МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

DOI:10.26104/NNTIK.2022.1.6.001

Аблабеков Б.С., Касымалиева А.А., Асанов А.Р.

БУССИНЕСКА-ЛЯВАНЫН ТEҢДЕМЕСИ ҮЧҮН ЖАРЫМ ОКТОГУ КОШИ МАСЕЛЕСИНДЕГИ БУЛАК ФУНКЦИЯСЫН АНЫКТОО ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕСИ ЖӨНҮНДӨ

Аблабеков Б.С., Касымалиева А.А., Асанов А.Р.

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА В УРАВНЕНИИ БУССИНЕСКА-ЛЯВА В СЛУЧАЕ ЗАДАЧИ КОШИ НА ПОЛУОСИ

B. Ablabekov, A. Kasymalieva, A. Asanov

ON AN INVERSE PROBLEM OF DETERMINING THE SOURCE FUNCTION IN THE BUSSINESK-LOVE EQUATION IN THE CASE OF THE CAUCHY PROBLEM ON THE HALF-AXIS

УДК: 517.95

Математикалык физиканын тескери маселелерин изилдөөдө тиешелүү түз маселенин (биздин учурда биринчи түрдөгү чек ара шарттары менен жарым октогу чектик маселе) айкын чыгарылышын жана анын касиеттерин колдонуу абдан керек. Макалада Буссинеска-Ляванын теңдемесиндеги убакыттан көз каранды болгон булак функциясын аныктоо тескери маселеси изилденет. Маселенин маңызы, анын чыгарылышы менен бирге булак функциясын табуу талап кылынат. Маселе жарым тегиздикте каралат. Кошумча шарт катары ички чекиттеги чыгарыштын шарты колдонулат. Фундаменталдуу чыгарылыштын жардамы менен каралып жаткан тескери маселе экинчи түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемесин чыгарууга келтирилет. Каралып жаткан маселенин классикалык чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү теорема далилденген. Коюлган маселенин чыгарылышынын жашашын жана жалгыздыгын далилдөө үчүн Вольтерранын оператордук теңдемелеринин ыкмасы колдонулат.
***Негизги сөздөр**: Буссинеска-Ляванын теңдемеси, тескери маселе, Вольтерранын теңдемеси, интегралдык теңдеме.*

При исследовании обратных задач математической физики важную роль играет знание решений соответствующей прямой (в данном случае краевой задачи на полуоси с граничными условиями первого рода) задачи. В статье исследована обратная восстановления источника, зависящая от времени в задаче и в уравнении Буссинеска-Лява. Суть задачи состоит в том, что требуется вместе с решением найти правую часть. Задача рассматривается в полуплоскости. В качестве дополнительного условия используется условие внутреннего переопределения. С помощью фундаментального решения рассматриваемая обратная задача сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода. Доказаны теоремы существования и единственности классического решения рассматриваемой задачи. Для доказательства существования и единственности решения поставленной задачи применяется метод операторных уравнений Вольтерра.
***Ключевые слова:** уравнение Буссинеска-Лява, обратная задача, уравнения Вольтерра, интегральное уравнение.*

In the study of inverse problems of mathematical physics, an important role is played by the knowledge of the solutions of the corresponding straight line (in this case, a boundary value problem on a semiaxis with boundary conditions of the first kind) of the problem. The article investigates the inverse recovery of the source in the time-dependent problem in the Boussinesq-Love equation. The essence of the problem is that it is required, together with the solution, to find the right side. The problem is considered in a half-plane. The internal override condition is used as an additional condition. With the help of a fundamental solution, the inverse problem under consideration is reduced to solving a Volterra integral equation of the second kind. Existence and uniqueness theorems for the classical solution of the problem under consideration are proved. To prove the existence and uniqueness of the solution of the problem posed, the method of operator equations of Volterra is used.
***Key words:** Boussinesq-Love equation, inverse problem, Volterra equations, integral equation.*

Введение. Обратными задачами для дифференциальных уравнений математической физики называются задачи определения неизвестных коэффициентов, свободных членов, а также начальных или граничных условий и решений дифференциальных уравнений по известной дополнительной информации (переопределении) о решении прямой задачи [1].

Отметим, что уравнения Буссинеска-Лява возникают при моделировании продольных волн в упругой балке с учетом поперечной инерции, а также в задачах, связанных с исследованием распространением внутренних волн в каналах, заполненных стратифицированной жидкостью.

Целью работы является нахождение достаточных условий для существования и единственности решения рассматриваемой обратной задачи.

Различные начально-краевые задачи для уравнения Буссинеска-Лява в различной постановке изучались в работах [1]-[5].

Обратные задачи являются динамично развивающимися направлениями современной математики и им посвящены очень много работ. Обратным задачам для гиперболических и параболических уравнений второго порядка посвящены очень много работ. Например, в монографиях В.Г. Романова [6,7], С.И. Кабанихина [8] исследованы различные коэффициентные обратные задачи для гиперболических уравнений, а монографии Ю.Я. Белова [9], М. Иванчова [10], А.И. Прилепко, И.А. Васина, Д.Г. Орловского [11] посвящены к изучению обратных задач для параболических уравнений второго порядка. В монографиях [12, 13] исследованы обратные задачи для псевдопараболических, псевдогиперболических и гиперболических уравнений третьего порядка.

Обратные задачи для уравнения Буссинеска-Лява изучались Б.С. Аблабековым [1], Б.С. Аблабековым, А.К. Касымалиевой [14], Б.С. Аблабековым, А.К. Курманбаевой [15], Я.Т. Мегралиевым [16] и Г.В. Намсариевой [17].

Пусть $Q_T^+ = \{(x,t): x \in (0,+\infty),\ t \in (0,T]\}$, $T > 0$ −произвольное фиксированное число.

1. Постановка задачи и основной результат.

Сначала введем необходимые обозначения и определения.

Пусть $Q_T^+ = \{(x,t): x \in (0,+\infty),\ t \in (0,T]\}$.

$\boldsymbol{C^{(n,m)}(\bar{Q}_T^+)}$ − пространство функций $v(x,t)$, определенных при $(x.t) \in \bar{Q}_T^+$ и таких, что $\boldsymbol{D_x^k D_t^l v \in C(\bar{Q}_T^+)}$, $\boldsymbol{0 \le k \le n}$, $\boldsymbol{0 \le l \le m}$ **.**

Определение 1. Будем говорить, что функция $v(x,t)$ принадлежит классу $M_\gamma(Q_T^+)$, если существуют вещественное число $\gamma \ge 0$ и непрерывная положительная функция $C(t)$ такие, что имеет место оценка

$$\left|v(x,t)\right| \le C(t)\exp\left\{\gamma\left|x\right|\right\},\ x \in [0,+\infty), \quad 0 \le t \le T\ .$$

Через $C_{M_\gamma}^{(n,m)}(Q_T^+)$ будем обозначать пространство функций из $\boldsymbol{C^{(n,m)}(Q_T^+)}$,

которые вместе со своими производными вплоть до порядка (*n,m*) принадлежат $M_\gamma(Q_T)$, т.е. $D_x^k D_t^l v \in M_\gamma(Q_T^+)$, $0 \le k \le n$, $\quad 0 \le l \le m$.

Аналогично определяется пространство $\boldsymbol{C_{M_\gamma}^{(n)}(0,+\infty)}$.

Обратная задача. На множестве Q_T^+ рассмотрим обратную задачу нахождения пары функций $\{u(x,t), f(t)\}$ из уравнения

$$u_{tt} - u_{xx_{tt}} - u_{xx} = f(t)h(x,t) + g(x,t), \quad (x,t) \in Q_T^+, \tag{1}$$

и условий

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in [0,+\infty), \tag{2}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(x_0,t) = \psi(t), \quad 0 < x_0 < +\infty, \quad 0 \le t \le T,, \tag{4}$$

где $u_0(x),\ u_1(x),\ h(x,t),\ g(x,t)$ и $\varphi(t),\ \psi(t)$ - некоторые заданные функции.

Определение 2. Пара функций $\{u(x,t), f(t)\}$ называется решением обратной задачи (1)-(4), если

а) $u(x,t) \in C_{M_\gamma}^{(2,2)}(Q_T^+) \cap C(\bar{Q}_T^+)$;

б) $f(t) \in C[0,T]$;

в) удовлетворяются условия (1) -(4).

Теорема 1. Пусть $u_0(x),\ u_1(x) \in C_{M_\gamma}^{(5)}[0,+\infty)$, $\varphi(t),\ \psi(t) \in C^2[0,T]$ $\quad h(x,t), g(x,t) \in C_{M_\gamma}^{(2,0)}(\overline{Q}_T^+)$, $h(0,t) = 0, |h(x_0,t)| \ge h_0 > 0$ и выполнены условия согласования $u_0(0) = \varphi(0) = 0$, $\quad u_1(0) = \varphi'(0) = 0$, $u_0''(0) = u_1''(0) = 0$, $u_0(x_0) = \psi(0)$. Кроме того выполнено $1 + \frac{1}{2}\int_0^\infty\left(e^{-|x_0-y|} - e^{-|x_0+y|}\right)h_{yy}(y,t)dy \ne 0$. Тогда существует единственное решение обратной задачи (1)-(4) .

Доказательство. Положим в уравнению (1) $x = x_0$, и учитывая условие (4), получим

$$f(t) = [\psi''(t) - g(x_{0,}t) - (u_{tt} + u)_{xx}(x_0, t)]/h(x_0, t). \quad (5)$$

Подставляя (4) в (1) и вводя в рассмотрение функцию $u_{xx}(x,t) = v(x,t)$, имеем

$$v_{tt} - v_{xx_{tt}} - v_{xx} = f(t)h_{xx}(x,t) + g_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad (6)$$

$$v(x,0) = u_0''(x), \quad v_t(x,0) = u_1''(x), \quad x \in [0,+\infty). \quad (7)$$

$$v(0,t) = \Phi(t), 0 \le t \le T, \quad (8)$$

где

$$\Phi(t) = u_0''(0)\cos t + u_1''(0)\sin t + \int_0^t \sin(t-\tau)(\varphi''(\tau) + g(0,\tau))d\tau.$$

Используя фундаментальное решение

$$E(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu|x|}}{\sqrt{1+\mu^2}} \sin\left(\frac{t\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)d\mu$$

оператора

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

построенного в работе [5], решение задачи (7), (8) представим в виде

$$v(x,t) = v_0(x,t) + \int_0^t \int_0^\infty G(x,y,t-\tau)f(\tau)h_{yy}(y,\tau)dyd\tau, \quad (9)$$

где

$$v_0(x,t) = 2\Phi(t)E_{tt}(x,0) + \int_0^\infty G(x,y,t)\, L_0[u_0''(y)]dy +$$
$$+ \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} G(x,y,t)\, L_0[u_1''(y)]dy + \int_0^t \int_0^\infty G(x,y,t)g_{yy}(y,\tau)dyd\tau, \quad (10)$$

$$G(x,y,t) = E(x-y,t) - E(x+y,t,)\; L_0 = \frac{d^2}{dx^2} - I.$$

Дифференцируем (9) два раза по переменной t учитывая следующие свойства фундаментального решения [5]:

$$E(x,0) = 0,\; E_t(x,0) = -\frac{1}{2}e^{-|x|},$$

имеем

$$v_{tt}(x,t) = v_{0tt}(x,t) - \frac{f(t)}{2}\int_0^\infty \left(e^{-|x-y|} - e^{-|x+y|}\right) h_{yy}(y,t)dy +$$
$$+ \int_0^t \int_0^\infty G_{tt}(x,y,t-\tau)f(\tau)h_{yy}(y,\tau)dyd\tau, \quad (11)$$

Положив в (9), (11) $x = x_0$, и подставляя их в (5) для функции $f(t)$ получим

$$\lambda(t)f(t) = \int_0^t K(t,\tau)f(\tau)d\tau + F(t), \quad (12)$$

где

$$\lambda(t) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{-|x_0-y|} - e^{-|x_0+y|}\right) h_{yy}(y,t)dy,$$

$$K(t,\tau) = -\frac{1}{h(x_0,t)}\int_{-\infty}^{\infty}(G_{tt}+G)(x_0,y,t-\tau)h_{yy}(y,\tau)d\tau,$$
$$F(t) = [\psi''(t) - (v_{0t} + v_0)(x_0,t) - g(x_0,t)]/h(x_0,t).$$

Так как $\lambda(t)$ на отрезке $[0,T]$ не обращается в нуль и уравнение (11) будет интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода.

В силу условий наложенных на функции $u_0(x)$, $u_1(x)$, $h(x,t)$, $g(x,t)$ и $\psi(t)$ $\psi(t)$ заключаем, что функции $k(t,\tau)$, $F(t)$ являются непрерывными. Следовательно, уравнение (12) имеет единственное непрерывное решение $f(t)$. Подставляя найденную функцию $f(t)$ в (9) однозначно находим функцию $v(x,t)$, а затем функцию $u(x,t)$. Теорема доказана.

Литература:

1. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для дифференциальных уравнений математической физики. - Бишкек, 1997. - 184с.
2. Аблабеков Б.С., Курманбаева А.К. О разрешимости линейной обратной задачи определения правой части в уравнении Буссинеска-Лява // Сб. науч. работ XX Международной научной конференции Евразийского Научного Объединения. (г.Москва август 2016). - Москва: ЕНО 2016, №8 (20). - С. 21-24.
3. Аблабеков Б.С., Касымалиева А.А. О разрешимости решений первой начально-краевой задачи для уравнения Буссинеска-Лява. / Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, 2017, № 2. - С. 3-8.
4. Аблабеков Б.С., Касымалиева А.А. О разрешимости одной начально-краевой задачи для уравнения Буссинеска-Лява / Евразийское научное объединение», №11 (45) - Ноябрь, 2018. - С. 4-9.
5. Габов С.А. Линейные задачи нестационарных внутренных волн [Текст] / С.А. Габов, А.Г. Свешников. - М.: Наука, 1990. - 344 с.
6. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. - М.: Наука, 1984. - 264 с.
7. Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах. - М.: Научный мир, 2005. - 295 с.
8. Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications. Berlin: De Gruyter, 2011.
9. Belov Yu.Ya. Inverse problems for partial differential equations. Utrecht: VSP, 2002.
10. Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type. Mathematical studies. Monograph Series. 2003.
11. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 2000.
12. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. - Бишкек: Илим, 2001. - 183 с.
13. Аблабеков Б.С., Асанов А.Р., Курманбаева А.К. Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка. - Бишкек: Илим, 2011. - 156 с.
14. Аблабеков Б.С., Касымалиева А.А. Обратная задача определения источников в уравнении Буссинеска-Лява с финальным переопределением. // Вестник ОшГУ, спец. выпуск, №1. - Ош, 2013. - С. 27-31.
15. Аблабеков Б.С., Курманбаева А.К. О разрешимости линейной обратной задачи определения правой части в уравнении Буссинеска-Лява // Сборник научных работ XX Международной научной конференции Евразийского научного объединения. (г.Москва, август 2016). - Москва: ЕНО 2016, №8 (20). - С. 21-24.
16. Мегралиев Я.Т. О разрешимости одной обратной задачи для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка с интегральным условием. // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. - 2013, №1(25). - С. 19-31.
17. Намсараева Г.В. Линейные обратные задачи для некоторых аналогов уравнения Буссинеска. / Математические заметки СВФУ 2014. - Т. 21. - №2. - С. 47-59.