МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

DOI:10.26104/NNTIK.2023.18.62.001

Аблабеков Б.С., Аблабекова А.Б., Мамышева З.Э.

УБАКЫТ БОЮНЧА БӨЛЧӨКТҮҮ ТУУНДУЛУ МОДИФИКАЦИЯЛАНГАН АЛЛЕР ТЕҢДЕМЕСИ ҮЧҮН БИР БАШТАПЧЫ-ЧЕК АРА МАСЕЛЕСИНИН КЛАССИКАЛЫК ЧЕЧҮҮМДҮЛҮГҮ ЖӨНҮНДӨ

Аблабеков Б.С., Аблабекова А.Б., Мамышева З.Э.

О КЛАССИЧЕСКОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА С ДРОБНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ПРОИЗВОДНОЙ

B. Ablabekov, A. Ablabekova, Z. Mamysheva

ON THE CLASSICAL SOLVABILITY OF ONE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE MODIFIED ALLER EQUATION WITH A FRACTIONAL DERIVATIVE IN TIME

УДК: 517.95

Математикалык физиканын тескери маселелерин изилдөөдө тиешелүү түз (биздин учурда аралаш чек ара шарттары бар баштапкы-чектик маселе) маселелердин чечимдерин билүү маанилүү роль ойнойт. Чектелген областа убакыт боюнча Капутонун маанисинде бөлчөк туундусу бар бир тектүү эмес псевдопараболалык Аллер теңдемеси үчүн бир баштапкы-чек ара маселеси изилденди. Бул изилдөөдө бир өлчөмдүү Аллер теңдемеси үчүн аралаш чек ара шарттары менен баштапкы-чектик маселенин аналитикалык чыгарылышы тургузулду. Өзгөрмөлөрдү ажыратуу ыкмасын колдонуу менен маселенин чыгарылышы тиешелүү Штурм-Лиувилл маселесинин өздүк функцияларына карата Фурье катары түрүндө берилет. Үзгүлтүксүз дифференциалдануучу функциялар классында каралып жаткан маселенин уникалдуу чечилиши үчүн шарттар белгиленген. Каралып жаткан маселенин классикалык чечилиши үчүн бар болуу жана уникалдуулук теоремалары далилденген. Фурье ыкмасы коюлган маселени чечүүнүн бар экендигин жана уникалдуулугун далилдөө үчүн колдонулат. Үзгүлтүксүз дифференциалдануучу функциялар мейкиндигинде чечим алынат жана негизделет жана катар катары берилет.

Негизги сөздөр: *Аллер теңдемеси, чектик маселелер, бөлчөк туунду, дифференциалдык теңдемелер, бөлчөк интеграл, Фурье ыкмасы, Миттаг-Леффлеранын функциясы.*

При исследовании обратных задач математической физики важную роль играет знание решений соответствующей прямой (в данном случае начально- краевой задачи со смешанными граничными условиями) задачи. В ограниченной области исследована одна начально-краевая задача для неоднородного псевдопараболического уравнения Аллера с дробной по времени производной Капуто. В данном исследовании построены аналитическое решение начально-краевой задачи со смешанными граничными условиями для одномерного уравнения Аллера. Используя метод разделения переменных решение задачи дается в виде ряда Фурье относительно собственных функций соответствующей задачи Штурма-Лиувилля. Установлены условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи в классе непрерывно дифференцируемых функций. Доказаны теоремы существования и единственности классического решения рассматриваемой задачи. Для доказательства существования и единственности решения поставленной задачи применяется метод Фурье. В пространстве непрерывно-дифференцируемых функций получено и обосновано решение и представлено в виде ряда.

Ключевые слова: *уравнение Аллера, краевые задачи, дробная производная, дифференциальные уравнения, дробный интеграл, метод Фурье, функция Миттага-Леффлера.*

In the study of inverse problems of mathematical physics, an important role is played by the knowledge of the solutions of the corresponding direct (in this case, the initial-boundary value problem with mixed boundary conditions) problem. In this study, an analytical solution of an initial-boundary value problem with mixed boundary conditions for the one-dimensional Aller equation is constructed. Using the method of separation of variables, the solution of the problem is given in the form of a Fourier series with respect to the eigenfunctions of the corresponding Sturm-Liouville problem.In a limited domain, one initial-boundary value problem for the inhomogeneous pseudo-parabolic Aller equation with a time-fractional Caputo derivative is studied. Conditions for the unique solvability of the problem under consideration in the class of continuously differentiable functions are established. Existence and uniqueness theorems for the classical solution of the problem under consideration are proved. The Fourier method is used to prove the existence and uniqueness of a solution to the problem posed. In the space of continuously differentiable functions, a solution is obtained and substantiated and presented as a series.

Key words: *Aller equation, boundary value problems, fractional derivative, differential equations, fractional integral, Fourier method, Mittag-Leffler function.*

Введение. В последние годы интенсивно изучаются задача Коши и начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными дробными производными, обобщающих классические уравнения в частных производных, такие как уравнение теплопроводности, волновое уравнение и др. Это связано их обширными применениями в задачах физики, химии и других прикладных наук, в частности, приложениями к процессам фильтрации жидкости в сильно пористой (фрактальной) среде, фильтрации жидкости в трещиноватой среде с фрактальной геометрией трещин, переноса почвенной влаги в зоне с учетом ее движения против потенциала влажности и т.д (см. [1-3]).

Уравнениям с дробными производными для параболических уравнений и гиперболических уравнений посвящены большое количество работ. Более подробно, они представлены в работах изучены в работах [4-11].

В данной работе в прямоугольной области исследуется одна начально-краевая задача для влагопереноса Аллера с дробной по времени производной Капуто:

$$D_t^\alpha u = AD_t^\alpha u_{xx} + \left(D(u)u_x\right)_x + f(x,t), \tag{1}$$

где $u(x,t)-$ влажность почвы в долях единицы на глубине x в момент времени t, $D(u)-$ коэффициент диффузивности, $D_t^\alpha -$ оператор дробного дифференцирования Капуто порядка $\alpha, 0<\alpha\le 1$ (см. [9, с.9], $A-$ варьируемый коэффициент Аллера. Это уравнение является обобщением уравнения Аллера (см. [2, с.138]):

$$u_t = Au_{xxt} + \left(D(u)u_x\right)_x + f(x,t) \tag{2}$$

посредством введения понятия фрактальной скорости изменения влажности, которая объясняет наличие потоков против потенциала влажности.

Задача Коши, начально-краевые задачи для псевдопараболического уравнения, в том числе для уравнения Аллера с дробными производными Римана-Лиувилля были изучены в работах [12-21].

1.Определение дробных проиводных и интегралов.

Введем некоторые понятия, необходимые для дальнейшего исследования.

Определение 1. Дробным дифференциальным оператором Капуто D_t^α порядка $\alpha, 0<\alpha\le 1$ для дифференцируемой функции f называется оператор, определенная выражением [4,5]:

$$D_t^\alpha[f](t) = I[f'(t)] = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t f'(\tau)(t-\tau)^{-\alpha}\,d\tau, & 0<\alpha<1, \\ f'(t), & \alpha=1, \end{cases}$$

где $\Gamma(z)-$ гамма функция.

Определение 2. Дробным интегральным оператором Римана-Лиувилля $D_{0t}^{-\alpha}$ порядка $\alpha, 0<\alpha\le 1$ для интегрируемой функции f называется оператор, определенная выражением [4,5]:

$$D_{0t}^{-\alpha}f(t) = I^\alpha[f(t)] = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}\,d\tau, & 0<\alpha<1, \\ \int_0^t f(\tau)d\tau, & \alpha=1. \end{cases}$$

Определение 3. Дву параметрическая функция $E_{\alpha,\beta}(z)$ определяемое формулой [4]:

$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}$, $(\alpha>0, \quad \beta>0)$ называется функцией Миттаг-Леффлера.

Приведем некоторые соотношения, приведенные в [4]:

$$E_{1,1}(z) = e^z, \qquad E_{1,1}(z) = \frac{e^z-1}{z},$$

$$E_{2,1}(z) = ch\sqrt{z},\ E_{2,1}(z) = \frac{sh\sqrt{z}}{\sqrt{z}},$$

$$E_{1/2,1}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z}erfc(-\sqrt{z}).$$

При $\beta=1$ получим одно параметрическую функцию Миттаг-Леффлера:

$$E_{\alpha,1}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}\equiv E_\alpha(z).$$

Обобщение формулы Ньютона-Лейбница, при $\alpha, \quad (0<\alpha\le 1)$

$$D_{0t}^{-\alpha}D_t^{\alpha}z(t)=z(t)-\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}z^{(\alpha-1)}(0).$$

2. Постановка задачи и основной результат

В области прямоугольнике $\Omega_T=\{(x,t):0<x<\pi,\ 0<t\le T\}$ рассмотрим уравнение (1) при $D(u)=D_0>0-const$ с начальным и со смешанными краевыми условиями

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 0\le x\le \pi, \tag{2}$$

$$u_x(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0,\quad 0\le t\le T. \tag{3}$$

где $\alpha,\beta-$ положительные постоянные, $\varphi(x)$, $f(x,t)-$ заданные функции.

Определение 1. Классическим решением задачи (1) -(3) в области Ω_T назовем функцию $u=u(x,t)\in C(\overline{\Omega}_T)$ из класса $D_t^{\alpha}u(x,t)\in C(\Omega_T),\ u_{xx}(x,t)\in C(\Omega_T),\ D_t^{\alpha}u_{xx}(x,t)\in C(\Omega_T)$, которая удовлетворяет уравнению (1) при всех $(x,t)\in\Omega_T$, начальному условию (2) при всех $x\in[0,l]$, и краевым условиям (3) при всех $t\in[0,T]$.

I. Метод Фурье для решения однородного уравнения. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$D_t^{\alpha}u-AD_t^{\alpha}u_{xx}-D_0u_{xx}=0,\ (x,t)\in\Omega_T, \tag{4}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad 0\le x\le \pi, \tag{5}$$

$$u_x(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0,\quad 0\le t\le T. \qquad (6$$

Теорема 1. Пусть $u_0(x)\in C^2[0,\pi]$, $u_0'''(x)\in L_1(0,\pi)$ и $u_0'(0)=u_0(\pi)=0$, $u_0''(0)=u_0''(\pi)=0.$ Тогда задача (4) -(6) имеет единственное решение. Это решение представимо в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k E_{\alpha,1}\left(-\frac{\beta(2k-1)^2}{4+\alpha(2k-1)^2}t^{\alpha}\right)\cos\frac{2k-1}{2}x. \tag{7}$$

Доказательство. Будем искать, нетривиальные решение уравнения (4), с граничными условиями (6) в виде

$$u(x,t)=X(x)Z(t). \tag{8}$$

Подставляя значения $u(x,t)$ из (8) в (4) и разделяя переменные, получим

$$\frac{D_t^{\alpha}Z}{AD_t^{\alpha}Z+D_0Z}=\frac{X''}{X}=-\lambda.$$

Отсюда, предполагая, что $AD_t^{\alpha}Z+D_0Z\ne 0$, и учитывая условие (4), получим следующие уравнения относительно функций X, Y :

$$X''+\lambda X=0,\quad X'(0)=X(\pi)=0, \tag{9}$$

$$D_t^{\alpha}Z+\frac{D_0\lambda}{1+A\lambda}Z=0 \tag{10}$$

Известно, что задача Штурма-Лиувилля (9) имеет следующий вид собственные значения и собственные функции:

$$\lambda_k = \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2, X_k(x) = \cos\left(\frac{2k-1}{2}\right)x, \quad k = 1, 2, ...,$$

и образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(0, \pi)$.

Решение дифференциального уравнение дробного порядка (10) при $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots$ имеет вид

$$Z_k(t) = C_k E_{\alpha,1}\left(-\frac{D_0(2k-1)^2}{4 + A(2k-1)^2} t^\alpha\right), \tag{11}$$

где $E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$ – функция Миттаг-Леффлера, C_k, $k = 1, 2, 3, \dots$ - пока произвольные постоянные.

Объединив $X_k(x)$ и $Z_k(t)$ получим:

$$u_k(x,t) = C_k E_{\alpha,1}\left(-\frac{D_0(2k-1)^2}{4 + A(2k-1)^2} t^\alpha\right) \cos\frac{2k-1}{2} x,$$

которое удовлетворяют уравнению (4) и граничным условиям (6).

Воспользовавшись обобщенным принципом суперпозиции, запишем решение задачи (4), (6) в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k E_{\alpha,1}\left(-\frac{\beta(2k-1)^2}{4 + \alpha(2k-1)^2} t^\alpha\right) \cos\frac{2k-1}{2} x. \tag{12}$$

Для нахождения неизвестных постоянных C_k, воспользуемся начальным условием (5). Тогда из (12) имеем

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos\frac{2k-1}{2} x. \tag{13}$$

Рассматривая это равенство как разложение $\varphi(x)$ в ряд Фурье, найдем коэффициенты Фурье

$$\varphi_k = C_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(\xi)\cos\frac{2k-1}{2}\xi d\xi. \tag{14}$$

Подставив найденные C_k в (12), получим формальное решение задачи
(4) -(6):

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k E_{\alpha,1}\left(-\frac{\beta(2k-1)^2}{4 + \alpha(2k-1)^2} t^\alpha\right) \cos\frac{2k-1}{2} x. \tag{15}$$

Теперь покажем, что найденная функция $u(x,t)$ является классическим решением задачи (4)-(6).Сначала покажем непрерывность функции $u(x,t)$ в области Ω_T. Из условий, наложенных на функции $\varphi(x)$, следует, что

$$|\varphi_k| \le \frac{const}{(2k-1)^2}. \tag{16}$$

Отсюда следует, что ряд (12) с коэффициентами C_n, определяемым по формулам (14), равномерно и абсолютно сходится к функции $\varphi(x)$.

Далее покажем, что формально построенное решение (15) является классическим, т.е. регулярным при $0 < x < l,\ 0 < t < T,$ непрерывным по x при $0 \le x \le l$ и удовлетворяет дополнительным условиям (4)-(6).

Используя неравенство (16) и то, что

$$E_\alpha(-z) \le \frac{M}{1+z} \le M, \quad z \ge 0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

из формулы (15) , имеем

$$|u(x,t)| = \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| \left| E_{\alpha,1}\left(-\frac{\beta(2k-1)^2}{4+\alpha(2k-1)^2} t^\alpha \right) \right| \left| \cos\frac{2k-1}{2} x \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{(2k-1)^2} < +\infty. \qquad (17)$$

Поэтому функция $u(x,t)$, определяемая рядом (15), непрерывна в области $\bar{\Omega}_T$ и удовлетворяет начальному условию (5) и граничным условиям (6).

Остается показать, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (4) в области Ω_T . Для этого достаточно показать равномерную сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_t^\alpha u_k, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}, \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 D_t^\alpha u_k}{\partial x^2}.$$

Формально дифференцируя ряд (15), находим

$$D_t^\alpha u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k D_t^\alpha E_{\alpha,1}\left(-\frac{\beta(2k-1)^2}{4+\alpha(2k-1)^2} t^\alpha \right) \cos\frac{2k-1}{2} x =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_k \frac{\beta(2k-1)^2}{4+\alpha(2k-1)^2} E_{\alpha,1}\left(-\frac{\beta(2k-1)^2}{4+\alpha(2k-1)^2} t^\alpha \right) \cos\frac{2k-1}{2} x,$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k-1}{2} \right)^2 \varphi_k E_{\alpha,1}\left(-\frac{\beta(2k-1)^2}{4+\alpha(2k-1)^2} t^\alpha \right) \cos\frac{2k-1}{2} x,$$

$$\frac{\partial^2 D_t^\alpha u(x,t)}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 D_t^\alpha u_k}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_k \frac{\beta(2k-1)^2}{4+\alpha(2k-1)^2} \left(\frac{2k-1}{2} \right)^2 E_{\alpha,1}\left(-\frac{\beta(2k-1)^2}{4+\alpha(2k-1)^2} t^\alpha \right) \cos\frac{2k-1}{2} x.$$

Поскольку

$$|\varphi_k| \le \left(\frac{1}{2k-1} \right)^2 |\varphi_k''|,$$

то

$$|D_t^\alpha u(x,t)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| \frac{\beta(2k-1)^2}{4+\alpha(2k-1)^2} E_{\alpha,1}\left(-\frac{\beta(2k-1)^2}{4+\alpha(2k-1)^2} t^\alpha \right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{(2k-1)^2},$$

$$\left| \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(\frac{2k-1}{2} \right)^2 \varphi_k E_{\alpha,1}\left(-\frac{\beta(2k-1)^2}{4+\alpha(2k-1)^2} t^\alpha \right) \cos\frac{2k-1}{2} x \right| \le M_1 \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k'' < \infty, \qquad (18)$$

$$\left| \frac{\partial^2 D_t^\alpha u(x,t)}{\partial x^2} \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi_k \frac{\beta(2k-1)^2}{4+\alpha(2k-1)^2} \left(\frac{2k-1}{2} \right)^2 E_{\alpha,1}\left(-\frac{\beta(2k-1)^2}{4+\alpha(2k-1)^2} t^\alpha \right) \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k''| < \infty.$$

Из оценок (18) заключаем, что ряды $\sum_{k=1}^{\infty} D_t^\alpha u_k, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}, \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 D_t^\alpha u_k}{\partial x^2}$.

сходятся равномерно к $D_t^\alpha u(x,t)$, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 D_t^\alpha u(x,t)}{\partial x^2}$ соответственно.

Теорема 1 доказана.

II. Метод Фурье для решения неоднородного уравнения. Пусть требуется найти классическое решение задачи

$$D_t^\alpha u - AD_t^\alpha u_{xx} - D_0 u_{xx} = f(x,t), (x,t) \in \Omega_T, \tag{19}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \tag{20}$$

$$u_x(0,t) = 0, \; u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{21}$$

Справедлива

Теорема 2. Пусть, $f(x,t) \in C^2(\overline{\Omega}_T), f(0,t) = f(\pi,t) = 0.$ Тогда задача (19)-(21) имеет единственное решение. Это решение представимо в виде

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^\pi G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau, \tag{22}$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{4t^{\alpha-1} E_{\alpha,1}(-\lambda_k (t)^\alpha)}{4 + A(2k-1)^2} \right] \cos\frac{2k-1}{2} x \cos\frac{2k-1}{2} \xi.$$

Доказательство. Будем искать решение задачи (19) -(21) в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \cos\frac{2k-1}{2} x \tag{23}$$

по собственным функциям соответствующей однородной задачи.

Подставляя (23) в уравнение (19), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ D_t^\alpha v_k(t) + \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 (AD_t^\alpha v_k(t) + D_0 v_k(t)) \right\} \cos\frac{2k-1}{2} x = f(x,t). \tag{24}$$

В силу условий, наложенных на функции $f(x,t)$, ее можно разложит в ряд Фурье

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \cos\frac{2k-1}{2} x, \tag{25}$$

где

$$f_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi,t) \cos\frac{2k-1}{2} \xi d\xi, \tag{26}$$

Подставим (26) в уравнение (19), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ D_t^\alpha v_k(t) + \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 (AD_t^\alpha v_k(t) + D_0 v_k(t)) \right\} \cos\frac{2k-1}{2} x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \cos\frac{2k-1}{2} x.$$

Это равенство справедливо для любых $t \ge 0, \; x \in [0,\pi]$.

Отсюда и из начального условия (20), для нахождения функции $v_k(t)$, получим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} D_t^\alpha v_k(t) + \left(\dfrac{2k-1}{2}\right)^2 (AD_t^\alpha v_k(t) + D_0 v_k(t)) = f_k(t), \\ v_k(0) = 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} D_t^\alpha v_k(t) + \lambda_k v_k(t) = \dfrac{4}{4 + A(2k-1)^2} f_k(t), \\ v_k(0) = 0, \end{cases} \tag{27}$$

где

$$\lambda_k = \frac{D_0(2k-1)^2}{4+A(2k-1)^2}.$$

Решение задачи (25) можно записать в виде

$$v_k(t) = \frac{4}{4+A(2k-1)^2}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,1}(-\lambda_k(t-\tau)^\alpha)f_k(\tau)d\tau. \tag{28}$$

Подставляя представление (26) в равенство (28), получим

$$v_k(t) = \frac{4}{4+A(2k-1)^2}\frac{2}{\pi}\int_0^t\int_0^\pi f(x,\tau)\cos\frac{2k-1}{2}xdx(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,1}(-\lambda_k(t-\tau)^\alpha)f_k(\tau)d\tau. \tag{29}$$

Подставив (29) в (23) и изменив порядок суммирования и интегрирования, имеем

$$u(x,t) = \int_0^t\int_0^\pi G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^\infty\left[\frac{4t^{\alpha-1}E_{\alpha,1}(-\lambda_k(t)^\alpha)}{4+A(2k-1)^2}\right]\cos\frac{2k-1}{2}x\cos\frac{2k-1}{2}\xi.$$

Из условий, наложенных на $f(x,t)$, вытекает сходимость рядов $\sum_{k=1}^\infty u_k, \sum_{k=1}^\infty u_{kt}, \sum_{k=1}^\infty u_{kxx}, \sum_{k=1}^\infty u_{kxxt}$.

Теорема 2 доказана.

Литература:

1. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24. Вып. 5, С. 852-864.
2. Чудновский А.Ф. Теплофизика почвы. - М.: “Наука”, 1976. - 352с.
3. Yangarber V.A. The mixed problem for a modified moisture-transfer equation // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1967. Vol. 8, No. 1.P. 62-64.
4. Kilbas A.A., Srivastava H.M. and Trujillo J.J. “Theory and Applications of Fractional Differential Equations,” North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204, 2006.
5. Miller K.S. and. Ross B. “An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations,” John Wiley, New York, 1993.
6. Podlubny I. “Fractional Differential Equations,” Aca- demic Press, San Diego, New York, London, 1999.
7. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка, и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. - 688 с.
8. Джарбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966. -672с.
9. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. - М.: Физматлит, 2003. - 272 с.
10. Учайкин В.В. Метод дробных производных. - Ульяновск: Артишок, 2008. - 512 с.
11. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука. 2005. 199 с.
12. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. - Бишкек: Илим, 2001. - 183 с.
13. Аблабеков, Б.С. Метод полуобращения и существование решений начальной, начально-краевой задачи // Наука и новые технологии. - 1999.- №4. - С. 12-19.
14. Аблабеков Б. С., Муканбетова А. Т. Краевая задача на полупрямой для псевдопараболического уравнения с малым параметром // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 32. № 3. С. 29-41. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-29-41.
15. Аблабеков Б.С., Муканбетова А.Т. Первая начально-краевая задача для одномерного псевдопараболического уравнения с малым параметром // Евразийское Научное Объединение. 2019.Т. 1. № 4 (50), С.1-5.
16. Аблабеков Б.С., Муканбетова А.Т. О разрешимости решений второй начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с малым параметром //Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2018. №11, С.7-11
17. Аблабеков Б.С., Жуман кызы Айнура. О разрешимости первой начально-краевой задачи для одномерного псевдопараболического уравнения с дробными производными // Вестник Ошского государственного университета. 2022. - № 1. - С. 29-37.
18. Керефов М.А., Геккиева С.Х. Нелокальная краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса // Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. Физ. Мат. - 2017. - № 2. - С. 106-112.
19. Макаова Р. Х. Первая краевая задача в нелокальной постановке для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана-Лиувилля. // Вестник Адыгейск. ун-та. Сер. 4. Естест.-мат. и техн. науки. - 2017. № 4 (211). - С. 36-41.
20. Sakamoto K., Yamamoto M. Initial value boundary value problems for fractional diffusion–wave equations and applications to some inverse problems, J. Math. Anal. Appl. 382 (1) (2011) 426-447.
21. Хубиев К. У. О математической модели уравнения Аллера// Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. -2016. -№ 4-1 (16). - С. 56-65.
22. Аблабеков Б.С., Муканбетова А.Т. О разрешимости решений второй начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с малым параметром. Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. - 2019. - №. 3. - С. 41-47.