

DOI:10.26104/NTIK.2023.81.20.002

Калмурзаева А.Т., Ташполотов Т.Т.

ТЕГИЗДИКТЕГИ АГЫМДЫ МОДЕЛДЕШТИРҮҮДӨГҮ  
ЭСЕПТӨӨ КАТАЛАРДЫ ТАЛДОО

Калмурзаева А.Т., Ташполотов Т.Т.

АНАЛИЗ ОШИБОК ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ  
ПЛОСКОЙ СТРУИ

A. Kalmurzaeva, T. Tashpolotov

ANALYSIS OF CALCULATION ERRORS IN THE  
SIMULATION OF A PLANE FLOW

УДК: 532.546+532.55.1

Макалада математикалык моделдөө жыйынтыктары: кысылбаган илешектүү суюктуктун үч өлчөмдүү стационардык эмес агымын сандык моделдөөнүн натыйжалары, математикалык моделдин негизин Навье-Стокс теңдемелер системасы түзүлгөндүгү далилденди. Эсептөө жана негизги теңдемелердин чөйрөсүндө Дискретизация контролдук көлөмдөр методу менен жүргүзүлгөндүгүн баяндайт. Сандык эсептөө Мтчнын ачык пакетинин чегинде жүргүзүлдү. Контролдоо көлөмүнүн ыкмасы ката талдоо жүргүзүлгөндүгү, эркин чек аранын абалын көзөмөлдөө үчүн суюктуктун көлөмүнүн белгилүү методу колдонулуусу, ал ачык пакет чечүүчүсүндө имплементациялануусу, математикалык моделдин шайкештиги эксперименталдык маалыматтар менен салыштыруу аркылуу текшерилери айтылат. Ошондой эле (3.100) теңдемесиндеги диффузиялык мүчөнүн кесилиши катасынын бир тектүү торлордогу үчүнчү тартиптеги ылдамдык градиентине көз карандылыгы, ал эми болжолдуу ката экинчи тартиптеги градиентке көз карандыгы. Ката баалоочу тандоо ыкмасы так чечим чыгара турган жерлерде чоң каталарды алдын ала айтат.

**Негизги сөздөр:** үч, өлчөмдүү, агым, каверн, стационардык, контролдук көлөмдөр, ыкма, дискретизация.

В статье доказаны результаты математического моделирования: результаты количественного моделирования трехмерного нестационарного потока несжимаемой вязкой жидкости, в основе математической модели лежит система уравнений Навье-Стокса. В области вычислений и основных уравнений Дискретизация описывается методом контрольных величин. Количественный расчет проводился в рамках открытого пакета ECHP. Метод контрольного объема говорит о том, что был проведен анализ ошибок, что для контроля состояния свободной границы используется известный метод объема жидкости, который имплементируется в решателе открытых пакетов, что соответствие математической модели проверяется путем сравнения с экспериментальными данными. А также зависимость ошибки пересечения диффузионного члена в уравнении (3.100) от градиента скорости третьего порядка в однородных решетках, в то время как ошибка приближения зависит от градиента второго порядка. Оценщик ошибок предсказывает большие ошибки в тех местах, где метод выбора может дать точное решение.

**Ключевые слова:** три, размерный, поток, пещера, стационарный, контрольные объемы, метод, дискретизация.

The results of mathematical modeling: the results of quantitative modeling of a three-dimensional unsteady flow of an incompressible viscous fluid, the mathematical model is based on a system of Navier-Stokes equations. In the field of calculations and basic equations, Discretization is described by the method of control quantities. The quantitative calculation was carried out within the framework of the open package of the ECHP. The control volume method indicates that an error analysis was carried out, that the well-known liquid volume method is used to control the state of the free boundary, which is implemented in the open packet solver, that the compliance of the mathematical model is checked by comparison with experimental data. And also the dependence of the intersection error of the diffusion term in equation (3.100) on the velocity gradient of the third order in homogeneous lattices, while the approximation error depends on the gradient of the second order. The error estimator predicts large errors in places where the selection method can give an accurate solution.

**Key words:** three, dimensional, flow, cave, stationary, control volumes, method, sampling.

В этой тестовой задаче, жидкость входит в плоскую двумерную область через щель, расположенную в левом нижем углу расчетной области (рис. 1).

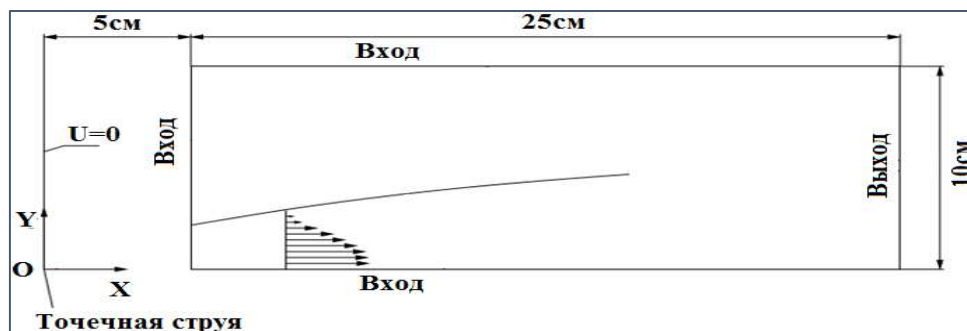


Рис. 1. Расчетная область решения и граничные условия для случая струи.

Вычислительная область и граничные условия, используемые для этой задачи показаны на рисунке 1. Решение уравнений Навье-Стокса описываемые данную задачу можно найти в [1, 2], оно получено при предположении о том, что поток несжимаем при равномерном давлении и небольшой скорости в поперечном направлении. Аналитическое решение для осевой скорости  $U_x$  имеет вид [1]:

$$U_x = \frac{A}{B} x^{-\frac{1}{3}} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{y}{B} x^{-\frac{2}{3}} \right) \quad (1)$$

а поперечная составляющая скорости потока  $U_y$  задается формулой:

$$U_y = -\frac{1}{3} A x^{-\frac{2}{3}} \tanh \left( \frac{y}{B} x^{-\frac{2}{3}} \right) + \frac{2A}{3B} y x^{-\frac{4}{3}} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{y}{B} x^{-\frac{2}{3}} \right) \quad (2)$$

где

$$A = \left( \frac{9}{2} \nu M_j \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3)$$

и

$$B = \left( \frac{48 \nu^2}{M_j} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4)$$

а  $M_j = U_0^2 h$  – это импульс струи. Значение  $M_j$ , используемое для расчетов, равно:

$$M_j = 0.1 [m^3/s^2] \quad (5)$$

а коэффициент кинематической вязкости равен:

$$\nu = 0.0012 \text{ м}^2/\text{с} \quad (6)$$

Границы расчетной области – левая, верхняя и нижняя границы рассматривались как входные. Скорости на этих границах задаются значениями аналитического решения. На правой границе области расположен выход, где задано условие равенства нулю динамического давления. Для дискретизации конвективного члена в уравнениях Навье-Стокса применена центрально-разностная схема – CD. Градиенты всех величин вычисляются по теореме Гаусса. Уравнение (1) имеет сингулярность в начале системы координат, поэтому, начало системы координат было перемещено вверх по течению на 5 см, для того чтобы исключить сингулярность уравнения (1) Следовательно, нижний левый угол расчетной области расположен в точке с координатами (0.05 м, 0 м), а верхний правый угол имеет координаты (0.3 м, 0.1 м).

Начальная равномерная сетка из десяти клеток в направлении потока и только четыре ячейки в направлении поперечного потока (рис. 2). Последующие сетки были построены путем уменьшения размера ячейки вдвое в обоих направлениях. В целях изучения качества оценки погрешности на сетках с различным размером ячеек, решения были получены на пяти различных сетках.

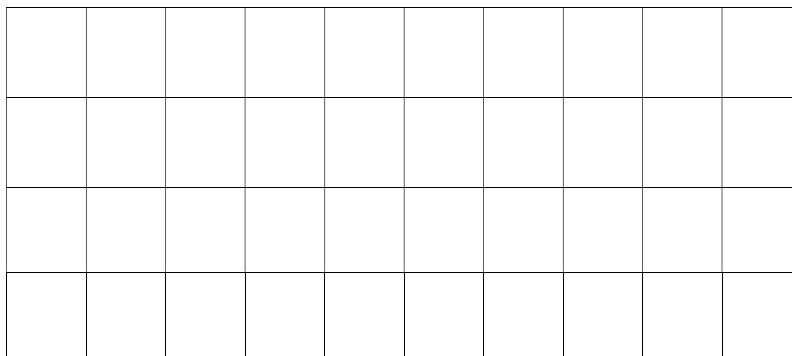


Рис. 2. Начальная расчетная сетка для плоской струи.

На рисунках 3 и 4 показаны поля вектора скорости и давления. Значения скорости и ее градиенты высоки в области, где струя входит в расчетную область, и уменьшаются ниже по течению из-за влияния диффузии.

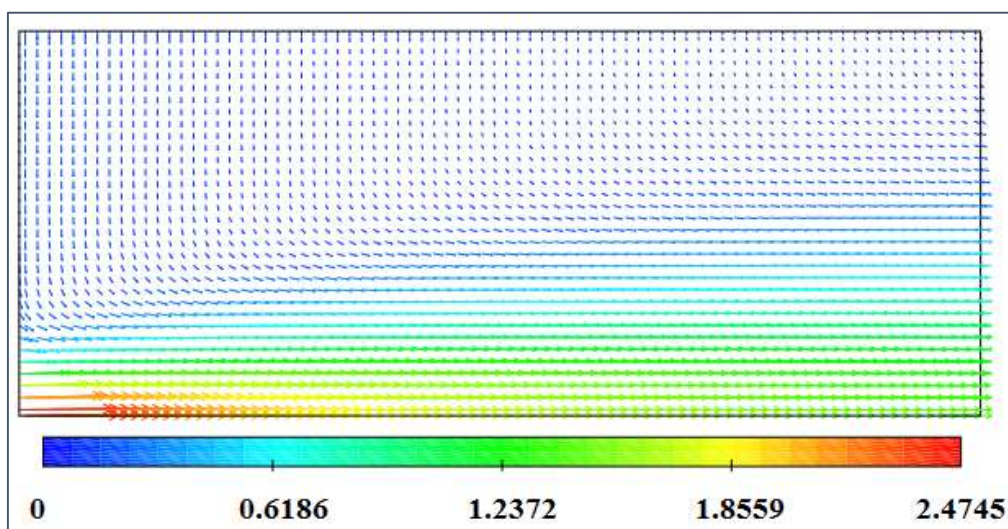


Рис. 3. Поле вектора скорости для сетки  $80 \times 32$ .

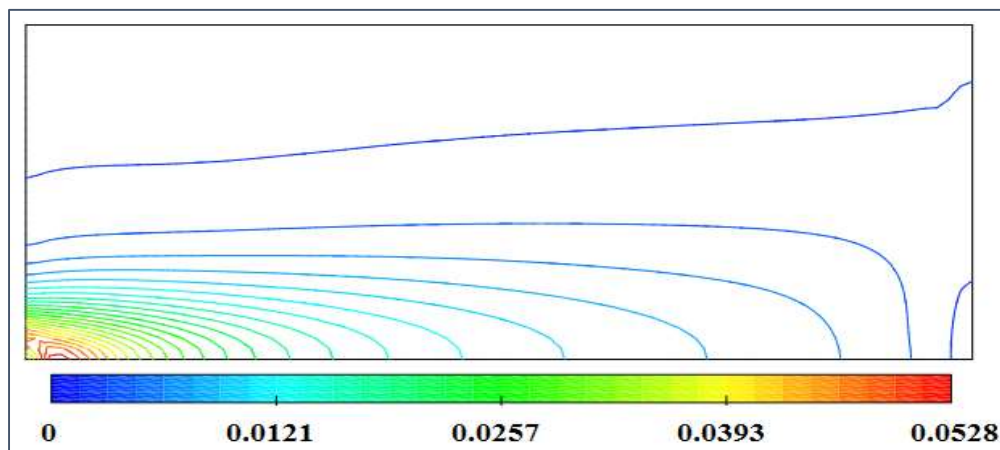
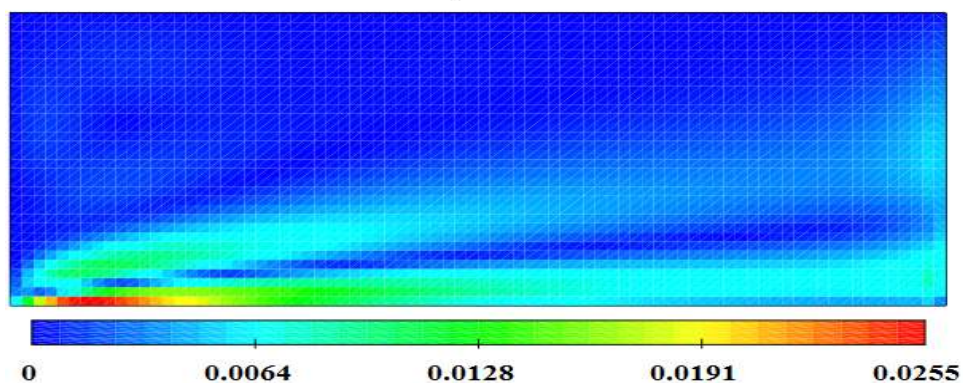


Рис. 4. Изобары давления для сетки  $80 \times 32$ .

На рисунке 4 показано, что поле давления неоднородно в пределах области, как предполагалось при выводе аналитического решения. Рисунок 5(а) представляет поле точной величины погрешности скорости на сетке  $80 \times 32$ . Наибольшая погрешность наблюдается вблизи входной области, где градиенты давления и скорости высоки.

а)



б)

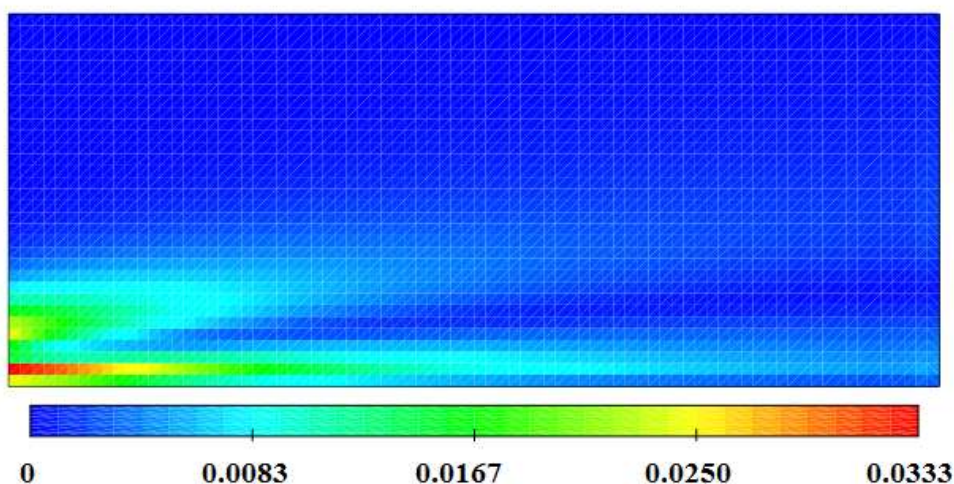
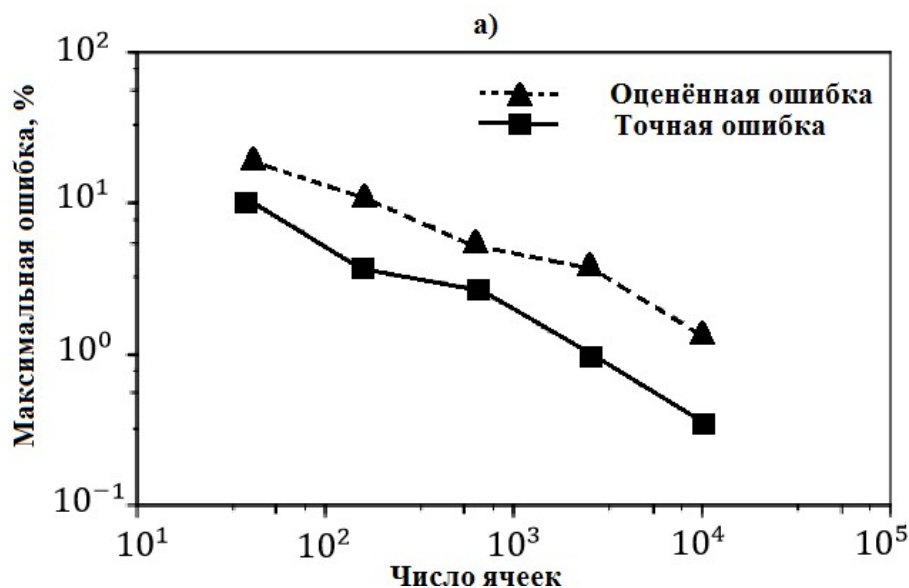


Рис. 5. Ошибки поля скорости.

Расчетная погрешность распределение, полученное с помощью оценщика - FREE, показано на рисунке 5(б). Места расположения больших и небольших ошибок находятся в умеренном согласии, потому что ошибка завышена. Максимальная ошибка поля скорости по методу FREE равна 0.0333, в то время как максимальная ошибка поля точной величины погрешности скорости равна 0.0255. Причинами такого различия в первую очередь является методы усреднения ошибок на грани по уравнению (1). Второй причиной различия является ошибки, допущенные при получении аналитического решения, а именно, пренебрежение градиентами давления. Рисунки 5(а) и 5(б)

показывают, что максимальная точная погрешность ниже максимальной расчетной погрешности, что вероятно это связано с пренебрежением градиента давления. А наоборот, численное поле давления на рис. 4, показывает наличие градиента давления, тогда как при аналитическом решении градиент давления равен нулю и не учитывается. Наибольшие ошибки существуют в области, где имеются большие градиенты и является результатом дискретизации диффузионного члена.

Изменение погрешностей при равномерном измельчении расчетной сетки для плоской струи показано на рисунке 6(а) и 6(б) соответственно.



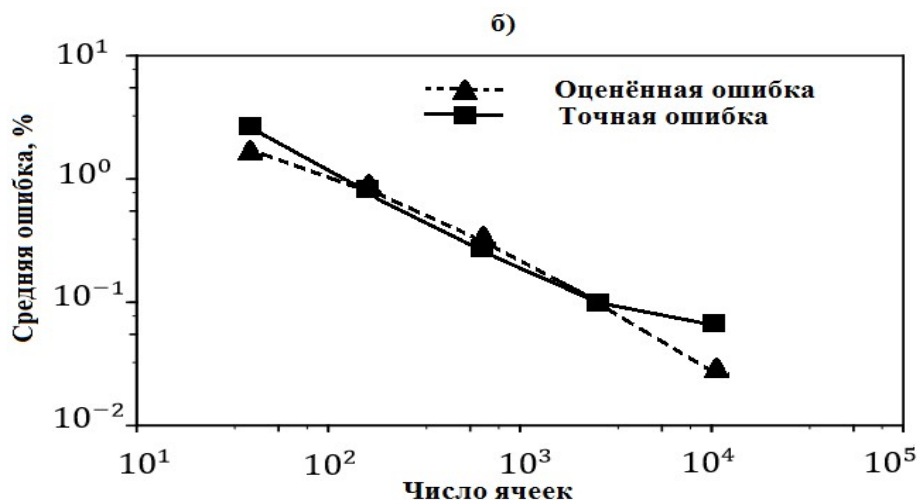


Рис. 6. Изменение погрешностей при равномерном уточнении сетки.

Погрешности нормированы на максимальное значение величины скорости  $|U| = 2.474 \text{ м/с}$  и приводятся в процентах. Оценка ошибки средней скорости считается приемлемой на первых четырех сетках и становится заниженной на мелкой сетке из-за точности аналитического решения. Как видно из рисунка б(а), максимальная оценённая погрешность, является завышенной по сравнению с точной ошибкой аналитического решения. Внимательный взгляд на ошибку усечения диффузионного члена в уравнении (3.100), которая зависит от градиента скорости третьего порядка на однородных сетках, в то время как оценочная ошибка зависит от градиента второго порядка. К сожалению, оценщик ошибок может предсказать большие ошибки в тех областях, где методика дискретизации может дать более точное решение.

#### Литература:

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. - М.: Наука, 1986. - 736 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Дрофа, 2003. - 840с.
3. Чжен П. Отрывные течения. Том 1. - М.: Мир, 1972. - 300 с.
4. OpenFOAM v7 User Guide. Available at: <https://cfd.direct/openfoam/user-guide-v7/>. (accessed 05.08.2021).
5. Anderson J.D. Fundamentals of Aerodynamics, 6<sup>th</sup> Edition, Mc Grow-Hill, Columbus, USA. 2017, 1154 p.
6. Ferziger J.H., Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics. Berlin: Springer Verlag, 2002, 423 p.
7. Patankar S.V. Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980, 197 p.
8. Versteeg H.K., Malalasekera W. An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method. 2<sup>nd</sup> edition, Pearson education Limited, England, 2007, 517p.
9. Калмурзаева А.Т. Численное моделирование влияния входных граничных условий на картину течения. / Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2021. №. 5. С. 3-8.