МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

DOI:10.26104/NNTIK.2023.58.18.001

Джаманбаев М.Дж., Шекеев К.Р., Токтобек кызы Ш.

ЖЫЛУУЛУК АЛМАШУУНУ ЭСЕПКЕ АЛУУ МЕНЕН ТОҢ КЫРТЫШТЫН ЭРҮҮ МАСЕЛЕСИНИН АНАЛИТИКАЛЫК-САНДЫК ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Джаманбаев М.Дж., Шекеев К.Р., Токтобек кызы Ш.

АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРОТАИВАНИЯ МЕРЗЛОГО ГРУНТА С УЧЕТОМ ТЕПЛООБМЕНА

M. Djamanbaev, K. Shekeev, Toktobek kyzy Sh.

ANALYTICAL-NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM THAWING OF FROZEN SOIL CONSIDERING HEAT TRANSFER

УДК: 519.673.624

Бул макалада бул маселенин математикалык модели бир өлчөмдүү орнотууда тиешелүү баштапкы жана четки шарттары менен айлана-чөйрөдөн эриген зонада жылуулук алмашууну эске алуу менен жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесинин жардамы менен түзүлөт. Маселени аналитикалык чечүү жылуулук берүүнүн стационардык жана стационардык эмес бөлүгүн чагылдырган эки жагынан түзүлөт. Ар кандай тереңдиктеги, ар кандай убакыт чекиттериндеги температуранын маанисин эсептөөдө эриген топурак зонасындагы кыртыштын скелети менен эриген суунун ортосундагы жылуулук алмашуу коэффициентинин мааниси эске алынат. Тоңгон топурактын зонасында топурак менен муздун ортосунда жылуулук алмашуунун жоктугу катары эсепке алынбайт. Ошондой эле эриген кыртыштын аймагындагы жылуулук алмашууну эсепке алуу менен көлмөнүн негизинин астындагы тоң кыртыштын эрүү маселесинин математикалык модели жана аналитикалык-сандык чыгарылышы каралат. Алынган жыйынтыктар ушул эле маселенин жылуулук алмашууну эсепке албагандагы жыйынтыктар менен салыштырылат.

Негизги сөздөр: *тоң кыртыш, жылуулук алмашуу, эрүү аймагы, чопо-кумдуу топурак, туруктуу процесс, жылуулук өткөрүү.*

В данной статье математическая модель данной задачи строится с помощью уравнения теплопроводности с учетом теплообмена в талой зоне с окружающей среды с соответствующими начально-краевыми условиями в одномерной постановке. Аналитическое решение задачи строится из двух слагаемых, отражающее стационарную и нестационарную часть теплопереноса. При расчете значения температуры в различные моменты времени в различной глубине учитывается значение коэффициента теплообмена между скелетом грунта и талой водой в зоне талого грунта. Не учитывается в зоне мерзлого грунта как отсутствие теплообмена между грунтом и льдом, т.к. считаем значения температуры грунта и льда одинаковы. Также рассматривается математическая модель задачи протаивания мерзлого грунта под основанием водоема с учетом теплообмена в зоне талого грунта и построение аналитико-численного решения. Полученные результаты сравниваются с результатами этой же задачи полученные без учета теплообмена.

Ключевые слова: *мерзлый грунт, теплообмен, фронт таяния, суглинок, стационарный процесс, перенос тепла.*

In this article, a mathematical model of this problem is constructed using the heat conduction equation, taking into account heat transfer in the melt zone from the environment with the corresponding initial boundary conditions in a one-dimensional formulation. The analytical solution of the problem is constructed from two terms reflecting the stationary and non-stationary part of heat transfer. When calculating the temperature value at different times in different depths, the value of the heat transfer coefficient between the skeleton of the soil and the meltwater in the meltwater zone is taken into account. It is not taken into account in the frozen ground zone as the absence of heat exchange between the soil and ice, because we consider the values of the temperature of the soil and ice to be the same. A mathematical model of the problem of thawing frozen soil under the base of a reservoir is also considered, taking into account heat transfer in the zone of thawed soil and the construction of an analytical and numerical solution. The results obtained are compared with the results of the same problem obtained without taking into account heat transfer.

Key words: *frozen soil, heat transfer, melting front, loam, stationary process, heat transfer.*

Введение. Для решения задачи протаивания мерзлого грунта под основанием водоема существуют разные математические модели и методы ее реализации. Существуют работы [1,3], которые данную задачу рассматривают как две разные области для талого и мерзлого грунта и с фазовым переходом между областями. Граница таяния/промерзания определяется из условия разности тепловых потоков, идущих со стороны талой и мерзлой зоны грунтов как решение задачи Стефана. Другие работы [4,7] данную задачу рассматривают как задача теплопереноса в заданной области под влиянием начальных и граничных условий. Подвижная граница таяния находится местоположением нулевой изотермы без учета фазового перехода.

В данной работе математическая модель данной задачи строится с помощью уравнения теплопроводности с учетом теплообмена в талой зоне с окружающей среды с соответствующими начально-краевыми условиями в одномерной постановке. Аналитическое решение задачи строится из двух слагаемых, отражающее стационарную и нестационарную часть теплопереноса. При расчете значения температуры в различные моменты времени в различной глубине учитывается значение коэффициента теплообмена между скелетом грунта и талой водой в зоне талого грунта и не учитывается в зоне мерзлого грунта как отсутствия теплообмена между грунтом и льдом т.к. считаем значения температуры грунта и льда одинаковы.

Постановка задачи. До заполнения водоема температура грунта на дневной поверхности равнялась +20С и на глубине L = 30m. равнялась -20С. Область мерзлого грунта представляет как песчаник с коэффициентом температуропроводностей равной $\alpha^2 = 0.00043\text{м}^2/\text{с}$. Затем водоем заполнена водой, температура которой равна +80С. Требуется определить глубину таяния и время установление процесса таяния мерзлого грунта под основанием водоема под влиянием температуры воды с учетом теплообмена в талой зоне.

Математически процесс моделируется уравнением в частных производных

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \beta(T(x,t) - T1), \quad 0 \le x \le L, \quad t > 0, \qquad (1)$$

граничными

$$T(0,t) = T_1; \qquad T(L,t) = T_2; \qquad (2)$$

и начальным условием

$$T(x,0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c; \qquad (3)$$

Здесь β – коэффициент теплообмена между водой и грунтом, T_1, T_2 – значения температуры на границах области, L – длина области. Начальное условие формируется из данных наблюдений. Она схематически имеет вид

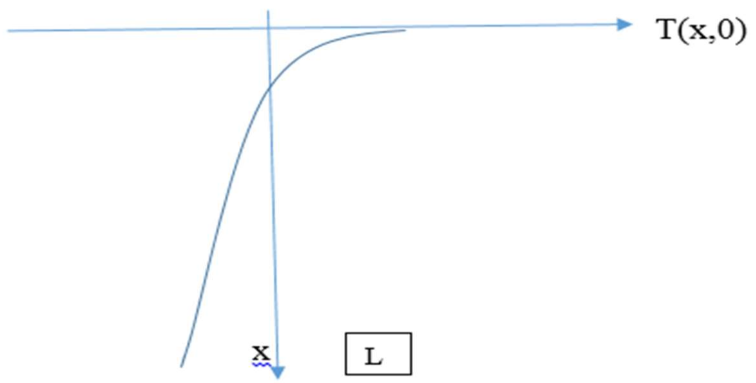

Рис. 1. Начальное условие температуры.

Для построения аналитической решении математической модели (1) – (3) необходимо задание начальной условии в виде функциональной зависимости. Согласно рисунку 1 начальное условие аппроксимировалась в виде одной ветви параболы (3) в виде:

$$T(x,0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c = 0.0369x^2 - 1.2392x + 2{,}0 \qquad (4)$$

Методика решения задачи. Согласно постановки задачи решение ищем в виде двух слагаемых, отражающее стационарную и нестационарную часть процесса таяния мерзлого грунта.

$$\mathrm{T}(x,t) = S(x) + \omega(x,t)\ , \qquad (5)$$

где $S(x) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1$ – стационарное решение, удовлетворяющее граничным условиям, $\omega(x,t)$ – неизвестное нестационарное решение с нулевыми граничными условиями. С учетом (5) уравнение (1) примет вид

$$\omega_t = \alpha^2 \omega_{xx} - \beta(S(x) + \omega(x,t) - T_1) \qquad (6)$$

Решение уравнения (5) ищем в виде аналога ряда Фурье

$$\omega(x,t) = \sum_{i=1}^{n} T_n(t) \sin\frac{\pi n}{L} x,\ S(x) - \mathrm{T}_1 = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} = \sum_{i=1}^{n} f_n(t) \sin\frac{\pi n}{L} x$$

Коэффициенты разложения находятся как решение уравнения

$$\mathrm{T}_n'(\mathrm{t}) = -(\left(\frac{\pi n}{L}\alpha\right)^2 + \beta)\mathrm{T}_n(\mathrm{t}) = -\beta f_n(t), \tag{7}$$

где $\mathrm{f_n}= \frac{2}{\mathrm{L}}\int_0^{\mathrm{L}}[(\mathrm{T_2}\text{-}\mathrm{T_1})(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}})] \ * \sin\frac{\pi \mathrm{n}}{\mathrm{L}}\mathrm{xdx}= \frac{2}{\pi \mathrm{n}}(\mathrm{T_1}\text{-}\ \mathrm{T_2}(-1)^{\mathrm{n}})$

$$\mathrm{T_n(t)} = -\frac{2\beta}{\pi \mathrm{n}}\frac{(\mathrm{T_1}-\mathrm{T_2}(-1)^{\mathrm{n}})}{(\beta+\left(\frac{\pi \mathrm{n}}{\mathrm{L}}\alpha)^2\right)} + \mathrm{C_1}\mathrm{e}^{((\frac{\pi \mathrm{n}}{\mathrm{L}}\alpha)^2+\beta)\mathrm{t}} \tag{8}$$

Тогда аналитическое решение нестационарного процесса таяния мерзлого грунта имеет вид:

$$\omega(x,t) = \sum_{i=1}^{n} T_n(t)\, sin\frac{\pi n}{L}x = \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{2\beta}{\pi \mathrm{n}}\frac{(\mathrm{T_1}-\mathrm{T_2}(-1)^{\mathrm{n}})}{(\beta+\left(\frac{\pi \mathrm{n}}{\mathrm{L}}\alpha)^2\right)} + \mathrm{C_1}\mathrm{e}^{((\frac{\pi \mathrm{n}}{\mathrm{L}}\alpha)^2+\beta)\mathrm{t}}\right] sin\frac{\pi n}{L}x$$

Удовлетворяя граничные и начальное условие с учетом (5) аналитическое решение математической модели (1) - (3) запишется

$$u(x,t) = \left[(T_2 - T_1)\frac{L}{L} + T_1\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{2\beta}{\pi \mathrm{n}}\frac{(\mathrm{T_1}-\mathrm{T_2}(-1)^{\mathrm{n}})}{(\beta+\left(\frac{\pi \mathrm{n}}{\mathrm{L}}\alpha)^2\right)} + (A_n + \mathrm{C_n}\mathrm{e}^{((\frac{\pi \mathrm{n}}{\mathrm{L}}\alpha)^2+\beta)\mathrm{t}})\right] sin\frac{\pi n}{L}x;$$

$$A_i = -2\beta(T_1 + 2.0)(-1)^i/((\pi\, i/L)^3(T_2 - T_1) + \beta),$$

$$C_i = (-2aL^2 - \frac{2L\left(b-(T_2-T_1)\right)}{}/(\pi\, i(-1)^i+4aL^2/(\pi\, i)^3 \tag{9}$$

Количество слагаемых в решении (9) определялась из условия сходимости ряда Фурье с заданной точностью 0.0003 и оказалась равной 23 слагаемых. На рисунке 2 показан ход изменения температуры грунта под основанием водоема в разные моменты времени.

Как видно из графика процесс таяния под влиянием начального условия (4) и значения температуры воды в водоеме останавливается почти через 7.07 лет и глубина таяния (нулевая температура) достигает до 23 м. Далее по истечении времени процесс таяния становится стационарным т.е. через 8.06 лет глубина таяния почти не изменяется и равна 23.20 м.

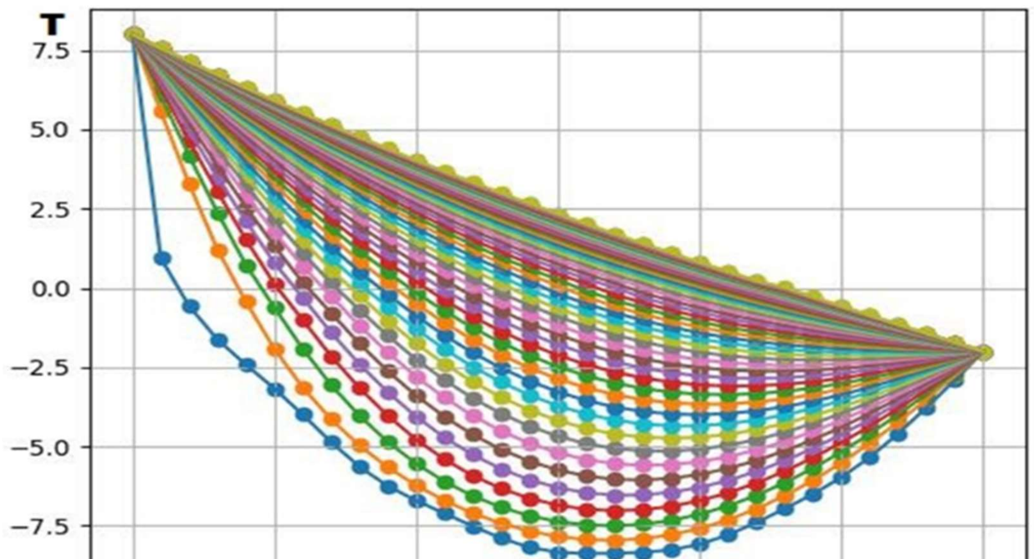

Рис. 2. Ход изменения температуры грунта до установления процесса.

Также численно показано, что результаты математической модели с учетом и без учета теплообмена в зоне талого грунта при очень малых значениях коэффициента теплообмена (0.0000043) и при долгосрочном прогнозе становятся одинаковыми. На рисунке 3 показаны результаты математической модели с учетом и без учета теплообмена. Они почти не различаются. Такие результаты получаются благодаря аналитическому решения математической модели (1) - (3).

Вывод. В долгосрочном прогнозе результаты расчета математической модели таяния мерзлого грунта без учета и с учетом теплообмена при очень малых значениях коэффициента теплообмена почти не отличаются. Процесс таяния под влиянием температуры воды в водоеме останавливается через 7.07 лет и достигает до глубины 23 м.

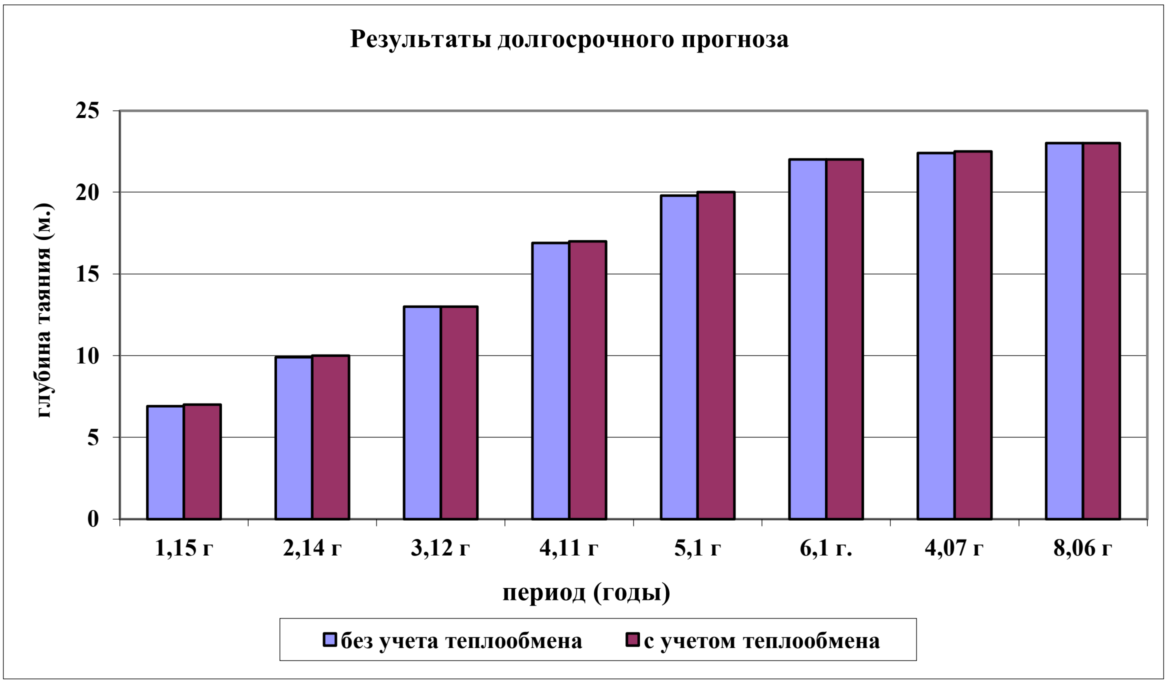

Рис. 3. Положение нулевой изотермы с учетом и без учета теплообмена.

Литература:

1. Фельдман Г.М. Прогноз температурного режима грунтов и развития криогенных процессов. [Текст]: учебник / Г.М. Фельдман. - Новосибирск: Наука, 1977. - 191 с.
2. Соболь С.В. Температурный режим гидротехнических сооружений в криолитозоне [Текст]: учеб. пос. для студентов вузов / С.В. Соболь, И.С. Соболь. - Нижний Новгород: ННГАСУ, 2017. - 402 с.
3. Джаманбаев М.Дж. Определение глубины таяния мерзлого грунта под основанием пруда хвостохранилища [Текст]: Статья / М.Дж. Джаманбаев, У.Дж. Душенова, З.С. Турсункулова. / Журнал Известия КГТУ им. И. Раззакова №29. - Бишкек, 2013. - С. 239-242.
4. Галкин А.Ф. Влияние температуры на глубину оттаивания мерзлых пород [Текст]: Статья / А.Ф. Галкин, И.В. Курта. - Новосибирск: ГИАБ, № 2, 2020. - С. 82-91.
5. Назарова Л.А. Моделирование процесса тепломассопереноса в окрестности гидротехнических сооружений в криолитозоне [Текст]: Статья /Л.А. Назарова, Л.А. Назаров, М.Дж. Джаманбаев, М.К. Чыныбаев. - Новосибирск: ГИАБ, № 9, 2015. - С. 373-379.
6. Nazarova L.A. Modeling heat and mass transfer processes in the vicinity of waterside structures in cryolite zone [Текст]: Статья / L.A. Nazarova, L.A. Nazarov, M.D. Jamanbaev, M.K. Chynybaev - Reports of the XXIII International Scientific Symposium «Miner's Week – 2015» 26-30 January, 2015. P. 35-40.
7. Джаманбаев М.Дж. Аналитическое решение задачи протаивания грунта под основанием водоема [Текст]: Статья / М.Дж. Джаманбаев, А.Ж. Зарнаева, Н.Н. Нурбекова. - Бишкек: Известия КГТУ им. И. Раззакова №61, 2022. - С. 99-104.