DOI:10.26104/NNTIK.2023.31.42.003

Курманбаева А.К., Ороскулова Г.К., Касымалиева А.А., Матанова К.Б.

ЖАЛПЫЛАНГАН БУССИНЕСКА ТЕҢДЕМЕСИНИН БУЛАК ФУНКЦИЯСЫН АНЫКТОО ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕСИ

Курманбаева А.К., Ороскулова Г.К., Касымалиева А.А., Матанова К.Б.

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

A. Kurmanbaeva, G. Oroskulova, A. Kasymalieva, K. Matanova

THE PROBLEM OF DETERMINING THE SOURCE FUNCTION OF THE GENERALIZED BOUSSINESQ EQUATION

УДК: 517.95

Математикалык физиканын тескери маселелерин изилдөөдө маселенин тиешелүү тике маселесинин (мында биринчи түрдөгү чектик шарттары менен биринчи башталгыч-чектик маселеси) чечимдерин билүү маанилүү роль ойнойт. Макалада сызыктуу эмес жалпыланган Boussinesq теңдемесинде мейкиндиктик өзгөрмөлөргө жараша булакты кайра куруунун тескери маселеси изилденет. Маселе тик бурчтукта каралат. Кошумча шарт катары акыркы жокко чыгаруу шарты колдонулат. Грин функциясын колдонуу менен каралып жаткан тескери маселе экинчи түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемелеринин сызыктуу эмес системаларын чыгарууга келтирилет. Бул маселе белгисиз функциялар үчүн интегралдык теңдемелердин системасын чечүүгө алынып келинет. Кысып чагылтуу принцибин үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигиндеги интегралдык теңдемелер системасына колдонулат. Коюлган маселенин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы далилденген. Каралып жаткан маселенин классикалык чечилиши үчүн бар жана кайталангыстык теоремалары далилденген. Коюлган маселенин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгын далилдөө үчүн Вольтерранын оператордук теңдемелер ыкмасы колдонулат.

Негизги сөздөр: *жалпыланган Буссинеска теңдемеси, тескери маселе, акыркы кайра аныктоо, оператордук теңдемелердин Вольтерра ыкмасы, Грин функциясы.*

При исследовании обратных задач математической физики важную роль играет знание решений соответствующей прямой (в данном случае первую начально-краевую задачи граничными условиями первого рода) задачи. В статье исследована обратная задача восстановления источника зависящее от пространственных переменных в нелинейном обобщенном уравнении Буссинеска. Задача рассматривается в прямоугольнике. В качестве дополнительного условия используется условие финального переопределение. С помощью функции Грина рассматриваемая обратная задача сводится к решению нелинейных систем интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Доказаны теоремы существования и единственности классического решения рассматриваемой задачи. Эта задача сводится к решению системы интегральных уравнений относительно неизвестных функций. К последней системе интегральных уравнений в пространстве непрерывных функций применяется принцип сжатых отображений. Доказана локальная однозначная разрешимость поставленной задачи. Для доказательства существования и единственности решения поставленной задачи применяется метод операторных уравнений Вольтерра.

Ключевые слова: *обобщенное уравнение Буссинеска, обратная задача, финальное переопределение, метод операторных уравнений Вольтерра, функция Грина.*

When studying inverse problems of mathematical physics, an important role is played by knowledge of the solutions of the corresponding direct problem (in this case, the first initial-boundary value problem with boundary conditions of the first kind) of the problem. The article investigates the inverse problem of source reconstruction depending on spatial variables in the nonlinear generalized Boussinesq equation. The problem is considered in a rectangle. The final override condition is used as an additional condition. Using the Green's function, the inverse problem under consideration is reduced to solving nonlinear systems of Volterra integral equations of the second kind. The existence and uniqueness theorems for the classical solution of the problem under consideration are proved. This problem comes down to solving a system of integral equations for unknown functions. The principle of compressed mappings is applied to the last system of integral equations in the space of continuous functions. The local unique solvability of the problem posed is proven. To prove the existence and uniqueness of a solution to the problem posed, the method of Volterra operator equations is used.

Key words: *generalized Boussinesq equation, inverse problem, final redefinition, Volterra method of operator equations, Green's function.*

Введение. Обобщенное уравнение Буссинеска является математической моделью Соболевского типа, описывающее фильтрацию жидкости в пористой среде. П.Я. Кочина в своей монографии [1] отмечает, что фильтрационное уравнение Буссинеска недостаточно для моделирования процесса фильтрации. Е.С. Дзекцер устранил этот недостаток и в работе [2] вывел уравнение, которое описывает движение свободной поверхности и является фильтрующейся в слое конечной глубины жидкости.

Например, [1] уравнение фильтрации жидкости в пористом слое конечной глубины со свободной поверхностью относится к псевдопараболическому уравнению и в литературе ее называют обобщенным уравнением Буссинеска. Различные прямые и обратные задачи для обобщенного уравнения Буссинеска изучались в [3-5]. В отличие от прямых задач, обратные задачи для этого типа уравнений изучены сравнительно мало. В настоящей статье исследуется задача нахождения функции источника, зависящая от пространственных переменных. Отметим также, что обратные задачи по определению функции источника в подобной постановке изучались в [12-14].

Постановка задачи и её сведение к эквивалентной задаче. Рассмотрим математическую модель, описывающую движение свободной поверхности $u = u(x,t)$ процесса фильтрации жидкости в пористой среде и учитывающую изменение горизонтальных составляющих скорости фильтрации по вертикали [1].

Требуется найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую в области Ω_T уравнению

$$u_t(x,t) = \alpha(u^2(x,t))_{xx} + u_{xxt}(x,t) + F(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

и граничным условиям второго рода

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

где $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$, а функции $u_0(x), \mu_1(t), \mu_2(t), F(x,t)$ - известные.

Определение 1. Решением начально-краевой задачи (1) -(3) назовем функцию $u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$, удовлетворяющую уравнению (1), условиям (2) и (3).

Пусть функция $F(x,t)$ имеет вид $F(x,t) = f(x)h(x,t)$. Требуется найти пару функций $\{u(x,t), f(x)\}$, если функция $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (1)-(3) и $u(x,T) = u_1(x), \quad 0 \le x \le l,$ (4)
где $u_1(x) -$ заданная функция.

Определение 2. Функции $(u(x,t), f(x)) \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{(1,0)}(\bar{\Omega}_T) \times C[0,l]$ называются решением обратной задачи (1)-(4), если они удовлетворяют условиям (1)-(4).

2. Переход от обратной адачи к прямой. Пусть $\{u(x,t), f(x)\}$ является классическим решением обратной задачи (1)-(4). Для этого положим в уравнении (1) *t=T* и, учитывая условие (4), при $h(x,T) \ne 0$ получим

$$f(x) = \left[Lu_t(x,T) - \alpha\left(u_1''(x)\right)^2 \right] / h(x,T), \quad 0 \le x \le l. \tag{5}$$

Подставляя (5) в уравнение (1), получим нелинейное нагруженное дифференциальное уравнение относительно функции $u(x,t)$:

$$u_t(x,t) = \alpha(u^2(x,t))_{xx} + u_{xxt}(x,t) + h_1(x,t)Lu_t(x,T) + a(x,t), \tag{6}$$

где

$$a(x,t) = -h_1(x,t)\alpha\left(u_1''(x)\right)^2, \; h_1(x,t) = h(x,t) / h(x,T).$$

Таким образом, мы получили прямую задачу для нагруженного уравнения (6) с условиями (2), (3).

3. Исследование существования и единственности классического решения обратной задачи. Сначала приведем две леммы, которые понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1. Для любой функции $\eta(x)$ решение краевой задачи

$$\begin{cases} Lz = \left(-d^2 / dx^2 + I\right) z = \eta(x), \\ z(0) = z(l) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Существует, единственно и дается формулой

$$z = L^{-1}\eta = \int_0^l G(x,s)\eta(s)ds, \tag{8}$$

где

$$G(x,s)=\frac{1}{shl}\begin{cases} shx\, sh(s-l), & 0\le x\le s,\\ shs\, sh(x-l), & s\le x\le l.\end{cases}$$

Другими словами, для оператора L существует непрерывный обратный оператор $G:C\to C^2$, который имеет вид (8).

Лемма 2. Для любой функции $z(x,t)\in C^{(2,0)}(\bar{\Omega}_T)$ справедливо равенство

$$\int_0^l G(x,s)z(s,t)Lu(s,T)ds=\int_0^l\left[LG(x,s)z(s,t)+2G_s(x,s)z_s(s,t)+G(x,s)z_{ss}(s,t)\right]u(s,T)ds. \quad (9)$$

Доказательство проводится непосредственным вычислением.

Теорема 1. Если $u_0(x),u_1(x)\in C^2[0,l],\ \mu_1,\mu_2\in C^1[0,T],\ h\in C^{(2,1)}(\bar{\Omega}_T),\ h(x,0)\ne h(x,T), \forall x\in[0,l]$, $|h(x,T)|\ge h_0>0$ и имеет место условия согласованности $u_0(0)=\mu_1(0),\ u_0(l)=\mu_2(0)$, $u_1(0)=\mu_1(T),\quad u_1(l)=\mu_2(T)$, то обратная задача (1) -(4) имеет единственное решение.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$v(x,t)=u_t(x,t),\quad (x,t)\in\bar{\Omega}_T. \quad (10)$$

Тогда относительно функции $v(x,t)$ получим задачу

$$v_t(x,t)=\alpha(u^2(x,t))_{xxt}+v_{xxt}(x,t)+h_{1t}(x,t)Lv(x,T)+a_t(x,t), \quad (11)$$

$$Lv(x,0)=\alpha(u_0^2(x))_{xx}+h_1(x,0)Lv(x,T)+a(x,0),\ 0\le x\le l, \quad (12)$$

$$v(0,t)=\mu_1'(t),\quad v(l,t)=\mu_2'(t),\qquad 0\le t\le T, \quad (13)$$

Используя функцию Грина задачи (7) и учитывая формулу (8), (9), проинтегрировав два раза по частям, из (11), (13), имеем

$$v_t(x,t)+\alpha v^2(x,t)=\alpha\int_0^l G(x,\xi)(u^2(\xi,t))_t d\xi+h_{1t}(x,t)v(x,T)+\int_0^l K(x,\xi,t)v(\xi,T)d\xi+g(x,t), \quad (14)$$

где

$$K(x,\xi,t)=2G_\xi(x,\xi)h_{1t\xi}(\xi,t)+G(x,\xi)h_{1t\xi\xi}(\xi,t),$$

$$g(x,t)=\int_0^l G(x,\xi)g(x,\xi)d\xi+\alpha\left[\frac{(\mu_1'(t))^2 sh(l-x)}{shl}+\frac{(\mu_2'(t))^2 shx}{shl}\right].$$

Из начального условия (12), с учетом формулы (7), находим

$$v(x,0)=b(x)+h_1(x,0)v(x,T)+\int_0^l K_1(x,\xi)v(\xi,T)d\xi,\ 0\le x\le l, \quad (15)$$

где

$$K_1(x,\xi)=2G_\xi(x,\xi)h_{1\xi}(\xi,0)+G_{\xi\xi}(x,\xi)h_{1\xi\xi}(\xi,0),\ b(x)=\alpha\int_0^l G(x,\xi)\left[(u_0^2(\xi))_{\xi\xi}+a(\xi,0)\right]d\xi.$$

Проинтегрируем уравнение (14) при условии (12) и учитывая формулу (9), получим

$$v(x,t)=h_1(x,0)v(x,T)+\alpha\int_0^l G(x,\xi)u^2(\xi,t)d\xi-\alpha\int_0^t v^2(x,\tau)d\tau+$$
$$+\int_0^l K_2(x,\xi,t)v(\xi,T)d\xi+g_1(x,t), \quad (16)$$

где

$$K_2(x,\xi,t)=\int_0^t K(x,\xi,\tau)d\tau+K_1(x,\xi),$$

$$g_1(x,t)=b(x)+\int_0^t g(x,\tau)d\tau+\alpha\int_0^l G(x,\xi)u_0^2(\xi)d\xi.$$

Положив в (16) $t=T$, найдем:

$$v(x,T)=\alpha(h_1(x,0)-1)^{-1}\int_0^t v^2(x,\tau)d\tau+\int_0^l K_3(x,\xi)v(\xi,T)d\xi+g_2(x), \tag{17}$$

где

$$K_3(x,\xi)=(1-h_1(x,0))^{-1}K_2(x,\xi,T),\ \ g_2(x)=(1-h_1(x,0))^{-1}\left[\alpha\int_0^l G(x,\xi)u_1^2(\xi)d\xi+g_1(x,T)\right].$$

С другой стороны, из (6) и (3), с учетом формулы (7), находим

$$u_t(x,t)+\alpha u^2(x,t)=h_1(x,t)v(x,T)+\int_0^l K(x,\xi,t)v(\xi,T)d\xi+g_3(x,t),$$

где

$$g_3(x,t)=\int_0^l G(x,\xi)a(x,\xi)d\xi+\alpha\left[\frac{\mu_1^2(t)sh(l-x)}{shl}+\frac{\mu_2^2(t)shx}{shl}\right].$$

Интегрирование последнего уравнения с учетом условия (2) дает

$$u(x,t)=h_2(x,t)v(x,T)-\alpha\int_0^t u^2(x,\tau)d\tau+\int_0^l K_4(x,\xi,t)v(\xi,T)d\xi+g_4(x,t), \tag{18}$$

где

$$K_4(x,\xi,t)=\int_0^t K(x,\xi,\tau)d\tau,\ h_2(x,t)=\int_0^t h_1(x,\tau)d\tau,$$

$$g_4(x,t)=\int_0^t g_3(x,\tau)d\tau+u_0(x).$$

Запишем систему уравнений (16), (17), (18) как операторное уравнение

$$z=Az, \tag{19}$$

где $z(x,t)=(z_1,\,z_2,\,z_3)-$ векторная функция, причем

$$z_1(x,t)=u(x,t),\ z_2(x,t)=v(x,t),\ z_3(x)=v(x,T).$$

Здесь оператор $A=(A_1,A_2,\,A_3)$ определен на множестве непрерывных функций $z\in C(\overline{\Omega}_T)$ и в соответствии с соотношениями (16), (17), (18) определяется так:

$$A_1z=z_{01}+h_2(x,t)z_3(x)-\alpha\int_0^t z_1^2(x,\tau)d\tau+\int_0^l K_4(x,\xi,t)z_3(\xi)d\xi,$$

$$A_2z=z_{02}+h_1(x,0)z_3(x)+\alpha\int_0^l G(x,\xi)z_1^2(\xi,t)d\xi-\alpha\int_0^t z_2^2(x,\tau)d\tau+\int_0^l K_2(x,\xi,t)z_3(\xi)d\xi,$$

$$A_3z=z_{03}+\alpha(h_1(x,0)-1)^{-1}\int_0^t z_2^2(x,\tau)d\tau+\int_0^l K_3(x,\xi)z_3(\xi)d\xi,$$

где

$$z_{01} := g_4(x,t)\ z_{02} := g_1(x,t),\ z_{03} := g_2(x).$$

В пространстве функций $z \in C(\bar{\Omega}_T)$ введем норму

$$\|z\| = \max\left\{\max_{(x,t)\in\bar{Q}_T^+}|z_1(x,t)|,\ \max_{(x,t)\in\bar{Q}_T^+}|z_2(x,t)|, \max_{x\in[0,l]}|z_3(x)|\right\} = \max\left\{\|z_1\|, \|z_2\|, \|z_3\|\right\},$$

$$\|z_0\| = \max\left\{\max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T}|g_4(x,t)|,\ \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T}|g_1(x,t)|, \max_{0\le x\le l}|g_2(x)|\right\} = \max\left\{\|g_4\|, \|g_1\|, \|g_2\|\right\}.$$

Рассмотрим в $C(\bar{\Omega}_T)$ множество функций $z(x,t)$, удовлетворяющих неравенству

$$\|z - z_0\|(T) \le \|z_0\|(t_0) \tag{20}$$

и обозначим его через $M(T)$.

Докажем, что при достаточно малом *T*, оператор *A* являются сжимающим отображением и $A: M(T) \to M(T)$. В самом деле, из неравенства (20) для функции $z \in M(T)$ следует

$$\|z\|(T) \le 2\|z_0\|(t_0). \tag{21}$$

Далее, оценивая интегралы, входящие в (16)-(18), получим

$$\|A_1 z - z_{01}\|(t_0) \le \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T}|h_2(x,t)|\cdot\|z_3(x)\| + \alpha\max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T}\int_0^t|z_1^2(x,\tau)|d\tau + \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T}\int_0^l|K_4(x,\xi,t)|\|z_3(\xi)\|d\xi \le$$

$$\le C_1\|z_0\|(t_0) + \alpha T\|z_0\|^2(t_0) + C_2 l\|z_0\|(t_0),$$

$$\|A_2 z - z_{02}\| \le \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T}|h_1(x,0)|\|z_3(x)\| + \alpha\max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T}\int_0^l|G(x,\xi)||z_1^2(\xi,t)|d\xi + \alpha\max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T}\int_0^t|z_2^2(x,\tau)|d\tau +$$

$$+\max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T}\int_0^l|K_2(x,\xi,t)||z_3(\xi)|d\xi \le C_3\|z_0\|(t_0) + \alpha C_4 l\|z_0\|^2(t_0) + \alpha T\|z_0\|^2(t_0) + C_5 l\|z_0\|(t_0);$$

$$\|A_3 z - z_{03}\| \le \alpha\max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T}\left|(h_1(x,0)-1)^{-1}\right|\int_0^t|z_2^2(x,\tau)|d\tau + \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T}\int_0^l|K_3(x,\xi)||z_3(\xi)|d\xi \le$$

$$\le \alpha C_6 T\|z_0\|^2(t_0) + C_7 l\|z_0\|(t_0),$$

где $C_1 = \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T}|h(x,t)|$, $C_2 = \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T}|K_4(x,\xi,t)|$, $C_3 = \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T}\|h_1(x,0)\|$, $C_4 = \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T}|G(x,\xi)|$, $C_5 = \|K_2(x,\xi,t)\|$, $C_6 = \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T}\left|(h_1(x,0)-1)^{-1}\right|$, $C_7 = \max_{(x,\xi)}|K_3(x,\xi)|$, а функции $h_2(x,t)$, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7 оцениваются через исходных функций $u_0(x), \mu_1(t), \mu_2(t), h(x,t), g(x,t).$ Поэтому для

$$T \le T^* = 1/\min\left\{\min(C_1, \alpha T, C_2 l), \min(C_3, \alpha C_4 l, \alpha T, C_5 l), \min(\alpha C_6 T, C_7 l)\right\},$$

оператор *A* переводит множество *m*(*T*) в себя.

Пусть теперь z_1, z_2 - любые два элемента из множества *m*(*T*) в себя, $T \le T^*$. Тогда используя очевидные неравенства

$$|z_1^2(x,t) - z_2^2(x,t)| \le |z_1(x,t) + z_2(x,t)|\cdot|z_1(x,t) - z_2(x,t)| \le 4\|z_0\|_C|z_1(x,t) - z_2(x,t)|,$$

получим

$$\|Az_1 - Az_2\|(t_0) \le \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T} |h_2(x,t)||z_{31}(x) - z_{32}(x)| + \alpha \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T} \int_0^t |z_{11}^2 - z_{12}^2|(x,\tau)d\tau +$$

$$+ \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T} \int_0^l |K_4(x,\xi,t)||z_{31}(\xi) - z_{32}(\xi)|d\xi \le \left[C_1 + 4\alpha\|z_0\|\right]\|z_1 - z_2\|;$$

$$\|Az_1 - Az_2\| \le \max_{0\le x\le l} |h_1(x,0)||z_{31}(x) - z_{32}(x)| + \alpha \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T} \int_0^l |G(x,\xi)||z_{11}^2 - z_{12}^2|(\xi,t)d\xi +$$

$$+\alpha \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T} \int_0^t |z_{21}^2 - z_{22}^2|(x,\tau)d\tau + \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T} \int_0^l |K_2(x,\xi,t)||z_{31}(\xi) - z_{32}(\xi)|d\xi \le$$

$$\le \left[C_3 + 4\alpha(C_4 l + T)\|z_0\| + C_5 l\right]\|z_1 - z_2\|;$$

$$\|Az_1 - Az_2\| = \alpha \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T} |(h_1(x,0) - 1)^{-1}| \left|\int_0^t |z_{21}^2 - z_{22}^2|(x,\tau)d\tau + \max_{0\le x\le l} \int_0^l |K_3(x,\xi)||z_3(\xi) - z_3(\xi)|d\xi \le\right.$$

$$\le \left[4\alpha C_6 T\|z_0\| + C_7 l\right]\|z_1 - z_2\|.$$

Пусть

$$T^* = 1/\max\left\{\max\left[C_1 + 4\alpha\|z_0\|\right], \max\left[C_3 + 4\alpha(C_4 l + T)\|z_0\| + C_5 l\right], \max\left[4\alpha C_6 T\|z_0\| + C_7 l\right]\right\}.$$

Отсюда следует, что для достаточно малых $T < T^*$ оператор A является сжимающим отображением множества $m(T)$ на себя. Тогда согласно теореме С. Банаха, существует единственное решение операторного уравнения (19) на множестве $m(T)$, которое принадлежит этому шару. Это решение можно получить с помощью метода последовательных приближений. Таким образом, однозначно нашли функции $u(x,t), f(x)$. Теорема 1 доказана.

Литература:

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 457 с.
2. Дзекцер Е.С. Уравнения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах //Докл.АН СССР.1972. Т. 202, №5. 540-543 с.
3. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. – Бишкек: Илим, 2001. – 183 с.
4. Фураев В.З., Шадрин Г.А. Вывод уравнения для свободной поверхности фильтрующейся жидкости в слое конечной глубины // Вычисл. матем. и матем. физика. - М.: Изд. МГПИ им. В. И. Ленина, 1982. - Т. 10. - 66-71 с.
5. Фураев В.З. О разрешимости в целом первой краевой задачи для обобщенного уравнения Буссинеска // Дифференц.уравнения, 1983. - Том 19, №11. - 2014-2015.
6. Furaev V. Z., Antonenko A. I. Approximation of solutions to the boundary value problems for the generalized Boussinesq equation, Vestnik YuUrGU. Ser. Mat.Model. Progr., 2017, Volume 10, Issue 4, 145-150 p.
7. Аблабеков, Б.С. Обратные задачи определения источника в нелинейном обобщенном уравнении Буссинеска [Текст] /Б.С. Аблабеков, А.К.Курманбаева // Вестн. КНУ им. Ж.Баласагына. - 2011. - Спец. вып. - 250-252 с.
8. Курманбаева А.К. О разрешимости обратной задачи восстановления источника в обобщенном уравнении Буссинеска // Евразийское научное объединение. – 2019. - Т.1. – №5-1(51). – 44-48 с.
9. Аблабеков Б.С., Касымалиева А.А., Асанов А.Р Об одной обратной задаче определения функции источника в уравнении Буссинеска-Лява в случае задачи Коши на полуоси. / Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2022. №. 6. С. 3-6.