МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

DOI:10.26104/NNTIK.2023.33.24.002

Асылбеков Т.Д., Нуранов Б.Ш.

ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ГИПЕРБОЛИКАЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ШАРТТАРЫ $y = g(x)$ МОНОТОНДУУ ИЙРИСИН БОЙЛОТО БЕРИЛГЕН КОШИ МАСЕЛЕСИ

Асылбеков Т.Д., Нуранов Б.Ш.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С УСЛОВИЯМИ, ЗАДАННЫМИ ВДОЛЬ МОНОТОННОЙ КРИВОЙ $y = g(x)$

T. Asylbekov, B. Nuranov

INTEGRAL FORM OF THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A THIRD-ORDER HYPERBOLIC EQUATION WITH CONDITIONS GIVEN ALONG A MONOTONE CURVE $y = g(x)$

УДК: 517.95

Бул макалада шарттары $y = g(x)$ монотондуу ийри сызыгын бойлото берилген Коши маселеси тиешелүү кичине мүчөлөрү менен үчүнчү тартиптеги гиперболикалык теңдеме үчүн каралган. Макалынын негизги максаты коюлган Коши маселесинин чечиминин жашашын, жалгыздыгын, туруктуулугун $D = \{(x,y): y \geq g(x), g'(x) > 0,\ x \in (-\infty; +\infty)\}$ областында далилдөө болуп саналат. Далилдөө үчүн алдын ала Риман функция усулунун аналогу менен Риман функциясы тургузулган. Риман функциясынын жардамы менен Коши маселесинин чечиминин айкын көрүнүшү алынган. Коши маселесинин чечиминин коррективдүүлүгү экинчи роддогу Вольтерранын интегралдык теңдемесинин жардамы менен далилденген. Алынган Коши маселесинин чечими топурактын катмарларында нымдуулуктун өкөрүмдүүлүгү, гетерогендик чөйрөдө жылуулуктун берилишин изидөөгө мүмкүнчүлүк берет. Ошондой эле үчүнчү тартиптеги жекече туундусу бар дифференциалдык теңдемелериндин теориясынын локалдык, локалдык эмес чек аралык маселелерди терең изилдөөгө мүмкүнчүлүк берет.

***Негизги сөздөр:** үчүнчү тартиптеги дифференциалдык теңдемелер, гиперболалык теңдеме, Римандын функциясы, интегралдык теңдемелер, Коши маселеси, удаалаш жакындаштыруу усулу, түйүндөш теңдеме.*

В статье рассматривается задача Коши для гипер-болического уравнения третьего порядка со всеми младшими членами с условиями, заданными вдоль монотонно кривой линии $y = g(x)$. Основной целью статьи является доказательство существование, единственности, устойчивости решение задачи Коши в области $D = \{(x,y): y \geq g(x), g'(x) > 0,$ $x \in (-\infty; +\infty)\}$. Для доказательство сначала аналогичным методом функции Римана построена функция Римана и с помощью функции Римана получено представление решения задачи Коши в явном виде. Коррекность задачи Коши доказана с помощью интегральным уравнениям Вольтерра второго рода. Полученное решение задачи Коши позволяет описать процесс влагопереноса в почвогрунтах, передачи тепла в гетерогенной среде, фильтрации жидкости в пористых средах. Пополнить теорию дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка и позволитьримущество при исследование дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка.

***Ключевые слова:** дифференциальное уравнение третьего порядка, гиперболическое уравнение, функция Римана, интегральное уравнение, задача Коши, метод последовательных приближений, сопряженные уравнение.*

The article considers the Cauchy problem for a third-order hyperbolic equation with all lower terms with conditions specified along a monotonically curved line. The main goal of the article is to prove the existence, uniqueness $y = g(x)$, and stability of a solution to the Cauchy problem in the region $D = \{(x,y): y \geq g(x), g'(x) > 0,\ x \in (-\infty; +\infty)\}$. To prove this, first, using a similar method for the Riemann function, a Riemann function was constructed and, using the Riemann function, an explicit representation of the solution to the Cauchy problem was obtained. The Cauchy problem is reduced to Volterra integral equations of the second kind. Using the method of integral equations, the existence of a unique solution to the Cauchy problem is proven. The resulting solution to the Cauchy problem allows us to describe the process of moisture transfer in soils, heat transfer in a heterogeneous medium, and fluid filtration in porous media. Expand the theory of third-order partial differential equations and provide an advantage in the study of third-order partial differential equations.

***Key words**: third order differential equation, hyperbolic equation, Riemann function, integral equation, Cauchy problem, method of successive approximations, conjugate equation.*

Введение. Исследование влагопереноса в почвогрунтах, передачи тепла в гетерогенной среде [3], фильтрации жидкости в пористых средах [1,2], приводят к изучению уравнений в частных производных гиперболического типа третьего порядка.

Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса исследованы в работах [7,8]. Нелокальные задачи для гиперболических уравнений третьего порядка исследованы в работах [2]. Краевые задачи для различных уравнений гиперболического типа третьего порядка изучены в работах [7]. Известно, что мало изучены некоторые виды общих уравнений третьего порядка гиперболического типа, обеспечивающих существование и единственность решения соответствующих задач.

Локальные, нелокальные задачи для уравнений в частных производных третьего, четвертого порядков гиперболического типа изучены в работах [3-6] и М.Х. Шханукова [1. 2], А. Сопуева [3] и их учеников.

В рассматриваемой работе исследована задача Коши в области $D = \{(x,y): y \geq g(x), g'(x) > 0, x \in (-\infty; +\infty)\}$ для гиперболического уравнения третьего порядка, решения которых получены в явном виде. Полученные результаты могут применяться при решении различных биологических и физических задач, вызываемых большой практический и теоретический интерес.

Постановка задачи. Для гиперболического уравнения третьего порядка с условиями, заданными вдоль монотонной кривой $y = g(x)$ рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$u_{xxy}(x,y) + \alpha(x,y)u_y(x,y) + \beta(x,y)u_{xx}(x,y) + \gamma(x,y)u_x(x,y) + \\ +\delta(x,y)u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где $\alpha(x,y), \beta(x,y), \gamma(x,y), \delta(x,y) \in C(D), u(x,y), u_x(x,y), u_y(x,y), u_{xx}(x,y) \in C(\overline{D}),$

$$u_{xxy}(x,y) \in C(D), \tag{2}$$

где $g(x)$ – произвольная монотонная функция. Наложим на кривую $y = g(x)$ условие: пусть характеристики $x = const, y = const$ пересекают кривую $y = g(x)$ не более одного раза.

Задача (Коши). Найти в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши, заданной вдоль монотонной кривой $y = g(x)$:

$$u\,|_{y=g(x)} = \varphi_1(x), \tag{3}$$

$$u_y\,|_{y=g(x)} = \varphi_2(x), \tag{4}$$

$$u_{yy}\,|_{y=g(x)} = \varphi_3(x), \tag{5}$$

где $\varphi_i(x), i = 1,2,3 -$ заданные гладкие функции, причем $\forall x \in [y = g(x)]: \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x) \in C^2[y = g(x)]$.

Разрешимость задачи. Для построения функции Римана сначала найдем сопряженное уравнение (1) в виде:

$L^*(v) = -v_{xxy} - (\alpha v)_y + (\beta v)_{xx} - (\gamma v)_x + \delta v$, тогда имеет место тождества:

$$vL(u) - uL^*(v) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \tag{6}$$

где $P = vu_{xy} - v_x u_y + \beta v u_x - (\beta v)_x + \gamma v u,\ \ Q = v_{xx}u + \alpha v u.$

Для удобства переходим к переменным ξ, η.

Через точку $\forall C(x,y) \in D$ проводим характеристические прямые, тогда образуется криволинейный треугольник $D = \{(\xi,\eta): \eta \geq g(\xi) \cap \xi \geq x \cap \eta \leq y, x < \xi < g^{-1}(y), g(x) < \eta < y\}$ в плоскости ξ, η с вершинами $A(x, g(x)), B(g^{-1}(y), y), C(x,y)$.

Используя формулу Грина для криволинейного интеграла, будем интегрировать тождество (6) по контуру ∂D.

Сперва рассмотрим участок

$$AB: \xi = g^{-1}(\eta),\ \eta = g(\xi),\ \ d\eta = g'(\xi)d\xi,\ \ x \leq \xi \leq g^{-1}(y),\ g(x) \leq \eta \leq y.$$

Далее, используем формулу вычисления криволинейного интеграла второго рода. Найдем частную производную в формулах (3), (4) не вдоль кривой $y = g(x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=g(x)}=\varphi_1'(x)-\varphi_2(x)g'(x), \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\Big|_{y=g(x)}=\varphi_2'(x)-\varphi_3(x)g'(x), \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{y=g(x)}=\varphi_1''(x)-2\varphi_2'(x)g'(x)+\varphi_3(x)(g'(x))^2, \quad (9)$$

$$\int_A^B[Q(\xi,\eta)+P(\xi,\eta)g'(\xi)]\Big|_{\eta=g(\xi)}d\xi=\int_A^B\{v_{\xi\xi}(x,y;\xi,g(\xi))u(\xi,g(\xi))+$$
$$+\alpha(\xi,g(\xi))v(x,y;\xi,g(\xi))u(\xi,g(\xi))+v(x,y;\xi,g(\xi))u_{\xi\eta}(\xi,g(\xi))-$$
$$-v_\xi(x,y;\xi,g(\xi))u_\eta\left(\xi,g(\xi)\right)+v(x,y;\xi,g(\xi))\beta(\xi,g(\xi))u_\xi\left(\xi,g(\xi)\right)-$$
$$-[v_\xi(x,y;\xi,g(\xi))\beta\left(\xi,g(\xi)\right)+v(x,y;\xi,g(\xi))\beta_\xi\left(\xi,g(\xi)\right)]u(\xi,g(\xi))+$$
$$+\gamma(\xi,g(\xi))v(x,y;\xi,g(\xi))u(\xi,g(\xi))\}d\xi=\int_A^B\{[v_{\xi\xi}(x,y;\xi,g(\xi))+\alpha(\xi,g(\xi))\times$$
$$\times v(x,y;\xi,g(\xi))-v_\xi(x,y;\xi,g(\xi))\beta\left(\xi,g(\xi)\right)-v(x,y;\xi,g(\xi))\beta_\xi\left(\xi,g(\xi)\right)+$$
$$+\gamma(\xi,g(\xi))v(x,y;\xi,g(\xi))]\varphi_1(\xi)-[v_\xi(x,y;\xi,g(\xi))+v(x,y;\xi,g(\xi))\times$$
$$\times\beta(\xi,g(\xi))g'(x)]\varphi_2(x)-v(x,y;\xi,g(\xi))g'(\xi)\varphi_3\left(\xi\right)+v(x,y;\xi,g(\xi))\times$$
$$\times\beta(\xi,g(\xi))\varphi_1'(\xi)+v(x,y;\xi,g(\xi))\varphi_2'\left(\xi\right)\}d\xi. \quad (10)$$

Введем следующие обозначения:

$$A(x,y,\xi)=v_{\xi\xi}(x,y;\xi,g(\xi))+\alpha(\xi,g(\xi))v(x,y;\xi,g(\xi))-v_\xi(x,y;\xi,g(\xi))\times$$
$$\times\beta\left(\xi,g(\xi)\right)-v(x,y;\xi,g(\xi))\beta_\xi\left(\xi,g(\xi)\right)+\gamma(\xi,g(\xi))v(x,y;\xi,g(\xi)),$$
$$B(x,y,\xi)=v_\xi(x,y;\xi,g(\xi))+v(x,y;\xi,g(\xi))\beta(\xi,g(\xi))g'(x),$$

Тогда из (10) имеем:

$$\int_A^B\{[A(x,y,\xi)\varphi_1(\xi)+B(x,y,\xi)\varphi_2(\xi)-v(x,y;\xi,g(\xi))g'(\xi)\varphi_3\left(\xi\right)+$$
$$+v(x,y;\xi,g(\xi))\beta(\xi,g(\xi))\varphi_1'(\xi)+v(x,y;\xi,g(\xi))\varphi_2'\left(\xi\right)\}d\xi. \quad (11)$$

Рассмотрим участок

$$BC:\eta=y,d\eta=0,\ d\eta=g'(\xi)d\xi,x\le\xi\le g^{-1}(y),$$
$$-\int_B^C[v_{\xi\xi}(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)+\alpha(\xi,\eta)v(x,y;\xi,\eta)]\Big|_{\eta=y}d\xi=-\int_B^C[v_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)+$$
$$+\alpha(\xi,y)v(x,y;\xi,y)]u(\xi,y)d\xi=0,$$

наложим функции $v(x,y;\xi,\eta)$ условию:

$$v_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)+\alpha(\xi,y)v(x,y;\xi,y)=0. \tag{12}$$

Рассмотрим

$$CA:\xi=x,\ d\xi=0, g(x)\le\eta\le y,$$

$$-\int_C^A[v(x,y;\xi,\eta)u_{\xi\eta}(\xi,\eta)-v_\xi(x,y;\xi,\eta)u_\eta(\xi,\eta)+v(x,y;\xi,\eta)\beta(\xi,\eta)u(\xi,\eta)-$$
$$-(v(x,y;\xi,\eta)\beta(\xi,\eta))_\xi u(\xi,\eta)+\gamma(\xi,\eta)v(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)]\Big|_{\xi=x}d\eta=$$
$$=-\int_C^A[v(x,y;\xi,\eta)u_{\xi\eta}(\xi,\eta)-(v_\xi(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta))_\eta+v_{\xi\eta}(\xi,\eta)u(\xi,\eta)+$$
$$+v(x,y;\xi,\eta)\beta(\xi,\eta)u(\xi,\eta)-\beta(\xi,\eta)v_\xi(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)-\beta_\xi(\xi,\eta)\times$$
$$\times v(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)+\gamma(\xi,\eta)v(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)]\Big|_{\xi=x}d\eta=-v_\xi(x,y;x,y)\times$$
$$\times u(x,y)+v(x,y;x,g(x))u(x,g(x))=-u(x,y)+v_\xi(x,y;x,g(\xi))\varphi_1(\xi). \tag{13}$$

Здесь мы учли следующие свойства функции $v(x,y;\xi,\eta)$:

$$v(x,y;\xi,\eta)]\Big|_{\xi=x}=0, v_\xi(x,y;x,y)]\Big|_{\xi=x}=1,$$

$$v_{\xi\eta}(x,y;x,\eta)-\beta(x,\eta)v_\xi(x,y;x,\eta)=0,\ v_\xi(x,y;x,\eta)=\exp\left(\int_y^\eta[\beta(x,\eta_1)d\eta_1\right).$$

Из (11), (12), (13) получим представления решения задачи Коши в виде:

$$u(x,y)=v_\xi(x,y;x,g(\xi))\varphi_1(\xi)+\int_A^B\{[A(x,y,\xi)\varphi_1(\xi)+B(x,y,\xi)\varphi_2(\xi)-$$
$$-v(x,y;\xi,g(\xi))g'(\xi)\varphi_3(\xi)+v(x,y;\xi,g(\xi))\beta(\xi,g(\xi))\varphi_1'(\xi)+$$
$$+v(x,y;\xi,g(\xi))\varphi_2'(\xi)\}d\xi-\iint_D v(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{14}$$

где $v(x,y;\xi,\eta)$ - функция Римана, удовлетворяет условиям:

$v(x,y), v_x(x,y), v_y(x,y), v_{xx}(x,y)\in C(\bar{D}), v_{xxy}(x,y)\in C(D),$ по совокупности переменных $v(x,y;\xi,\eta)$ решение сопряженной задачи;

$$\begin{cases} L^*(v)=-v_{xxy}-(\alpha v)_y+(\beta v)_{xx}-(\gamma v)_x+\delta v, \\ v(x,y;\xi,\eta)\Big|_{\xi=x}=0, v_\xi(x,y;x,\eta)=\exp(\int_y^\eta\beta(x,\eta_1)d\eta_1), \\ v(x,y;\xi,\eta)\Big|_{\eta=y}=\omega(x,y,\xi), \end{cases} \tag{15}$$

где $\omega(x,y,\xi)$ - решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} v_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)-\alpha(\xi,y)v(x,y;\xi,y)=0, \\ v(x,y;\xi,y)\Big|_{\xi=x}=0, v_{\xi}(x,y;\xi,y)\Big|_{\xi=x}=1. \end{cases} \tag{16}$$

Найдя функцию $v(x,y;\xi,\eta)$ из задачи (15), (16) и поставляя ее в (14) получим решение задачи (1)-(5). Таким образом справедлива

Теорема. Если выполняются условий (2)-(5) и $\forall x \in [y=g(x)]$:

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x) \in C^2[y=g(x)]$, то в области D решение задачи Коши существует, единственно и представимо (14).

Пример. На монотонной кривой $y=g(x)$ рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$L(u)=u_{xxy}+cu=f(x,y), \tag{17}$$

с условиями, заданными вдоль кривой $y=g(x)$:

$$u\Big|_{y=g(x)}=\varphi_1(x),\ u_y\Big|_{y=g(x)}=\varphi_2(x),\ u_{yy}\Big|_{y=g(x)}=\varphi_3(x), \tag{18}$$

Для получения представления решения задачи (19), (20) мы сначала построим функцию Римана $v(x,y;\xi,\eta)$, как решение следующей сопряженной задачи

$$\begin{cases} L(v)=v_{\xi\xi\eta}+cv=0, \\ v(x,y;x,\eta)=0, v_{\xi}(x,y;x,\eta)\Big|_{\eta=y}=1,\ v(x,y;\xi,y)=\omega(x,y,\xi), \end{cases} \tag{19}$$

где $\omega(x,y,\xi)$ - решение следующей задачи Коши

$$\begin{cases} v_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)=0, \\ v(x,y;\xi,y)\Big|_{\xi=x}=0,\ v_{\xi}(x,y;\xi,y)\Big|_{\xi=x}=1. \end{cases} \tag{20}$$

Интегрируя уравнение $v_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)=0$ дважды по ξ в пределах от x до ξ и учитывая свойства функции, получим:

$$v(x,y;\xi,y)=\xi-x, \tag{21}$$

тогда из (21) будем иметь следующее интегральное уравнение

$$v(x,y;\xi,\eta)=\xi-x-c\int_x^{\xi}d\xi_1\int_{\eta}^{y}(\xi-\xi_1)v(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)d\eta_1. \tag{22}$$

Решение уравнения (22) найдем методом последовательных приближений [9]:

$v=v_0+\lambda v_1+\lambda^2 v_2+\ldots+\lambda^n v_n+\ldots,$

где $\lambda -$ действительный параметр.

Тогда из (19) последовательно будем определять $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$.

Например, $v_0=\xi-x,\ v_1=-\dfrac{2}{3!}c(\xi-x)^3(\eta-y).$ Аналогичным образом найдем $v_2, v_3, \ldots$.

Тогда в конечном итоге получим следующую функцию Римана:

$$v(x,y;\xi,\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n(-1)^n c^n}{n!(2n+1)!}(\xi-x)^{2n+1}(\eta-y)^n. \qquad (23)$$

Нетрудно проверить, что функция (23) удовлетворяет всем условиям задачи (19), (20).

Тогда из представления (14) будем иметь:

$$u(x,y)=v_{\xi}(x,y;x,g(x))\varphi_1(x)+\int_A^B\{v_{\xi\xi}(x,y;\xi,g(\xi))\varphi_1(\xi)a-$$

$$-v_{\xi}(x,y;\xi,g(\xi))\varphi_2(\xi)-v(x,y;\xi,g(\xi))\varphi_3(\xi)a+v(x,y;\xi,g(\xi))\varphi_2'(\xi)\}d\xi-$$

$$-\iint_D v(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta, \qquad (24)$$

В заключение отметим, что задачи, рассмотренные в [7, 8] методом функции Римана, могут быть обобщены для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа третьего порядка.

Вывод. Легко увидеть, что значение этого решения в некоторой точке $C(x,y)$ вовсе не зависит от данных Коши вне криволинейного треугольника ABC, образованного двумя характеристиками, проведенными через эту точку, и кривой, несущей начальные данные. Если мы будем менять данные вне этого криволинейного треугольника, то решение будет меняться лишь вне этого криволинейного треугольника. Таким образом, каждая характеристика будет отделять область, где решение осталось неизменным, от той области, где оно изменилось. Исходя из этого мы приходим к следующему выводу: к данному решению задачи, зафиксированному внутри криволинейного треугольника ABC, можно присоединять вдоль характеристики, вообще говоря, различные решения, являющиеся его продолжением.

Таким образом, характеристики – это суть линии, вдоль которых можно разрезать область существования решения, если мы хотим в некоторых частях этой области заменить одно решение другим так, чтобы при этом снова получать решения уравнения во всей области. Это важное свойство характеристик тесно связано с тем, что при произвольных начальных данных, заданных на характеристиках, задача Коши, вообще говоря, неразрешима. Для всякой другой кривой линии, зная решения по одну сторону кривой линии, мы могли бы найти значения решения и его производных на этой кривой линии и решить задачу Коши по другую сторону кривой линии.

Таким образом, для всякой не характеристическую кривой линии решение уравнения продолжается однозначно.

Литература:

1. Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференциальные уравнения. - 1982. - Т. 18. - № 4. - С. 689-699.
2. Шхануков М.Х. Об одном методе решения краевых задач для уравнений третьего порядка. // Доклады АН СССР. - 1982. - Т. 265. - № 6. - С. 1327-1330.
3. Сопуев А. Краевые задачи для уравнений четвертого порядка и уравнений смешанного типа: Дисс.… д.ф.-м.н.: 01.01.02. - Бишкек, 1996. – 249 с.
4. Асылбеков Т.Д. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка: Дис. … канд. физ. –мат. наук: 01.01.02. -Б ишкек, 2003. - 130 с.
5. Асылбеков Т.Д., Нуранов Б.Ш., Таалайбеков Н.Т. Нелокальные краевые задачи типа Бицадзе-Самарского для гиперболического уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами // Республиканский научно-теоретический журнал Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. - Бишкек, 2019. - №3. - С. 11-17.
6. Асылбеков Т.Д., Нуранов Б.Ш., Таалайбеков Н.Т. Нелокальные краевые задачи с интегральными условиями для модельного гиперболического уравнения четвертого с трехкратными характеристиками // Республиканский научно-теоретический журнал Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2019. - №3. - С. 22-29.
7. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т.2. - Москва - Ленинград: ГИТТЛ, 1951. - 544 с.
8. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло и массопереноса. – Москва-Ленинград: Госэнергоиздат, 1963. - 536 с.