DOI:10.26104/NNTIK.2022.1.6.002

Аблабеков Б.С., Муканбетова А.Т.

КОРРЕКТҮҮ ЭМЕС КОЮЛГАН ЖЫЛУУЛУК ӨТКӨРГҮЧТҮН ТЕҢДЕМЕСИ ҮЧҮН ТЕСКЕРИ УБАКЫТТАГЫ КОШИ МАСЕЛЕСИН КВАЗИИНВЕРСИЯ ЫКМАСЫ МЕНЕН РЕГУЛЯРИЗАЦИЯЛОО

Аблабеков Б.С., Муканбетова А.Т.

МЕТОД КВАЗИОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ С ОБРАТНЫМ ВРЕМЕНЕМ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

B. Ablabekov, A. Mukanbetova

QUASIREVERSIBILITY METHOD FOR REGULARIZATION OF THE ILL-POSED CAUCHY PROBLEM WITH INVERSE TIME OF THE HEAT EQUATION

УДК: 517.95

Бул иште тескери убакыттагы корректүү эмес коюлган жылуулук теңдемесин чыгаруу үчүн модификацияланган квазинверсия ыкмасы боюнча жаңы жыйынтыктар камтылган. Бул тескери маселени чечүүнүн регулярдуу ыкмасын сунуштайт. Регуляризацияланган теңдеме жылуулук өткөргүчтүн теңдемесине регуляризациялоо параметри бар кошумча мүчөнү киргизүү жолу менен алынат. Бул маселенин жакшы жыйналуучу регуляризацияланган чыгарылышын катар түрүндө алууга мүмкүндүк берет. Эгерде баштапкы маселенин чыгарылышы бар болсо, анда квадраттык суммалануучу функциялар мейкиндигинде баштапкы теңдеменин так чыгарылышы менен регулярзацияланган чыгарылыштын ортосундагы айырма нөлгө умтулгандыгын көрсөтөт, качан гана регуляризациялаштыруу параметри нөлгө умтулганда. Так жана регулярзацияланган чыгарылыштардын айырмасы үчүн кандайдыр бир баалоо алынган.

***Негизги сөздөр**: псевдопараболалык тендеме, квазинверсия ыкмасы, так чыгарылыш, регулярзацияланган чыгарылыш, кичи параметр, жылуулук өткөргүчтүн теңдемеси.*

В работе содержатся новые результаты по модифицированным методам квазиобращения для решения одной некорректно поставленного уравнения теплопроводности с обратным временем. В работе предложен метод регуляризации решения обратной задачи. Регуляризованное уравнение получается за счет введения в уравнение теплопроводности дополнительного слагаемого с параметром регуляризации. Это позволяет получить регуляризованное решение данной задачи в виде ряда, который хорошо сходится. Показано, что если решение исходной задачи существует, то разность между точными решениями исходного уравнения и регуляризованного решения стремится к нулю при стремлении параметра регуляризации к нулю в пространстве функций, суммируемых с квадратом. Получены некоторые оценки для разности точного и регуляризованного решений.

***Ключевые слова:** регуляризация, задача Коши, некорректные задачи, метод квазиобращения, уравнение теплопроводности, псевдопараболическое уравнение, малый параметр.*

The paper contains new results on the modified quasi-reversal method for solving one ill-posed heat equation with reverse time. The paper proposes a method for regularizing the solution of the inverse problem. The regularized equation is obtained by introducing an additional term with the regularization parameter into the heat equation. This makes it possible to obtain a regularized solution of this problem in the form of a series that converges well. It is shown that if a solution to the original problem exists, then the difference between the exact solutions of the original equation and the regularized solution tends to zero as the regularization parameter tends to zero in the space of square-summable functions. Some estimates are obtained for the difference between the exact and regularized solutions.

***Key words:** Regularization; Cauchy problem; ill-posed problem; quasi-reversal method; heat equation, pseudoparabolic equation, small parameter.*

Киришүү. Белгилүү акыркы убакта $t = T$маалыматтар $u(x,t)$ температуранын бөлүштүрүлүшүнөн биз $t < T$ болгон мурунку убактагы температуранын бөлүштүрүлүшүн табышыбыз керек. Бул маселе тескери убактагы жылуулук өткөргүчтүн теңдемеси үчүн Коши маселеси деп аталат. Белгилүү болгондой, бул маселе Адамардын маанисинде корректүү эмес коюлган; башкача айтканда, чыгарылыштар дайыма эле жашай бербейт жана алар жашаган учурда, алар берилген маалыматтарга үзгүлтүксүз көз каранды болбойт, б.а.баштапкы маалыматтардын кичине өзгөрүүсүнө, тиешелүү $u(x,t)$ чыгарылышынын чоң өзгөрүүсү туура келиши мүмкүн.

Ошондуктан бул маселе ар кандай регуляризациялоо ыкмаларын колдонуу менен чечилет. Алардын бири Лионстун ыкмасы [4], ал квазиинверсиялоо ыкма деп аталат. Квазиинверсия ыкмасы баштапкы теңдемени козгоодон турат жана ал колдонулганда теңдеменин дифференциалдык формасы сакталат. Башкача айтканда, каралган маселе корректуу коюлган маселелердин үй-бүлөсү менен алмаштырылат жана анын чыгарылышы белгилүү шарттарда баштапкы маселенин чыгарылышына жакындайт. Квазинверсия ыкмасын биринчи жолу убакыттын тескери агымы менен жылуулук теңдемесин чыгарууда француз окумуштуусу Р.Лион колдонгон, андан ары бул ыкма [5-7] иштеринде өнүктүрүлгөн.

1. Маселенин коюлушу жана тескери убакыттагы Коши маселеси

Π_T тик бурчтугунда төмөнкү шарттарды канааттандыруучу $u(x,t)$ функциясын табуу талап кылынсын:

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), (x,t) \in \Pi_T \quad (1)$$

$$u(x,T) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le \pi, \quad (2)$$

$$u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T. \quad (3)$$

мында $\Pi_T = \{(x,t) | 0 < x < \pi,\ 0 < t < T\}$,$\varphi(x)$, $f(x,t)$ - берилген функциялар.

Орун алат

1-теорема. Мейли $\phi(x) \in L_2(0,\pi)$, $f(x,t) \in C([0,T]; L(0,\pi))$ жана$\varphi'(0) = 0,\ \varphi'(l) = 0$ макулдашуу шарттары жана

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\varphi_k e^{k^2 T} - \int_0^T e^{k^2 s} f_k(s) ds \right] < +\infty$$

барабарсыздыгы аткарылсын.

Анда (1)-(3) маселесинин жалгыз чыгарылышы жашайт жана ал

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\varphi_k e^{k^2(T-t)} - \int_t^T e^{-k^2(t-s)} f_k(s) ds \right] \cos k\,x \quad (4)$$

формуласы менен берилет.

Мында

$$\varphi_k = \frac{2}{\pi} < \varphi(x), \cos k\,x > = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos k\,x dx,\ k = 0,1,2,\ldots,$$

$$f_k(t) = \frac{2}{\pi} < f(x,t), \sin k\,x > = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\ kx f(x,t) dx,\ k = 0,1,2,\ldots,$$

ал эми$< \cdot,\cdot >$ -$L_2(0,\pi)$ мейкиндигиндеги скалярдык көбөйтүү.

Далилдөө. (1)-(3) маселесинин чыгарылышын төмөнкү формада издейбиз:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos k\,x, \quad (5)$$

мында

$$u_k(t) = \frac{2}{\pi} (u(x,t), \cos k\,x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x,t) \cos k\,x dx, \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

$\varphi(x)$, $f(x,t)$ функцияларын Фурье катарына ажыратабыз:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \cos k\,x, \quad \varphi_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos k\,x dx, \quad k = 0,1,2,\ldots \quad ,$$

$$f(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t) \cos k\,x,\ f_k(t) == \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x,t) coskxdx, \quad k = 0,1,2,\ldots \quad .$$

Анда (1)–(3) маселесине Фурье ыкмасын формалдуу түрдө колдонуп

$$\begin{cases} u_0'(t) = \frac{f_0(t)}{2}\pi, \\ u_0(T) = \frac{\varphi_k}{2}, \end{cases}, \qquad k = 0, \quad (6)$$

$$\begin{cases} u_{kt}(t) + k^2 u_k(t) = f_k(t), \\ u_k(T) = \varphi_k \end{cases}, \qquad k \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

маселелерин алабыз.

(6),(7) маселелеринин чыгарылышы болуп

$$u_0(t) = \frac{\varphi_0}{2} - \int_t^T f_0(s) ds,\ k = 0, \quad (8)$$

$$u_k = \varphi_k e^{k^2(T-t)} - \int_t^T e^{-k^2(t-s)} f_k(s) ds,\ k \in \mathbb{N} \quad (9)$$

функциялары саналат. (8),(9) дарды (5) ке коюп (4) формуласын алабыз.

(4) формуласынан (1)-(3) маселесин чыгарылышынын жалгыздыгы жана Адамардын мисалы келип чыгат.

Мейли (1)-(3) маселесинде $f(x,t) = 0$ и $\varphi(x) = \frac{1}{n} cos\ nx$. Анда (1)-(3) маселеси

$$u_n(x,t) = \frac{1}{n} cos\, n\, x e^{n^2(T-t)}$$

формуласы менен аныкталган жалгыз чыгарылышка ээ.

Демек, $\varphi(x) = \frac{1}{n} cos\, n\, x$үчүн $u_n(x,t) = \frac{1}{n} cos\, n\, x e^{n^2(T-t)}$ чыгарылышы n өскөн сайын чексиз өсөт, ал эми $n \to \infty$ да $\varphi(x) = \frac{1}{n} cos\, n\, x$ нөлгө умтулат.

Ошентип, жылуулук өткөргүчтүн теңдемеси үчүн Коши маселеси корректүү эмес коюлушун аныктадык.

Регуляризациялоо жана каталарды баалоо. Биз псевдопараболикалык регуляризацияны колдонобуз, ал (1) - (3) маселесин төмөнкү маселе менен алмаштыруудан турат:

$$v_t - v_{xx} - \varepsilon v_{xxt} = f(x,t), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t < T \tag{10}$$

$$v(x,T) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{11}$$

$$v_x(0,t) = v_x(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{12}$$

$\varepsilon > 0$- кичи параметри менен.

Төмөнкүдөй суроолор жаралат:

1) Ар бири $\varepsilon > 0$ үчүн (10) - (12) маселенин жалгыз чыгарылышы жашайбы жана ал берилген функциялардан үзгүлтүксүз көз карандыбы;

2) (1) - (3) маселесинин чыгарылышы $\varepsilon \to 0$ да (10) - (12) маселесинин чыгарылышына умтулабы (эгерде ал жашаса)?

3) (10)-(12) маселесин жакындаштырып чыгаруунун конструктивдүү ыкмалары барбы?

Бул суроолорго төмөнкү теорема жооп берет.

2-теорема. Мейли $\varphi(x)$, $f(x,t)$ функциялары үчүн 1-теореманын шарттары аткарылсын.Анда (10)-(12) маселесинин чыгарылышы жашайт ,жалгыз жана

$$\|v_\varepsilon(x,t)\|_{L_2} \le exp(\frac{2}{\varepsilon}(T-t))\|\varphi(x)\|_{L_2} + \frac{1}{2}\left(e^{\frac{2}{\varepsilon}(T-t)} - 1\right)\|f\|_{L_2}^2. \tag{13}$$

баалоосун канааттандырат.

Далилдөө. Жогорудагыдай эле (10)-(12) маселенин чыгарылышы төмөнкү формада издейбиз:

$$v_\varepsilon(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \cos k\, x, \tag{14}$$

мында

$$v_{\varepsilon k}(t) = \frac{2}{\pi}(v_\varepsilon(x,t), cos\, k\, x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi v_\varepsilon(x,t)\, cos\, k\, x dx, \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

Анда (10)-(12) маселесине Фурье ыкмасын формалдуу түрдө колдонуп

$$\begin{cases} v'_{\varepsilon 0}(t) = \frac{f_0(t)}{2} \pi, \\ v_{\varepsilon 0}(T) = \frac{\varphi_0}{2} \end{cases} \qquad k = 0, \tag{15}$$

$$\begin{cases} v_{\varepsilon k t}(t) + \frac{k^2}{1+\varepsilon k^2} v_{\varepsilon k}(t) = \frac{1}{1+\varepsilon k^2} f_k(t), \\ v_{\varepsilon k}(T) = \varphi_k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

маселесин алабыз.

(15), (16) маселелерин чыгарып

$$v_{\varepsilon 0}(t) = \frac{\varphi_0}{2} - \int_t^T f_0(s) ds, \ k = 0, \tag{17}$$

$$v_{\varepsilon k}(t) = \varphi_k e^{\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(T-t)} - \frac{1}{1+\varepsilon k^2}\int_t^T e^{-\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(t-s)} f_k(s) ds, \quad k \in \mathbb{N} \tag{18}$$

функцияларын алабыз.

Анда (17),(18) ти (14) ке коюп, (10)-(12) маселесинин чыгарылышы $v_\varepsilon(x,t)$ функциясын алабыз:

$$v_\varepsilon(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\varphi_k e^{\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(T-t)} + \frac{1}{1+\varepsilon k^2}\int_t^T e^{-\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(t-s)} f_k(s)ds\right]\cos\, kx. \quad (19)$$

Эми (10) -(12) маселенин чыгарылышынын туруктуулугуна токтололу.

Ал эми

$\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2} \le \frac{1}{\varepsilon}$

болгондуктан, (19) барабардыгынан

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_k|^2\, exp\left(\frac{2k^2}{1+\varepsilon k^2}(T-t)\right) \le exp(\frac{2}{\varepsilon}(T-t))\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|^2 = exp(\frac{2}{\varepsilon}(T-t))\|\varphi\|^2,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{1+\varepsilon k^2}\int_t^T e^{-\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(t-\tau)} f_k(\tau)d\tau\right]^2 \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+\varepsilon k^2}\int_t^T e^{\frac{2}{\varepsilon}(\tau-t)}d\tau \int_t^T |f_k(\tau)|^2\, d\tau \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon k^2)}\left(e^{\frac{2}{\varepsilon}(T-t)}-1\right)\int_t^T |f_k(\tau)|^2\, d\tau \le \frac{1}{\pi}\left(e^{\frac{2}{\varepsilon}(T-t)}-1\right)\int_0^T\int_0^{\pi}|f(s,\tau)|^2\, dsd\tau \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\left(e^{\frac{2}{\varepsilon}(T-t)}-1\right)\|f\|_{L_2}^2.$$

Бул барабарсыздыктардан (13) баалоосун алабыз.

Ошентип, баштапкы шарттарга карата (10)-(12) маселесинин чыгарылыштарынын туруктуулугун мүнөздөгөн (13) баалоосун алдык. Демек, (10)-(12) маселеси $\varepsilon > 0$ үчүн Адамардын маанисинде корректүү коюлган.

Биздин максат кандайдыр бир шарттар аткарылганда

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_0^{\pi}|v_\varepsilon(x,t) - v(x,t)|^2 dx = 0 \quad (20)$$

орун аларын көрсөтүү.

(20) барабардыгы $0 \le t \le T$ нын кандайдыр бир маанилеринде φ жана f функциялары үчүн Фурье коэффициенттери

$\varphi_k\, exp(k^2T) \le C$ жана $\int_t^T e^{-2k^2(t-s)}\, f_k^2(\tau)d\tau \le C$

шарттарын канаттандырганда орун аларын көрсөтөбүз.

Ошондуктан $0 \le t \le T$ үчүн төмөнкү сумманы баалоо:

$$B_\varepsilon(x,t) = B_\varepsilon(x,t,\varphi) + B_\varepsilon(x,t,f) = v_\varepsilon(x,t) - v(x,t) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\left[exp(k^2(T-t)) - exp\left(\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(T-t)\right)\right] + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_t^T\left(e^{-k^2t-s)} - \frac{e^{-\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(t-s)}}{1+\varepsilon k^2}\right)f_k(\tau)d\tau\right]\cos\, kx. \quad (21)$$

(1)-(3) маселеси Тихонов боюнча корректүү коюлган, ал эми ***M*** корректүүлүк көптүгү

$\left\{\int_0^{\pi} u^2(x,0)dx\right\}^{1/2} \le C.$

барабарсыздыгы менен аныкталат деп алалы.

(1)-(3) маселенин u так чыгарылышынан v_ε четтөөсүнун маанисин (21) шарты же

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2\, exp\, 2\,(k^2T) \le C.$$

шарты менен баалайлы.

Ал эми

$$\varphi_k\left[exp(k^2(T-t)) - exp\left(\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(T-t)\right)\right]$$

туюнтмасы

$$\varphi_k\, exp(k^2T) \le C,$$

шарты аткарылганда

$$C\, exp(-k^2T)\left[exp(k^2(T-t)) - exp\left(\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(T-t)\right)\right] =$$

$$= C\, exp(-k^2t)\left[1 - exp\left(-\frac{\varepsilon k^4}{1+\varepsilon k^2}(T-t)\right)\right],$$

функциясынан ашпайт.

Ошол эле сыяктуу

$$\int_t^T e^{-2k^2(t-s)}\, f_k^2(\tau)d\tau \le C$$

орун алганда

$$\int_t^T e^{-2k^2(t-s)}\left(1 - \frac{e^{-\frac{\varepsilon k^4}{1+\varepsilon k^2}(t-s)}}{1+\varepsilon k^2}\right)^2 f_k^2(\tau)d\tau \le C\int_t^T\left(1 - \frac{e^{-\frac{\varepsilon k^4}{1+\varepsilon k^2}(t-s)}}{1+\varepsilon k^2}\right)^2 d\tau.$$

Анда (21) туюнтмасынын биринчи; экинчи суммаларын төмөнкүчө жазсак болот

$$\|B_\varepsilon(x,t,\varphi)\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2\left[exp(k^2(T-t)) - exp\left(\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(T-t)\right)\right]^2\right\}^{1/2} \le$$

$$\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left(exp(-2k^2t)\left[1 - exp\left(-\frac{\varepsilon k^4}{1+\varepsilon k^2}(T-t)\right)\right]^2\right)^{1/2}. \quad (22)$$

$$\|B_\varepsilon(x,t,f)\| = \left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_t^T\left(e^{-k^2t-s)} - \frac{e^{-\frac{k^2}{1+\varepsilon k^2}(t-s)}}{1+\varepsilon k^2}\right)f_k(\tau)d\tau\right]cos\ kx\right\}^{1/2} \quad (23)$$

(22), (23) төн (10)-(12) регуляризацияланган маселенин чыгарылышы$v_\varepsilon(x,t)$ (1)-(3) маселесинин $u(x,t)$ так чыгарылышына умтулат.

Корутунду. Бул макалада биз жылуулук теңдемеси үчүн тескери убакыттагы корректүү эмес коюлган Коши маселесин изилдедик. Маселени изилдөөдө биз төмөнкү ыкмаларды колдондук: Фурье, псевдопараболикалык регуляризация, квазинверсия.

Литература:

1. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. - Бишкек: Илим, 2001. - 181с.
2. Аблабеков Б.С., Байсеркеева А.Б. О разрешимости смешанных задач для двумерного псевдопараболического уравнения / Приволжский научный вестник. 2016. - №10(62). - С. 5-9.
3. Вабищевич П.Н. Нелокальные параболические задачи и обратная задача теплопроводности. / Дифференц. уравнения, 1981. - Том 17, №7. - 1193-1199.
4. Латтес Р., Лионс Ж. Л. Метод квазиобращения и его приложения. - М.: Мир, 1970. - 336 с.
5. Colton D. The Approximation of Solutions to the Backwards Heat Equation in a Nonhomogeneous Medium. / J. Math. Anal. d4ppl. 72 (1979). - 418-429.
6. Trong D.D., Quan P.H., Khanh T.V., Tuan N.H. A nonlinear case of the 1-D backward heat problem: Regularization and error estimate, Z. Anal. Anwend. 26 (2) (2007) 231-245.
7. Showalter R.E. Final value problem for evolut1on equat1ons. / J. Math. Anal. Appl. - 1974. - V.47. - P.563-572.