

[DOI:10.26104/NTTIK.2023.55.15.004](https://doi.org/10.26104/NTTIK.2023.55.15.004)

Канетова Д.Э.

БИР КАЛЫПТУУ ПАРАКОМПАКТУУ ЖАНА ТОЛУК
ЧАГЫЛДЫРУУЛАР ЖӨНҮНДӨ

Канетова Д.Э.

О РАВНОМЕРНО ПАРАКОМПАКТНЫХ И ПОЛНЫХ
ОТОБРАЖЕНИЯХ

D. Kanetova

ABOUT UNIFORMLY PARACOMPACT AND
COMPLETE MAPPINGS

УДК: 515.12

Ар бир бир калыптуу мейкиндикти бул бир калыптуу мейкиндикти бир чекиттүү бир калыптуу мейкиндикке болгон эң жөнөкөй бир калыптуу чагылдыруу катары кароого мүмкүн экени белгилүү. Натыйжаларды мейкиндиктерден чагылдырууларга жайылтуу ыкмасы универсалдуу болуп саналат. Бир калыптуу мейкиндиктердин жана бир калыптуу үзгүлтүксүз чагылдыруулардын теориясындагы көптөгөн түшүнүктөр жана натыйжалар мейкиндик учурунан бир калыптуу үзгүлтүксүз чагылдыруу учуруна жайылтылган. Ошондуктан бир калыптуу паракомпактуу жана толук мейкиндиктерди жана алардын айрым натыйжаларын чагылдырууларга жайылтуу маселеси актуалдуу. Бул илимий макалада бир калыптуу паракомпактуу чагылдыруулар киргизилип изилденет. Мындай чагылдырууларда Пасынковдун маанисиндеги бир калыптуу паракомпактуулук кайра элес жагына сакталуусу далилденет. Ошондой эле тихоновдук мейкиндик компактуу болот качан гана каралып жаткан топологиялык мейкиндиктин топологиясын пайда кылган каалагандай бир калыптуулук менен бир калыптуу мейкиндик толук болгондо гана делген фундаменталдуу натыйжа чагылдырууларга жайылтылган.

Негизги сөздөр: бир калыптуу үзгүлтүксүз чагылдыруулар, бир калыптуу паракомпактуу чагылдыруулар, толук чагылдыруулар, жабдуулар.

Известно, что каждое равномерное пространство можно рассматривать как простейшее равномерно непрерывное отображение этого равномерного пространства в одноточечное равномерное пространство. Метод перенесения результатов с пространств на отображения является универсальным. Многие понятия и утверждения теории равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений были перенесены со случая пространств на случай равномерно непрерывных отображений. Поэтому задача распространения равномерно паракомпактных и полных пространств и их некоторых утверждений на отображения является актуальной. В настоящей статье вводятся и исследуются равномерно паракомпактные отображения. В частности доказываемся, что при таких отображениях равномерная паракомпактность в смысле Б.А. Пасынкова сохраняется в сторону прообраза. Также, на отображения переносится фундаментальный результат, о том, что тихоновское пространство компактно тогда и только тогда, когда для всякой равномерности, согласующейся с топологией данного пространства, равномерное пространство с этой равномерности является полным.

Ключевые слова: равномерно непрерывные отображения, равномерно паракомпактные отображения, полные отображения, покрытия.

It is known that every uniform space can be considered as the simplest uniformly continuous mapping of this uniform space into one-point uniform space. The method of transferring results from spaces to mapping is universal. Many concepts and statements of the theory of uniform spaces and uniformly continuous mappings were transferred from the case of spaces to the case of uniformly continuous mappings. Therefore, the problem of extending uniformly paracompact spaces and this certain statements to mappings is relevant. In this paper, uniformly paracompact mappings are introduced and studied. In particular, it is proved that under such mappings, uniform paracompactness in the sense of Pasyonkov is preserved to the preimage. Also, the fundamental result is transferred to mappings, that a Tychonoff Space is compact if and only if uniform space with the uniformity induced by the topology is complete.

Key words: uniformly continuous mappings, uniform paracompact mappings, complete mappings, coverings.

Пусть (X, U) - равномерное пространство.

Пространство (X, U) называется равномерно паракомпактным в смысле Пасынкова пространством, если для всякого открытого покрытия $\alpha(X, U)$ существует равномерно σ -локально конечное открытое покрытие γ пространства (X, U) такое, что $\gamma \succ \alpha$.

Покрытие $\alpha(X, U)$ называется σ -локально конечным (в равномерном смысле!), если оно представляется в виде объединения счетного числа равномерно локально конечных семейств пространства (X, U) [21].

Пусть $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ - равномерно непрерывное отображение (X, U) в (Y, V) .

Определение 1. Отображение $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ пространства (X, U) в (Y, V) называется равномерно паракомпактным, если для каждого открытого покрытия $\alpha(X, U)$ найдутся такие открытое покрытие

β пространства (Y, V) и σ -локально конечное открытое покрытие (в равномерном смысле!) γ пространства (X, U) , что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$.

Отображение $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ пространства (X, U) в пространство (Y, V) называется равномерно R -паракомпактным, если для всякого открытого покрытия α пространства (X, U) существуют такое открытое покрытие β пространства (Y, V) и равномерно локально конечное открытое покрытие γ пространства (X, U) , что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$ [2].

Из определений равномерно R -паракомпактного отображения [2], [5] и определения 1 следует, что любое равномерно R -паракомпактное отображение будет равномерно паракомпактным, а обратное, не верно.

Лемма 1. Пусть λ и μ – σ -локально конечные открытые покрытия (в равномерном смысле!) пространства (X, U) , тогда внутреннее пересечение покрытий λ и μ также является σ -локально конечным открытым покрытием (в равномерном смысле!).

Доказательство. Рассмотрим λ и μ – σ -локально конечные открытые покрытия (в равномерном смысле!) пространства (X, U) . Положим $\lambda = \cup\{\lambda_i : i \in N\}$ и $\mu = \cup\{\mu_j : j \in N\}$. Тогда для любого λ_i и любого μ_j найдутся $\alpha_{\lambda_i} \in U$ и $\beta_{\mu_j} \in U$ такие, что любой член равномерного покрытия α_{λ_i} пересекается только с конечным числом элементов λ_i , и каждый элемент равномерного покрытия β_{μ_j} также имеет общий элемент конечного число элементов μ_j , т.е. найдутся $L_k^{\lambda_i} \in \lambda_i$ и $M_l^{\mu_j} \in \mu_j$ так, что $A_{\lambda_i} \subset \cup_{k=1}^n L_k^{\lambda_i}$ и $B_{\mu_j} \subset \cup_{l=1}^m M_l^{\mu_j}$. Тогда $A_{\lambda_i} \cap B_{\mu_j} \subset (\cup_{k=1}^n L_k^{\lambda_i}) \cap (\cup_{l=1}^m M_l^{\mu_j})$. Ясно, что $\alpha \wedge \beta \in U$ и $A_{\lambda_i} \cap B_{\mu_j} \in \alpha \wedge \beta$. Из включения $A_{\lambda_i} \cap B_{\mu_j} \subset (\cup_{k=1}^n L_k^{\lambda_i}) \cap (\cup_{l=1}^m M_l^{\mu_j})$ следует, что любой член $\alpha \wedge \beta$ пересекается только с конечным числом элементов $\lambda \wedge \mu$, поэтому $\lambda \wedge \mu$ будет σ -локально конечным (в равномерном смысле!).

Лемма 2. Если $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ – равномерно непрерывное отображение между пространствами (X, U) и (Y, V) и λ – равномерно σ -локально конечное открытое покрытие пространства (Y, V) , то прообраз $f^{-1}\lambda$ также будет σ -локально конечным открытым покрытием (в равномерном смысле!) пространства (X, U) .

Доказательство. Рассмотрим σ -локально конечное открытое покрытие (в равномерном смысле!) λ пространства (Y, V) . Положим $\lambda = \cup\{\lambda_i : i \in N\}$. Прообраз $f^{-1}\lambda$ покрытия λ является открытым покрытием пространства (X, U) . Докажем равномерную σ -локальную конечность покрытия λ . Поскольку покрытие λ σ -локально конечно, то для каждого λ_i найдется $\alpha_{\lambda_i} \in U$, что любой элемент $\alpha_{\lambda_i} \in U$ пересекается только с конечным числом членов λ_i т.е. найдутся $L_k^{\lambda_i} \in \lambda_i$, $A_{\lambda_i} \subset \cup_{k=1}^n L_k^{\lambda_i}$, поэтому $f^{-1}(A_{\lambda_i}) \subset f^{-1}(\cup_{k=1}^n L_k^{\lambda_i}) = \cup_{k=1}^n f^{-1}(L_k^{\lambda_i})$, $f^{-1}(A_{\lambda_i}) \in f^{-1}\alpha$, $f^{-1}(L_k^{\lambda_i}) \in f^{-1}\lambda_i$. Из включения что $f^{-1}(A_{\lambda_i}) \subset f^{-1}(\cup_{k=1}^n L_k^{\lambda_i}) = \cup_{k=1}^n f^{-1}(L_k^{\lambda_i})$ следует, что каждое $f^{-1}\lambda_i$ будет в равномерном смысле локально конечным семейством, значит, $f^{-1}\lambda$ семейства λ будет являться в равномерном смысле σ -локально конечным открытым покрытием.

Предложение 1. Любое равномерное отображение $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ равномерно паракомпактного пространства (X, U) в пространство (Y, V) является паракомпактным отображением в равномерном смысле.

Доказательство. Заметим, что если $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ - равномерно непрерывное отображение равномерно паракомпактного пространства (X, U) в пространство (Y, V) и α - некоторое открытое покрытие (X, U) , то существует σ -локально конечное открытое в равномерном смысле покрытие μ такое, что $\mu \succ \lambda$. Заметим, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma$ вписано в α для всякого $\beta (X, U)$. Таким образом, f - паракомпактное отображение в равномерном смысле.

Предложение 2. Если $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ - равномерное отображение между пространствами (X, U) и (Y, V) является паракомпактным в равномерном смысле отображением, где $Y = \{y\}$, то (X, U) является паракомпактным в равномерном смысле пространством.

Доказательство. Рассмотрим отображение $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ между равномерными пространствами (X, U) и (Y, V) является паракомпактным в равномерном смысле отображением, где $Y = \{y\}$ и λ - некоторое открытое покрытие пространства (X, U) . Возьмем σ -локально конечное открытое в равномерном смысле покрытие $\mu (X, U)$ и открытое покрытие $\eta (Y, V)$ такие, что $f^{-1}\eta$ с внутренним пересечением покрытия μ вписано в λ , т.е. $f^{-1}\mu \wedge \eta \succ \lambda$. Заметим, что $f^{-1}\mu \wedge \eta = \eta$. Итак, доказана равномерная паракомпактность пространства (X, U) .

Нижеследующая теорема показывает, что при равномерно паракомпактных отображениях паракомпактные в равномерном смысле свойства сохраняются в сторону прообраза.

Теорема 1. Пусть задано равномерно непрерывное отображение $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ между пространствами (X, U) и (Y, V) . Если пространство (Y, V) и отображение f равномерно паракомпактны, то тем же свойством обладает и равномерное пространство (X, U) .

Доказательство. Пусть (Y, V) и f - равномерно паракомпактны. Выберем некоторое открытое покрытие λ пространства (X, U) . В силу равномерной паракомпактности рассматриваемого отображения найдутся покрытие μ структуры (Y, V) и равномерно σ -локально конечное покрытие η структуры (X, U) , что $f^{-1}\eta$ с внутренним пересечением покрытия μ вписано в λ . Поскольку структура (Y, V) паракомпактна в равномерном смысле, то существует локально конечное открытое в равномерном смысле покрытие σ структуры (Y, V) такое, что $\sigma \succ \mu$. Тогда $f^{-1}\sigma \wedge \eta \succ f^{-1}\mu \wedge \eta$ и $f^{-1}\mu \wedge \eta \succ \lambda$. Через δ обозначим внутреннее пересечение покрытий $f^{-1}\sigma$ и η . Согласно лемме 2. δ будет σ -локально конечным открытым в равномерном смысле покрытием. Таким образом, (X, U) - равномерный паракомпакт.

Предложение 3. Ограничение $f|_{(X_0, U_{X_0})} : (X_0, U_{X_0}) \rightarrow (Y, V)$ равномерно паракомпактного отображения $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ на замкнутое подпространство (X_0, U_{X_0}) равномерно паракомпактное.

Доказательство. Рассмотрим паракомпактное в равномерном смысле отображение $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$, (X_0, U_0) - замкнутое подпространство (X, U) и некоторое открытое покрытие $\lambda_0 (X_0, U_{X_0})$. Выберем такую открытую систему η пространства (X, U) , что след покрытия η на X_0 есть λ_0 . Через λ обозначим, покрытие, состоящее из систем η и $X \setminus X_0$. Поскольку отображение f равномерно паракомпактное отображение, то найдутся открытое в (Y, V) покрытие μ и σ -локально конечное открытое в равномерном смысле в (X, U) покрытие δ такие, что покрытие $f^{-1}\mu$ с внутренним пересечением δ вписано в λ . Тогда покрытие $f_{X_0}^{-1}\mu$ с внутренним пересечением δ_0 вписано в λ_0 , где $f_{(X_0, U_0)}^{-1} = f^{-1}|_{X_0}$. Через δ_0 обозначим след покрытия δ на X_0 . Равномерно σ -локальную конечность открытого покрытия δ_0 пространства (X_0, U_0) легко устанавливается, значит, $f|_{(X_0, U_{X_0})}$ - паракомпактно в равномерном смысле.

Предложение 4. Пусть заданы равномерно паракомпактные отображения, $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ между

пространствами $(X, U), (Y, V)$ и $g : (Y, V) \rightarrow (Z, W)$ между пространствами $(Y, V), (Z, W)$. Тогда композиция $g \circ f : (X, U) \rightarrow (Z, W)$ отображений f и g является равномерно паракомпактным отображением.

Доказательство. Берем две $f : (X, U) \rightarrow (Y, V), g : (Y, V) \rightarrow (Z, W)$ равномерно паракомпактные отображения и открытое покрытие λ пространства (X, U) . Рассмотрим покрытие η пространства (Y, V) и σ -локально конечное открытое покрытие μ в равномерном смысле пространства (X, U) . Пусть $f^{-1}\eta \wedge \mu$ вписано в λ , а для открытого покрытия η укажем покрытие α пространства (Z, W) и σ -локально конечное открытое в равномерном смысле покрытие β (Y, V) такие, что $g^{-1}\alpha \wedge \beta$ вписано в η . Заметим, что внутреннее пересечений покрытий $(g \circ f)^{-1}\alpha, f^{-1}\eta$ и μ вписано λ . Согласно лемме 1. пересечение $f^{-1}\eta \wedge \mu$ является σ -локально конечным в равномерном смысле. Следовательно, композиция $g \circ f$ отображений f и g является равномерно паракомпактным отображением.

Хорошо известно, что тихоновское пространство X было компактным необходимо и достаточно, чтобы для всякой равномерности U в X , согласующейся с топологией пространства X , (X, U) было полным. В следующей теореме этот фундаментальный результат распространяется на отображения.

Через f обозначим непрерывное отображение топологического пространства (X, τ) в топологическое пространство (Y, μ) .

Теорема 2. Отображение f является совершенным необходимо и достаточно, чтобы для любых равномерностей U на X и V на Y таких, что $\tau_U = \tau$ и $\mu_V = \mu$ отображение $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ является полным.

Доказательство. Необходимость. Пусть задано совершенное отображение $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \mu)$ пространства (X, τ) в пространство (Y, μ) , а U и V равномерности на X и Y такие, что $\tau_U = \tau$ и $\mu_V = \mu$. Докажем полноту $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$. Рассмотрим в (X, U) фильтр Коши F такой, что fF имеет предел $y \in Y$. Поскольку отображение f совершенно, то $f^{-1}y$ компактно, следовательно, F имеет точку прикосновения $x \in f^{-1}y$, а в равномерном пространстве всякая точка прикосновения является предельной точкой поэтому, точка x является пределом фильтра Коши F , значит отображение f полно.

Необходимость. Пусть отображение $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ полно. Докажем, совершенность отображения $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \mu)$. Согласно утверждению 0.5.12 ([1], с.28) $f : (X, U_p) \rightarrow (Y, V_p), U_p$ - предкомпактная равномерность равномерной структуры U , а V_p - предкомпактная равномерность равномерной структуры V является равномерно непрерывным отображением и $\tau_U = \tau_{U_p} = \tau, \mu_V = \mu_{V_p} = \mu$. Очевидно, $f : (X, U_p) \rightarrow (Y, V_p)$ есть предкомпактное отображение, следовательно, согласно теореме 2.3.15. ([1], с.103) отображение $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ будет совершенным в равномерном смысле, следовательно, $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \mu)$ совершенное отображение.

Отображение $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ будем называть полным, если для каждого $y \in Y$ подпространство $(f^{-1}y, U_{f^{-1}y})$ является полным.

Предложение 5. Отображение $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \mu)$ является компактным необходимо и достаточно, чтобы для любых равномерностей U на X и V на Y таких, что $\tau_U = \tau$ и $\mu_V = \mu$ отображение $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ было полным.

Доказательство. Необходимость. Пусть отображение $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \mu)$ является компактным и U, V - такие равномерности на X, Y соответственно, такие, что $\tau_U = \tau$ и $\mu_V = \mu$. Покажем, что

$f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ является полным отображением. В силу компактности отображения f подпространство $f^{-1}y$ является компактным для всякого $y \in Y$, поэтому, для любого $y \in Y$ подпространство $(f^{-1}y, U_{f^{-1}y})$ является полным, следовательно, отображение $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ является полным.

Необходимость. Пусть $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ - полное отображение. Покажем, что $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \mu)$ является компактным отображением. Отображение $f : (X, U_p) \rightarrow (Y, V_p)$, где U_p - предкомпактная равномерность [1], [12] равномерности U , а V_p - предкомпактная равномерность [1], [12] равномерности V является равномерно непрерывным отображением. Отображение f является полным, поэтому $(f^{-1}y, U_{f^{-1}y})$ полно подпространство для всякого $y \in Y$. Подпространство $(f^{-1}y, U_{f^{-1}y})$ является предкомпактным, т.к. пространства (X, U_p) предкомпактно, следовательно, отображение $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \mu)$ является компактным.

Литература:

1. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. - Фрунзе: Илим, 1990.
2. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. - Бишкек: КНУ им. Ж.Баласагына, 2013.
3. Канетова Д.Э. О μ -полноте топологических групп. // Известия вузов Кыргызстана. – № 6. – 2017. – С. 11-14.
4. Канетова Д.Э. О полноте равномерных пространств. // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына. – Спец. вып. – 2019. – С. 23-27.
5. Канетов Б.Э. О равномерно паракомпактных отображениях. // Наука и новые технологии. - Бишкек, 2006. - № 4. - С.12-16.
6. Канетов Б.Э. О μ -полноте равномерных пространств. // Наука и новые технологии. - 2010. - № 9. - С. 3-7.
7. Канетов Б.Э. О μ -полноте равномерно непрерывных отображений. // Наука и новые технологии. – Бишкек, 2010. - № 9. - С. 16-19.
8. Канетов Б.Э. О равномерно линделёфовых пространствах. // Наука и новые технологии. - Бишкек, 2011. - № 8. - С.3-8.
9. Канетов Б.Э., Канетова Д.Э. Характеризация некоторых свойств тихоновских пространств // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – № 4 (96). – 2018. – С. 23-27.
10. Канетов Б.Э., Байгазиева Н.А. О сильно равномерно B -паракомпактных пространствах // Известия вузов Кыргызстана. – 2017. – № 6. – С. 6-10.
11. Канетов Б.Э., Байгазиева Н.А. Равномерно линделёфовы пространства. // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2017. – № 7. С. 27-33.
12. Borubaev A.A. Uniform topology and its applications. – Bishkek: Ilim, 2021.
13. Kanetov B., Kanetova D. Characterization of some types of compactness and a construction of index compactness $\leq \tau$ extensions by means of uniform structures. AIP Conf. Proc. – 2018. – Vol. 1997. – P. 020023.
14. Kanetov B.E., Baigazieva N.A., Altybaev N.I. About uniformly μ -paracompact spaces, International J. of Appl. Math. – 2021. Vol. 34. – P. 353-362.
15. Kanetov B.E., Baidzhuranova A.M. Paracompact-type mappings, Bull. of the Karaganda Univ. – 2021. – Vol. 2. P. 62-66.
16. Kanetov B., Baigazieva N. Strong uniform paracompactness, AIP Conference Proc. – 2018. – Vol. 1997. – P. 020085.
17. Kanetov B.E., Baidzhuranova A.M. On a uniform analogue of paracompact spaces, AIP Conf. Proc. – 2019. – Vol. 2183. – P. 030009.
18. Kanetov B.E., Kanetova D.E., Altybaev N.I. On countably uniformly paracompact spaces, AIP Conf. Proc. – 2020. – Vol. 2334. – P. 020011.
19. Kanetov B.E., Saktanov U.A., Kanetova D.E. Some remainders properties of uniform spaces and uniformly continuous mappings, AIP Conf. Proc. – 2019. – Vol. 2183. – P. 030011.
20. Kanetov B.E., Kanetova D.E., Zhanakunova M.O. On some completeness properties of uniform spaces, AIP Conf. Proc. – 2019. – Vol. 2183. – P. 030010.
21. Pasyukov B.A., Buhagiar D. On uniform paracompactness // Czech. Math. J. – 1996. – V. 46 (121). – P. 577- 586.