon w)(x)|, \quad (18)$$

где $(H_\varepsilon u)(x) \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon + k(x)} \int_{b_1}^{x} \frac{exp[-W_\varepsilon(x,t)]L(t,t)}{\varepsilon + k(t)} [w(x) - w(t)]\, dt - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + k(x)} exp[-W_\varepsilon(x,b_1)][w(x) - w(b_1)].$

Применение неравенства Гронуолла-Белльмана для (18) и переход к норме приводит к оценке

$$\|\mu_\varepsilon(x)\|_{C[b_1,b]} \le M_3 \|(H_\varepsilon w)(x)\|_{C[b_1,b]}.$$

При выполнении условий *а),в),* для функций $w(x) \in C^\gamma[b_1, b], 0 < \gamma \le 1$ имеет место оценка [10]

$$\|(H_\varepsilon w)(x)\|_{C[b_1,b]} \le d_1^{-\gamma}(d_5 + d_6)\left\|\mathcal{U}\right\|_{\gamma^*} \varepsilon^\gamma,$$

Теорема 2 доказана.

Решение $u(x)$ уравнения (1), определяется по правилу:

$$u(x) = \begin{cases} v(x), x \in [0, b_1], \\ w(x), x \in [b_1, b], w(b_1) = v(b_1), \end{cases}$$

где $v(x)$ - решение уравнения (3), $w(x)$ - решение уравнения (12). При этом регуляризованное решение $u_\varepsilon(x)$ строится по правилу

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} v_\varepsilon(x), x \in [0, b_1], \\ w_\varepsilon(x), x \in [b_1, b], w_\varepsilon(b_1) = v_\varepsilon(b_1), \end{cases}$$

$v_\varepsilon(x)$ - решение уравнения (5), $y_\varepsilon(x)$ - решение уравнения (14).

Из теорем 1 и 2 следует, что при выполнении условий данных теорем регуляризованное решение $u_\varepsilon(x)$ равномерно сходится к решению уравнения (2).

Литература:

1. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. - Наука, Москва, 1982.
2. Brunner H., van der Houwen P. J. The numerical solution of Volterra equations, CWI Monographs 3. - Amsterdam: North-Holland, 1986.
3. Brunner H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations. - University Press, Cambridge 2004.
4. Linz P. Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. - SIAM, Philadelphia, 1985.
5. Сергеев В.О. Регуляризация уравнений Вольтерра первого рода // ДАН СССР, 1971.- 197 (3). - С. 531-534.
6. Магницкий Н.А. О приближенном решении некоторых интегральных уравнений Вольтерра I рода. // Вестник МГУ, 1978. - №1, С. 91-96.
7. Денисов А. М. О приближенном решении уравнения Вольтерра I рода // ЖВМиМФ, 1975. - №15 (4). – С. 1053-1056.
8. Иманалиев М.И., Асанов А. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Исслед. по интегро - дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988. – Вып. 21. – С. 3-38.
9. Омуров Т.Д. Каракеев Т.Т. Регуляризация и численные методы решения обратных и нелокальных краевых задач. – Бишкек: Илим, 2006г. – С. 164.
10. Асанов А., Ободоева Г. Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1994. – Вып. 25. – С. 65-74.
11. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – Москва: Наука, 1967. – С. 472.
12. Karakeev T.T. and T.M. Imanaliev, «Regularization of Volterra linear integral equations of the first kind with the smooth data,» Lobachevskii J.Math., 2020. - №41. – С. 39-45.
13. Каракеев Т.Т., Бугубаева Ж.Т. Регуляризация линейных инегральных уравнений Вольтера третьего рода с невозрастающей функцией. Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2020. №. 2. С. 3-10.