МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

DOI:10.26104/NNTIK.2023.17.75.001

Алтыбаев Н.И.

САНАКТУУ ПАРАКОМПАКТУУ МЕЙКИНДИКТЕРДИН БИР КАЛЫПТУУ АНАЛОГУ ЖӨНҮНДӨ

Алтыбаев Н.И.

О РАВНОМЕРНОМ АНАЛОГЕ СЧЕТНО ПАРАКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

N. Altybaev

ABOUT UNIFORMLY ANALOGUE OF COUNTABLE PARACOMPACT SPACES

УДК: 515.12

Жалпы топологияда паракомпактуу типтердин маанилүү касиеттерине санактуу паракомпактуу мейкиндиктер кирет. Санактуу паракомпактуу мейкиндиктер паракомпактуу мейкиндиктерди жалпылайт. Бир калыптуу топологиянын кызыктуу маселелеринен болуп санактуу паракомпактуу типтердин бир калыптуу аналогдорун табуу болуп саналат. Бир калыптуу мейкиндиктердин санактуу бир калыптуу паракомпактуулугунун ар түрдүү түрлөрү бар. Мында санактуу паракомпактуулуктун жаңы түрү сунушталат. Бул илимий макалада санактуу бир калыптуу P – паракомпактуу мейкиндиктер киргизилет жана изилденет. Кайсыл бир калыптуу мейкиндиктер каалагандай санактуу ω – жабдуу үчүн кандайдыр метризацияланган мейкиндикке чагылдырган бир калыптуу ω – чагылдырууга ээ болот? делген көйгөй чечилет. Мындан башка Даукердин санактуу паракомпактуу мейкиндик менен компактуу мейкиндиктин көбөйтүндүсү санактуу паракомпактуу мейкинтик болот делген теоремасынын бир калыптуу аналогу далилденет, күчтүү бир калыптуу ачык чагылдырууда санактуу бир калыптуу P – паракомпактуулук элес жагына сакталуусу тургузулат, каалагандай метризацияланган бир калыптуу мейкиндиктин санактуу бир калыптуу P – паракомпактуулугу тургузулат.

Негизги сөздөр: *санактуу ачык жабдуу, санактуу бир калыптуу P – паракомпактуулук, ω – чагылдыруу.*

В общей топологии к важнейшим свойствам типа паракомпактности относятся счетно паракомпактные пространства. Счетно паракомпактные пространства обобщают паракомпактные пространства. Одной из интересных задач равномерной топологии является нахождения равномерных аналогов типа паракомпактности. Существуют различные версии счетной равномерной паракомпактности равномерных пространств. Здесь мы предлагаем новую версию счетной равномерной паракомпактности. В настоящей статье вводится и исследуются счетно равномерно P – паракомпактные пространства. В частности, решается задача: каковы те равномерные пространства, которые для любого счетного открытого покрытия ω обладают равномерно непрерывным ω – отображением на некоторое метризуемое пространство? Кроме того, доказывается равномерный аналог теоремы Даукера о счетной паракомпактности произведение счетно паракомпактного пространства на компактное пространство, устанавливается сохранение счетной равномерной P – паракомпактности в сторону образа при сильно равномерно открытых отображениях, устанавливается счетно равномерно P – паракомпактность всякого метризуемого равномерного пространства.

Ключевые слова: *счетное открытое покрытие, счетная равномерная P – паракомпактность, ω – отображение.*

The most important properties of the paracompact – type are countably paracompact spaces in general topology. Countably paracompact spaces generalize paracompact spaces. One of the interesting problems of uniform topology is finding uniform analogues uniform paracompactness. There are various versions of the countable uniform paracompactness of uniform spaces. Here we propose a new version of countable uniform paracompactness. In this paper we introduce and study countably uniformly P – paracompact spaces. In particular, the problem is solved: what are uniform spaces which for any countably open coverings ω – admit a uniformly continuous ω – mappings to some metrizable spaces? In addition, a uniform analogue of Dowker's theorem on countable paracompactness of the product of a countably paracompact space by a compact space is proved, the preservation of countable uniformly P – paracompactness towards the image under strongly uniformly open mappings is established, and the countably uniformly P – paracompactness of any metrizable uniform space is established.

Key words: *countably open covering, countably uniformly P – paracompactness, ω – mapping.*

Для покрытия α и β множества X, символ $\alpha \succ \beta$ означает, что покрытие α вписано в покрытие β, т.е. для всякого $A \in \alpha$ найдется $B \in \beta$ такое, что $A \subset B$. Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) называется предкомпактным, если для каждого равномерного покрытия $\alpha \in U$ существуют равномерное покрытие $\beta \in V$ и конечное равномерное покрытие $\gamma \in U$ такие, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$ [5], [10]. Равномерное пространство (X,U) называется равномерно P-паракомпактным, если для всякого открытого покрытия λ в (X,U) найдется $\{\alpha_n\} \subset U$, удовлетворяющая условию (BP) [6]. Равномерное пространство (X,U) называется счетно равномерно B-паракомпактным, если для любого конечно аддитивного открытого покрытия λ в (X,U) найдется $\{\alpha_n\} \subset U$, удовлетворяющая условию (BP) [5]. Равномерно непрерывное отображение f называется равномерно совершенным, если оно одновременно предкомпактно и совершенно [5], [10]. Пусть ω- открытое покрытое топологического пространства X и $f : X \to Y$ - непрерывное отображение пространства X в топологическое пространство Y. Отображение f называется ω- отображением, если каждая $y \in Y$ обладает такую окрестность O_y, что множество $f^{-1}O_y$ содержится в нектором элементе покрытия ω [1]. Топологическое пространство называется счетно паракомпактным, если в каждое его счетное открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие [1].

Некоторые типы равномерно паракомпактных и равномерно линделёфовых пространств исследованы в работах [2] – [13].

Пусть (X,U) - равномерное пространство.

Определение 1. (X,U) называется счетно равномерно P-паракомпактным, если для любого счетного открытого покрытия λ пространства (X,U) найдется последовательность $\{\alpha_n\} \subset U$, удовлетворяющая условию (BP) [5].

Предложение 1. Если пространство (X,U) счетно равномерно P-паракомпактно, то пространство (X,τ_U) счетно паракомпактно. Если нормальное пространство (X,τ) счетно паракомпактно, то (X,U_X) счетно равномерно P-паракомпактно, где U_X универсальная равномерность на X такая, что $\tau_{U_X} = \tau$.

Доказательство. Пусть α - некоторое счетное открытое покрытие (X,τ_U). Тогда для α найдется $\{\beta_n\} \subset U$, удовлетворяющая условию (BP) [5]. Следовательно, найдется псевдометрика d на X такая, что $\beta_{n+1}(x) \subset \{y : d(x,y) \leq \frac{1}{2^{n+1}}\} \subset \beta_n(x)$ при $n \in N$. Семейство $\langle\alpha\rangle = \{\langle A\rangle_d : A \in \alpha\}$ есть открытое покрытие псевдометрического пространства (X,d). В силу счетно паракомпактности пространства (X,τ_d) в $\langle\alpha\rangle = \{\langle A\rangle_d : A \in \alpha\}$ можно найти такое покрытие β, что $\beta \succ \langle\alpha\rangle$. Поскольку, $\tau_d \subset \tau_U$, то β вписано в α

Следовательно, пространство (X,τ_U) является счетно паракомпактным.

Обратно, пусть (X,τ) - счетно паракомпактно. Поскольку каждое открытое покрытие нормального пространства является нормальным, то система всех счетно открытых покрытий является базой универсальной равномерности U_X, то пространство (X,U_X) является счетно равномерно P-паракомпактным.

Из этого предложения следует, что если X счетно паракомпактное, но не паракомпактное пространство, и X наделим универсальной равномерности U_X, то пространство (X,U_X) является счетно равномерно паракомпактным, но не равномерно паракомпактным.

Счетно равномерно B - паракомпактное пространство было введено и исследовано в работе [11].

Предложение 2. Каждое счетно равномерно P - паракомпактное пространство является счетно равномерно B-паракомпактным.

Доказательство следует из определения равномерно P - паракомпактного пространства, т.е. из определения 1.

Предложение 3. Каждое равномерно P - паракомпактное пространство является счетно равномерно P-паракомпактным.

Доказательство непосредственно следует из определения 1.

Предложение 4. Каждое метризуемое равномерное пространство является счетно равномерно P-паракомпактным.

Доказательство. Пусть (X,U) - метризуемое пространство и α -произвольное счетное открытое покрытие. Тогда найдется счетная база $B=\{\alpha_n\}$ равномерных покрытий. Покажем, что это база искомая последовательность равномерных покрытий. Рассмотрим некоторую $x \in X$. Укажем такое $\beta \in U$, что $\beta(x) \subset A_x$, $A_x \in \alpha$. Поскольку $B=\{\alpha_n\}$ база, то найдется такой n, что $\alpha_n \succ \beta$. Поэтому $\alpha_n(x) \subset A_x$. Следовательно, (X,U) счетно равномерно P - паракомпактно.

Предложение 5. Каждое компактное равномерное пространство счетно равномерно P -паракомпактно.

Доказательство. Выберем счетное открытое покрытие α в (X,U). Для $x \in X$ укажем $\gamma_x \in U$ такое, что $\gamma_x(x) \subset A$. Существует $\lambda_x \in U$ такое, что $\lambda * \succ \gamma$. Найдется окрестность O_x точки $x \in X$ такая, что каждое множество из $\lambda_x \in U$, которое имеет не пустое пересечение с O_x, содержится в некотором элементе α. Положим $\eta=\{O_x : x \in X\}$. В силу компактности пространства (X,U) из η выделим конечное подпокрытие $\eta_0=\{O_{x_i} : i=1.2,...,n\}$. Пусть $\lambda=\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}}\lambda_{x_i}$. Заметим, что $\alpha \in U$. Из определения равномерности существует такая последовательность $\{\alpha_n\}$, что $\alpha_{n+1} * \succ \alpha_n$. Для $x \in X$ найдется такое $\alpha_n \in U$, что $\alpha_n(x) \subset A$. Следовательно, (X,U) является счетно равномерно P - паракомпактным.

В следующей теореме устанавливается характеристика счетно равномерно P- паракомпактных пространств посредством ω - отображений, т.е. решается задача: каковы те равномерные пространства, которые для любого счетного открытого покрытия ω обладают равномерно непрерывным ω - отображением на некоторое метризуемое пространство?

Теорема 1. Для того чтобы равномерное пространство (X,U) было счетно равномерно P -паракомпактным, необходимо и достаточно, чтобы для каждого счетного открытого покрытия ω пространства (X,U) существовало равномерно непрерывное ω-отображение f равномерного пространства (X,U) на некоторое метризуемое равномерное пространство (Y,V).

Доказательство. Рассмотрим счетное открытое покрытие ω пространства (X,U). В силу счетно равномерной P - паракомпактности (X,U) для ω найдется нормальная последовательность $\{\gamma_n\} \subset U$ покрытий, удовлетворяющая условию (BP) [5]. Тогда по лемме [6] найдется d на X такая, что $\gamma_{n+1}(x) \subset \{y : d(x,y) \le \frac{1}{2^{n+1}}\} \subset \gamma_n(x)$ для любых β .и $n \in N$. Стандартным образом рассмотрим отношение на X: $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow \rho(x_1,x_2)=0$, $x_1,x_2 \in X$. Обозначим через Y_ω фактор-множество X по отношению "~", а $f : X \to Y_\omega$ - естественное отображение X на фактор-множество Y_ω. Ясно, что d - метрика, $d(y_1,y_2)=\rho(f^{-1}y_1, f^{-1}y_2)$, $y_1,y_2 \in Y$, V_ω - равномерность на Y_ω, которая порождается d и $f:(X,U) \to (Y_\omega,V_\omega)$ - ω-отображение.

Достаточность. Пусть ω – счетное открытое покрытие (X,U) и $f:(X,U) \to (Y_\omega,V_\omega)$ - ω-отображение (X,U) на метризуемое пространство (Y_ω,V_ω). В силу метризуемости (Y_ω,V_ω) найдется счетная база $\{\lambda_n\} \subset V_\omega$. Тогда $\{\gamma_n\} \subset U$, где $\gamma_n = f^{-1}\lambda_n$. Теперь установим, что $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет условию (BP) [5], [10]. Пусть $x \in X$ - произвольно выьранная точка. Тогда найдется открытое множество $\lambda_n(y)$ содержащее точку y в (Y_ω,V_ω) такое, что $f^{-1}\lambda_n(y) \subset N$, $N \in \omega$, следовательно, $\gamma_n(x) \subset N$, значит, (X,U) является счетно равномерно P - паракомпактным.

Следующая теорема является равномерным аналогом теоремы Даукера о счетной паракомпактности произведение счетно паракомпактного пространства на компактное пространство.

Теорема 2. Произведение $(X,U)\times(Y,V)$ счетно P - равномерно паракомпактного пространства (X,U) на компактное пространство (Y,V) является счетно равномерно паракомпактным.

Доказательство. Пусть $(X,U)\times(Y,V)$ - произведение счетно равномерно P-паракомпактного пространства (X,U) на компактное пространство (Y,V). Согласно примеру 2.3.3. [5] проекция $\pi_X:(X,U)\times(Y,V)\to(X,U)$ равномерно совершенно т.е. проекция есть ω-отображение $(X,U)\times(Y,V)$ на счетно P - равномерно паракомпактное пространство (Y,V) для любогосчетного открытого покрытия ω произведения $(X,U)\times(Y,V)$. Следовательно, произведение $(X,U)\times(Y,V)$ является счетно равномерно P - паракомпактным.

Следующая теорема показывает, что при сильно равномерно открытых отображениях счетная равномерная P - паракомпактность сохраняется в сторону образа.

Теорема 3. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - сильно равномерно открытое отображение счетно равномерно P - паракомпактного пространства (X,U) в (Y,V). Тогда пространство (Y,V) также является счетно равномерно P - паракомпактным.

Доказательство. Пусть (X,U) - счетно равномерно P-паракомпактно и β - произвольное счетное открытое покрытие (Y,V). f непрерывно, поэтому $f^{-1}\beta$ является счетным открытым покрытием для (X,U). Найдется нормальная последовательность покрытий $\{\alpha_n\}\subset U$, удовлетворяющая условию (BP) [5]. Так как f равномерно замкнуто, то для любого $\alpha_n\in U$ существует такое покрытие $\beta_n\in V$, что $f(\alpha_n(x))\supset\beta_n(f(x))$ для каждой точки $x\in X$. Значит, для любой точки $y\in Y$ существуют такие $n\in N$ и $B\in\beta$, что $\beta_n(y)\subset B$. Следовательно, пространство (Y,V) является счетно равномерно P - паракомпактным.

Литература:

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977.
2. Байгазиева Н.А. Об одном свойстве равномерных пространств // Изв. вузов Кыргызстана. – 2017. – №10. – С. 3-8.
3. Байгазиева Н.А. Равномерно паракомпактные пространства // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2018. – №2. – С. 20-23.
4. Байгазиева Н.А. τ - сильно равномерно паракомпактные пространства // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2018. – №5. – С. 3-8.
5. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. – Фрунзе: Илим, 1990.
6. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. – Бишкек, 2013. – 160.
7. Канетов Б.Э., Байгазиева, Н.А. Об одном равномерно-топологическом свойстве // Успехи современной науки. – Белгород. – 2016. – Т. 5, № 12. – С. 26-29.
8. Канетов Б.Э., Байгазиева Н.А. О сильно равномерно B - паракомпактных пространствах // Известия вузов Кыргызстана. – 2017. – № 6. – С. 6-10.
9. Канетов Б.Э., Байгазиева, Н.А. Равномерно линделёфовы пространства // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2017. – № 7. – С. 27-33.
10. Borubaev A.A. Uniform topology and its applications. Bishkek: Ilim, 2021.
11. Kanetov B., Kanetova D., Altybaev N. About countably uniformly paracompact spaces // AIP Conf. Proc., New-York, Melville, 2021.- V. 2334. – P. 1-4.
12. Kanetov B., Baidzhuranova A., Almazbekova B. About Weakly Uniformly Paracompact Spaces // AIP Conf. Proc., New-York, Melville, 2022. - V. 2483, 020004.
13. Kanetov B., Baigazieva N., Altybaev N. About uniformly μ -paracompact spaces // International Journal of Applied Mathematics, 2021, 34(2). – P. 353-361.