DOI:10.26104/NNTIK.2023.14.58.005

Канетова Д.Э.

БИР КАЛЫПТУУ ФИНАЛДУУ КОМПАКТУУ МЕЙКИНДИКТЕР

Канетова Д.Э.

РАВНОМЕРНО ФИНАЛЬНО КОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

D. Kanetova

UNIFORMLY FINALLY COMPACT SPACES

УДК: 515.12

Финалдуу компактуу топологиялыкмейкиндиктер теориялык-көптүктүк топологияда маанилүү орундуу орунду ээлейт. Алар компактуу топологиялык мейкиндиктердин бир тутумун түзүшөт. Бул класстардын бир калыптуу аналогдорун табуу бир калыптуу топологиянын маанилүү жана кызыктуу маселеси болуп саналат. Финалдуу компактуу мейкиндиктердин бир калыптуу аналогдорун аныктоодо финалдуу компактуу топологиялык мейкиндиктер жөнүндөгү жөнөкөй лемма маанилүү ролду ойнойт, топологиялык мейкиндик финалдуу компактуу болот качан гана анын ар бир чектүү аддитивдүү ачык жабдуусуна санактуу ачык жабдууну ичтен сызууга мүмкүн болсо.Бул илимий макалада бир калыптуу финалдуу компактуу бир калыптуу мейкиндиктер түшүнүгү киргизилген жана изилденген. Компактуу кеңейүүлөрдүн жана чагылдыруулардын жардамы аркылуу бир калыптуу финалдуу компактуу мейкиндиктердин мүнөздөмөлөрү тургузулган.

Негизги сөздөр: *бир калыптуу финалдуу компактуулук, чектүү аддитивдүү ачык жабдуу, санактуу ачык жабдуу, бир калыптуу мейкиндик, бир калыптуу үзгүлтүксүз чагылдыруу.*

Финально компактные топологические пространства занимают важное место в теоретико-множественной топологии. Они составляют один из ветвей компактных топологических пространств. Нахождение и исследование равномерных аналогов этих классов пространств является важной и интересной задачей равномерной топологии. При определении равномерно финально компактного пространства важную роль играет простая топологическая лемма о финальной компактности топологического пространства, так, топологическое пространство является финально компактным тогда и только тогда, когда в каждое его конечно аддитивное открытое покрытие можно вписать счетное открытое покрытие. В настоящей статье вводятся и изучаются равномерно финально компактные пространства. Устанавливаются характеристики финально компактных равномерных пространств при помощи компактных расширений и отображений.

Ключевые слова:*равномерная финальная компактность, конечно аддитивное открытое покрытие, счетное открытое покрытие, равномерное пространство, равномерно непрерывное отображение.*

Finally compact topological space occupy an important place in set-theoretic topology. They constitute one of the branches of compact topological spaces. Finding and studying uniform analogs of these classes of spaces is an important and interesting problem in uniform topology. When determining the uniformly finally compact uniform space, an important role is played by a simple topological lemma on the finally compact topological space, a topological space is called finally compact if every finitely additive open cover has a countable open refinement. In this article introduces and studies uniformly finally compact uniform spaces. The characteristics of the uniformly finally compact uniform spaces are established using compact extensions and mappings.

Key words: *uniformly finally compactness, finite additive open covering, countable open covering, uniform space, uniformly continuous mapping.*

Если α и β - два покрытия множества X, то покрытие $\alpha \wedge \beta = \{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}$ называют структурным пересечением α и β. Если α - семейство подмножеств множества X и $M \subset X$ - подмножество, то множество $\alpha(M) = \cup St(\alpha, M)$, где $St(\alpha, M) = \{A \in \alpha : A \cap M \neq \varnothing\}$, называют звездой M относительно семейства α, если $M = \{x\}$, то вместо $\alpha(\{x\})$ просто пишут $\alpha(x)$. Говорят, что α вписано в β, если для каждого $A \in \alpha$ найдется $B \in \beta$ такое, что $A \subset B$ и обозначается $\alpha \succ \beta$, говорят, что α сильно звездно вписано в β, если для каждого $A \in \alpha$ найдется $B \in \beta$ такое, что $\alpha(A) \subset B$ и обозначается $\alpha * \succ \beta$. Если $\alpha^{\angle} = \alpha$, $\alpha^{\angle} = \{\cup \alpha_0 : \alpha_0 \subset \alpha$ - конечное$\}$, то α называют конечно аддитивным [2], [8]. Равномерно непрерывное отображение $f : (X, U) \to (Y, V)$ между равномерными пространствами (X, U) и (Y, V) называется предкомпактным, если для каждого $\beta \in V$ найдутся $\beta \in V$ и конечное $\gamma \in U$ такие, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$ [2], [14]. Если для любого $y \in Y$ прообраз $f^{-1}y$ компактен и образ каждого замкнутого множества замкнут, то непрерывное отображение $f : X \to Y$ между топологических пространств (X, U) и (Y, V) называется совершенным [1]. Одновременно предкомпактное и совершенное в топологическом смысле равномерно непрерывное отображение $f : (X, U) \to (Y, V)$ между равномерными пространствами (X, U) и

(Y,V) называется равномерно совершенным [2],[14]. Топологическое пространство X называется финально компактным, если каждое его открытое покрытие содержит счетное подпокрытие [1].

Пространство (X,U) будем говорить равномерно финально компактным пространством, если в любое его конечно аддитивное открытое покрытие можно вписать счетное равномерное покрытие.

Предложение 1. Если (X,U) равномерно финально компактно, то тихоновское пространство (X,τ_U) является финально компаткным, обратно, если тихоновское пространство (X,τ) является финально компактным, то (X,U_X) с универсальной равномерностью U_X будет равномерно финально компактным.

Доказательство. Для открытого покрытие α пространства (X,τ_U) составим его укрупнение $\alpha^{\angle}$. Согласно условие для покрытия $\alpha^{\angle}$ пространства (X,U) найдется вписанное в $\alpha^{\angle}$ счетное покрытие $\beta \in U$. Через $\langle\beta\rangle$ обозначим внутренность покрытия β, оно будет равномерным. Пусть $\gamma = \langle\beta\rangle$. Очевидно, что $\gamma \in U$ - счетное покрытие (X,U). Для любого $\Gamma \in \gamma$ найдется $A_\Gamma \in \alpha^{\angle}$ такое, что $\Gamma \subset A_\Gamma$, $A_\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \in \alpha$, $i = 1,2,...,n$. Положим $\alpha_0 = \cup\{\alpha_\Gamma : \Gamma \in \gamma\}$, $\alpha_\Gamma = \{\Gamma \cap A_i : i = 1,2,...,n\}$. α_0 является счетным открытым покрытием топологического пространства (X,τ_U), которое вписано в α. Поэтому (X,τ_U) является равномерно финально компактным.

Теперь, пусть (X,τ) - равномерно финально компактное тихоновское пространство. Как известно, все открытые покрытия образует базу универсальной равномерности U_X тихоновского пространства (X,τ). Далее легко показать, что пространство (X,U_X) с универсальной равномерностью U_X есть равномерно финально компактным.

Теорема 1. Пусть (X,U) - равномерное пространство, bX - его некоторая компактификация. Пространство (X,U) является равномерно финально компактным в том и только том случае, если для каждого компакта $K \subset bX \setminus X$ найдется счетное покрытие $\alpha \in U$ такое, что $[A]_{bX} \cap K = \varnothing$ для каждого $A \in \alpha$.

Доказательство. Рассмотрим равномерно компактное пространство (X,U) и некоторый компакт $K \subset bX \setminus X$ лежащий в наросте. Для любого $x \in X$ найдется открытая в bX окрестность O_x такая, что $[O_x]_{bX} \cap K = \varnothing$. Система $\gamma = \{O_x \cap X : x \in X\}$ является открытым покрытием. Рассмотрим покрытие $\gamma^{\angle}$. Тогда покрытие $\gamma^{\angle}$ будет конечно аддитивным для пространства (X,U). По условию в $\gamma^{\angle}$ можно вписать счетное покрытие $\beta \in U$, т.е. $\beta \succ \gamma^{\angle}$, поэтому $[B]_{bX} \subset [\cup \bigcup_{i=1}^{n}(O_{x_i} \cap X)]_{bX} \subset \bigcup_{i=1}^{n}[O_{x_i}]_{bX}$. Из $[O_{x_i}]_{bX} \cap K = \varnothing$, $i = 1,2,...,n$ следует, что $[B]_{bX} \cap K = \varnothing$, $B \in \beta$.

Достаточность. Выберем конечно аддитивное открытое покрытие α пространства (X,U). Найдется семейство β в bX такое, что $\beta \wedge \{X\} = \alpha$. Пусть $K = bX \setminus \cup\beta$. Тогда K - компакт. Пусть $\gamma \in U$ такое счетное покрытие, что $[\Gamma]_{bX} \cap K = \varnothing$, $\Gamma \in \gamma$. Из компактности $[\Gamma]_{bX}$ в bX вытекает, что найдутся такие конечные $B_1, B_2, ..., B_n \in \beta$, что $[\Gamma]_{bX} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, поэтому $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \alpha$. Следовательно, (X,U) - равномерно финально компактно.

Теорема 2. Для равномерного пространства (X,U) и его Стоун-Чеховской компактификации βX следующие утверждения эквивалентны:

(i) (X,U) - равномерно финально компактно.

(ii) Для компакта $K \subset \beta X \setminus X$ существует счетное $\{B_i\} \in U$ такое, что $[B_i]_{\beta X} \cap K = \varnothing$, $i \in I$.

(iii) Для любого открытого множества $G \subset \beta X$ такого, что $G \supset X$, существует такое счетное семейство $\{F_i\}$ состоящее из замкнутых множеств в βX, что $X \subset \cup\langle F_i\rangle \subset \cup F_i \subset G$ и $\{F_i \cap X\}$ является счетным равномерным покрытием (X,U).

(iv) Для любого открытого множества $G \subset \beta X$, такого, что $G \supset X$, существует такое открытое в βX покрытие $\{Q_i\}$, что $X \subset \cup Q_i \subset \cup[Q_i] \subset Y$ и семейство $\{Q_i \cap X\}$ есть счетное равномерное покрытие (X,U).

(v) Для любого компакта $K \subset bX \setminus X$ существует семейство $\{N_i\}$ открытых в βX множеств такое, что $K \subset \cap N_i \subset \cap[N_i] \subset \beta X \setminus X$ и $\{(\beta X \setminus N_i) \cap X\} = \{X \setminus N_i\}$ есть счетное равномерное покрытие (X,U).

Доказательство. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ очевидно.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Пусть $G \subset \beta X$ - такое открытое множество, что $G \supset X$, поэтому $\beta X \setminus G = K$ компактно и $K \subset \beta X \setminus X$. Существует счетное покрытие $\{B_i\} \in U$ такое, что $[B_i] \cap K = \varnothing$ для всех $i \in I$, поэтому $[B_i] \subset \beta X \setminus K$ для всех $i \in I$, следовательно, $X \subset \cup B_i \subset \langle [B_i] \rangle \subset \cup [B_i] \subset \beta X \setminus K$. Пусть $F_i = [B_i]$. Тогда $X \subset \cup\langle F_i\rangle \subset \cup F_i \subset \beta X \setminus K = G$. Ясно, что $F_i \cap X = [B_i]_X$. Покрытие $\{B_i\}$ является счетным, поэтому и семейство $\{F_i \cap X\} = \{[B_i]_X\}$ является счетным. Покрытие $\{B_i\} \in U$ вписано в покрытие $\{[B_i]_X\}$ поэтому, $\{F_i \cap X\} = \{[B_i]_X\} \in U$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Пусть $K \subset \beta X \setminus X$ и $G = \beta X \setminus K$. Тогда $G \subset \beta X$ - открытое и $X \supset G$. Найдется замкнутая система $\{F_i\}$ в βX $X \subset \cup\langle F_i\rangle \subset \cup F_i \subset G$ и $\{F_i \cap X\} \in U$ счетное. Положим $Q_i = \langle F_i\rangle \cap X$. Легко видеть, что $\{B_i\} \in U$ является счетным покрытием и $[B_i] \cap K = \varnothing, i \in I$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Пусть G такое открытое в βX множество, что $G \supset X$. Найдется замкнутая система $\{F_i\}$ в βX, что $X \subset \cup\langle F_i\rangle \subset \cup F_i \subset G$ и $\{F_i \cap X\} \in U$ является счетным. Заметим, что $\langle F_i\rangle \subset [\langle F_i\rangle] \subset F_i$. Положим $Q_i = \langle F_i\rangle$, следовательно, $\{Q_i\}$ искомое покрытие.

$(iv) \Rightarrow (iii)$ следует из справедливости включение $Q_i \subset \langle [Q_i] \rangle \subset [Q_i]$ для открытого множества Q_i в βX

$(iii) \Rightarrow (v)$. Рассмотрим компакт $K \subset \beta X \setminus X$. Положим $G = \beta X \setminus K$. Тогда $G \subset \beta X$ открыто и $G \supset X$. Пусть $\{F_i\}$ такое семейство замкнутых множеств в βX, что $X \subset \cup\langle F_i\rangle \subset \cup F_i \subset G$ и $\{F_i \cap X\} \in U$ счетное покрытие. Пусть $N_i = \beta X \setminus F_i, i \in I$. Тогда для открытого $\{N_i\}$ в βX семейства $K \subset \cap N_i \subset \cap[N_i] \subset \beta X \setminus X$. Легко видеть, что $\{(\beta X \setminus N_i) \cap X\} = \{X \setminus N_i\} \in U$ счетное покрытие.

Если структура U содержит счетное покрытие, состоящее из компактов, то (X,U) называется сильно равномерно локально компактными.

Теорема 3. Каждый сильно равномерно локальный компакт равномерно финально компактен.

Доказательство. Если $\beta \in U$ - счетное покрытие, состоящее из компактов, то оно вписано в некоторое конечно аддитивное открытое покрытие α, т.е. $\beta \succ \alpha$.

Следствие 1. Каждый компакт равномерно финально компактен.

Предложение 2. Если (X,U) - равномерно финально компактно и M - замкнутое подпространство, то M также является равномерно финально компактным.

Доказательство. Выберем некоторое конечно аддитивное открытое покрытие γ подпространства M, через $\hat{\gamma}$ обозначим открытое покрытие (X,U), которое состоит из γ и $X \setminus M$. Ясно, что открытое покрытие $\hat{\gamma}$ конечно аддитивное. Пусть $\beta \in U$ такое счетное покрытие, которое вписано в $\hat{\gamma}$. Через β_M обозначим след покрытия β на M. Тогда $\beta_M \in U_M$ и оно вписано в γ. Ясно, что β_M - счетное покрытие, следовательно, M является равномерно финально компактным.

Предложение 3. Сумма $(\coprod_{n\in N} X_n, \coprod_{n\in N} U_n)$ счетного числа равномерно финально компактных пространств (X_n, U_n) снова является равномерно финально компактным.

Доказательство. Пусть $\{(X_n, U_n) : n \in N\}$ - семейство равномерно финально компактных пространств (X_n, U_n), $(\coprod_{n\in N} X_n, \coprod_{n\in N} U_n)$ - сумма равномерных пространств и α - произвольное конечно аддитивное открытое покрытие пространства $(\coprod_{n\in N} X_n, \coprod_{n\in N} U_n)$. Семейство $\beta = \{X_n \cap A : n \in N, A \in \alpha\}$ есть конечно аддитивное открытое покрытие $(\coprod_{n\in N} X_n, \coprod_{n\in N} U_n)$, вписанное в α. Для любого $n_0 \in N$ семейство $\beta_{n_0} = \{X_{n_0} \cap A : n_0 \in N, A \in \alpha\}$ будет конечно аддитивным открытым покрытием (X_{n_0}, U_{n_0}). Тогда можно выбрать такое счетное покрытие $\gamma_{n_0} \in U_{n_0}$, которое вписано в β_{a_0}. Пусть γ такое семейство, которое является счетным объединением всех семейств γ_a, $a \in M$. Тогда $\gamma \in \coprod_{a\in M} U_a$ счетное покрытие и $\gamma \succ \alpha$.

Следующая теорема доказывает, что равномерная финальная компактность сохраняется в сторону прообраза при равномерно совершенных отображениях.

Теорема 4. Пусть $f : (X,U) \to (Y,V)$ отображение между равномерными пространствами (X,U) и (Y,V) является равномерно совершенным. Тогда, если (Y,V) равномерно финально компактно, то пространство (X,U) также равномерно финально компактно.

Доказательство. Рассмотрим конечно аддитивное открытое покрытие α (X,U). Семейство $\{f^{-1}y : y \in Y\}$ вписано в α. Тогда покрытие $\beta = f^{\#}\alpha = \{f^{\#}A : A \in \alpha\}$, $f^{\#}A = Y \setminus f(X \setminus A)$ будет открытым в (Y,V). Далее из элементов β составляем конечно аддитивное покрытие $\beta^{\angle}$. В него впишем счетное покрытие $\gamma \in V$. Ясно, что $f^{-1}\beta^{\angle} \succ \alpha$ и $f^{-1}\gamma$- счетное покрытие, следовательно, (X,U) равномерно финально компактно.

Пусть ω - открытое покрытие пространства X. Напомним [1], что непрерывное отображение $f : X \to Y$ между топологическими пространствами X и Y называется ω-отображением, если для каждого $y \in Y$ найдутся $O_y \ni y$ и $W \in \omega$ такие, что $f^{-1}(O_y) \subset W$.

Следующая теорема является характеристикой равномерно финально компактных пространств при помощи ω-отображений, аналогичная характеристика для финально компактных пространств дал В.И. Пономарев в работе [14].

Теорема 5. Пространство (X,U) равномерно финально компактно в том и только том случае, если для всякого конечно аддитивного открытого покрытия ω пространства (X,U) найдется равномерно непрерывное ω-отображение $f : (X,U) \to (Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на сепарабельно метризуемое равномерно финально компактное пространство (Y,V).

Доказательство. Необходимость. Пусть (X,U) - сепарабельно метризуемое равномерно финально компактное пространство и ω - любое конечно аддитивное покрытие. Тогда равномерно непрерывное отображение $i : (X,U) \to (X,U)$ обладает требуемым ω-отображением пространства (X,U) в сепарабельно метризуемое равномерно финально компактное пространство.

Достаточность. Выберем конечно аддитивное открытое покрытие ω пространства (X,U), тогда найдется ω-отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ (X,U) на сепарабельно метризуемое равномерно финально компактное пространство (Y,V). Для всякого $y\in Y$ укажем O_y такую, что $f^{-1}O_y\subset W$, $W\in\omega$. Пусть $\beta=\{O_y:y\in Y\}$. Составим укрупнение $\beta^{\angle}$ этого покрытия, которое составляется из элементов β. Впишем в него счетное покрытие $\gamma\in V$. Тогда $f^{-1}\gamma\succ\omega$, следовательно, (X,U) равномерно финально компактно.

Предложение 4. Произведение $(X,U)\times(Y,V)$ равномерно финально компактного пространства (X,U) на компакт (Y,V) равномерно финально компакатно.

Доказательство. Рассмотрим равномерные пространства (X,U) и (Y,V) , первое из них является равномерно финально компактным, а второе - компакт. Отображение проекция $\pi_X:(X,U)\times(Y,V)\to(X,U)$ равномерно совершенна. Последнее является ω-отображением $(X,U)\times(Y,V)$ на равномерно финально компактное пространство (Y,V) для всякого конечно аддитивного открытого покрытия ω произведения $(X,U)\times(Y,V)$, следовательно, произведение $(X,U)\times(Y,V)$ равномерно финально компактно.

Следствие 2. Произведение любого счетно дискретного равномерного пространства и любого компакта равномерно финально компактно.

Литература:

1. Александров, П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977. – 368 с.
2. Борубаев, А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. – Фрунзе: Илим, 1990. – 172 с.
3. Канетова, Д.Э. О μ-полноте топологических групп// Известия вузов Кыргызстана. – № 6. – 2017. – С. 11-14.
4. Канетов, Б.Э., Канетова, Д.Э., Байгазиева, Н.А. Об одном свойстве типа компактности равномерных пространств. // Вестник Института математики НАН КР. – № 1. – 2018. – С. 168-177.
5. Канетов, Б.Э., Канетова, Д.Э. Характеризация некоторых свойств тихоновских пространств // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына. – № 4 (96). – 2018. – С. 23-27.
6. Канетова, Д.Э. О полноте равномерных пространств // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына, Спецвып. – 2019. – С. 23-27.
7. Канетов, Б.Э. Сильно равномерно паракомпактные пространства // Изв. НАН КР. – 2012. – № 2. – С. 109-113.
8. Канетов, Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. – Бишкек, 2013. – 160 с.
9. Канетов Б.Э., Байгазиева Н.А. О сильно равномерно B-паракомпактных пространствах. // Известия ВУЗов Кыргызстана. 2017. - №. 6. - С. 6-10
10. Канетов Б.Э., Байгазиева, Н.А. Равномерно линделёфовы пространства. // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстан. – 2017. – № 7. – С. 27-33.
11. Келли Дж.Л. Общая топология. – М.: Наука, 1981. – 432 с.
12. Пономарев, В.И. О паракомпактных и финально-компактных пространствах // Докл. АН СССР. – 1961. – Т.141, № 3. – С. 561-563.
13. Rice M.D. A note on uniform paracompactness // Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – Vol. 62. – P. 359-362.
14. Borubaev, A.A. Uniform topology and its applications. – Bishkek: Ilim, 2021.
15. Kanetov B.E., Baigazieva N.A., Altybaev, N.I. About uniformly μ -paracompact spaces // International J. of Appl. Math. – 2021. – Vol. 34. P. 353-362.
16. Kanetov B., Baigazieva N. Strong uniform paracompactness // AIP Conference Proc. – 2018. – Vol. 1997. - P. 020085.
17. Kanetov B.E., Baidzhuranova A.M. On a uniform analogue of paracompact spaces // AIP Conference Proc. – 2019. – Vol. 2183. – P. 030009.
18. Kanetov B.E., Kanetova D.E., Altybaev N.I. On countably uniformly paracompact spaces // AIP Conference Proc. – 2020. – Vol. 2334. – P. 020011.
19. Kanetov B.E., Baidzhuranova A.M., Almazbekova B.A. About weakly uniformly paracompact spaces // AIP Conference Proc. – 2022. – Vol. 2483. – P. 020004.
20. Kanetov B.E., Saktanov U.A., Kanetova D.E. Some remainders properties of uniform spaces and uniformly continuous mappings // AIP Conference Proc. – 2019. – Vol. 2183. – P. 030011.
21. Kanetov B.E, Kanetova D.E., Zhanakunova M.O. On some completeness properties of uniform spaces // AIP Conference Proc. – 2019. – Vol. 2183. – P. 030010.