DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



***МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ***

***МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ***

***MATHEMATICAL SCIENCES***

***Алымбаев А.Т., Көчөрбаева Б.Э., Токтогулова Ж.Б.***

# ТУРУКТУУ КОЭФФИЦИЕНТТҮҮ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ЖАНА КЕРЕКТҮҮ ТЕҢДЕМЕЛЕРДИ ПРЕДМЕТТЕРДИН БАЙЛАНЫШТАРЫНЫН АЛКАГЫНДА КАРАЛЫШЫ

***Алымбаев А.Т., Көчөрбаева Б.Э., Токтогулова Ж.Б.***

# РАССМОТРЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И НЕОБХОДИМЫХ УРАВНЕНИЙ В РАМКАХ СВЯЗЕЙ С ПРЕДМЕТАМИ

***A. Alymbaev, B. Kochorbaeva, Zh. Toktogulova***

# CONSIDERATION OF CONSTANT COEFFICIENTS DIFFERENTIAL AND NECESSARY EQUATIONS WITHIN THE FRAMEWORK OF RELATIONS WITH SUBJECTS

*УДК: 517.2*

*Макалада экинчи тартиптеги туруктуу коэффициенттүү дифференциалдык жана чектүү айырмадагы теңдемелерди окутуудагы түшүнүктөрүнүн жалпылыктарын жана өзгөчөлүктөрүн, окутуу процессинде кароо маселеси каралат. Теңдемелердин фундаменталдык чыгарылышы, тартиби, жалпы чыгарылыштары, Коши маселеси сыяктуу маселелер каралып түшүндүрмө берилет. Дискреттик математиканын бөлүмдөрүнө: көптүктөр теориясы, матлогика, комбинаторика, графтар теориясы, эсептөө математикасы ж.б. атоого болот. Үзгүлтүксүз математикага: функция түшүнүгү, дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөрдүн теориясы, дифференциалдык жана интегралдык теңдемелердин теориясы ж.б. разделдери камтыларын белгилесек болот. Чектүү айырмадагы теңдемелер, дифференциалдык теңдемелерди сандык ыкмалар менен изилдөөдө пайда болот. Ошондуктан дифференциалдык теңдемелердин касиеттери чектүү айырмага өткөн учурда сакталышы керек. Ошондой болсо да алардын ортосунда өзгөчөлүк айырмалар дагы бар. Жалпылыктардын жана өзгөчөлүктөрдүн касиеттерин, экинчи тартиптеги туруктуу коэффициенттүү дифференциалдык жана чектүү айырмадагы теңдеменин түшүнүктөрүн чечмелөө аркылуу талдап көрөбүз.*

***Негизги сөздөр:*** *дифференциалдык тендемелер, чектүү айырмадагы тендемелер, тендеменин тартиби, фундаменталдык чыгарылыш, жалпы чыгарылыш, Коши маселеси.*

*В статье рассматривается вопрос учета в процессе обучения общих черт и особенностей понятий обучения уравнениям второго порядка с постоянными коэффициентами и конечными разностями. Рассмотрены и объяснены такие вопросы, как фундаментальное решение уравнений, порядок, общие решения, задача Коши. Разделами дискретной математики являются: теория множеств, математика, комбинаторика, теория графов, вычислительная математика и другие. Следует отметить, что в непрерывной математике: понятие функции, теория дифференциального и интегрального исчисления, теория дифференциальных и интегральных уравнений и другие. Уравнения с конечными разностями возникают при изучении дифференциальных уравнений численными методами. Поэтому свойства дифференциального уравнения должны сохраняться в случае конечной разности. Однако некоторые различия между ними все же есть. Мы анализируем свойства общностей и особенностей, интерпретируя понятия уравнений с дифференциальными и конечными разностями постоянного коэффициента второго порядка.*

***Ключевые слова:*** *дифференциальные уравнения, разностные уравнения, порядок уравнений, фундаментальный вывод, общий вывод, задача Коши.*

*The article deals with the issue of taking into account in the learning process the common features and peculiarities of the concepts of teaching second-order equations with constant coefficients and finite differences. Questions such as the fundamental solution of equations, order, general solutions, the Cauchy problem are considered and explained. The article deals with the issue of taking into account in the learning process the common features and peculiarities of the concepts of teaching second-order equations with constant coefficients and finite differences. Questions such as the fundamental solution of equations, order, general solutions, the Cauchy problem are considered and explained. The sections of discrete mathematics are: set theory, mathematics, combinatorics, graph theory, computational mathematics, etc. It should be noted that in continuous mathematics: the concept of a function, the theory of differential and integral calculus, the theory of differential and integral equations, etc. Equations with finite differences arise in the study of differential equations by numerical methods. Therefore, the properties of the differential equation must be preserved in the case of a finite difference. However, there are still some differences between them. We analyze the properties of generalities and singularities by interpreting the concepts of equations with differential and finite differences of a constant coefficient of the second order.*

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



***Key words:*** *differential equations, difference equations, order of equations, fundamental inference, general inference, Cauchy problem.*

Азыркы учурда табигый, гуманитардык жана техникалык илимдердеги математикалык методдордун кенен, колдонулушунун натыйжасында, аталган илимдерди математикалаштыруу маселеси актуалдуу боло баштады. Мындан педагогикалык багыттагы адистердин математикалык деңгээлин көтөрүүгө өзгөчө мамиле жасоо маселеси келип чыкты. Буга себеп, математиканын идеяларын жана методдорун, предметтердин өз ара байланыштарынын принциинин негизинде окутуунун технологияларын колдоно билбестигинин начарлашы менен байланышкан. Классикалык үзүлтүксүз жана дискреттик математиканын өз-ара байланыштары күчөөдө, жана көптөгөн илимдердин тармактарындагы маселелердин чыгарылыштарын изилдөөдө, бир эле мезгилде үзгүлтүксүз жана дискреттик математикалык моделдер колдононулат. Бул жагдай математиканын жаратылышына жаны көз караштын пайда болушуна жана илимде, жашоодо - «дискреттик», «үзгүлтүксүз» түшүнүктөрүн колдонуунун көлөмүнүн айырмасынын салмагы өзгөрүшүнө алып келди. Натыйжада дискреттик математиканын методдору көпчүлүк изилдөөлөрдө пайдаланышы байкалууда.

Дискреттик математиканын бөлүмдөрүнө: көптүктөр теориясы, матлогика, комбинаторика, графтар теориясы, эсептөө математикасы ж.б. атоого болот. Үзгүлтүксүз математикага: функция түшүнүгү, дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөрдүн теориясы, дифференциалдык жана интегралдык теңдемелердин теориясы ж.б. разделдери камтыларын белгилесек болот.

Чектүү айырмадагы теңдемелер, дифференциалдык теңдемелерди сандык ыкмалар менен изилдөөдө пайда болот. Ошондуктан дифференциалдык теңдемелердин касиеттери чектүү айырмага өткөн учурда сакталышы керек. Ошондой болсо да алардын ортосунда өзгөчөлүк айырмалар дагы бар. Жалпылыктардын жана өзгөчөлүктөрдүн касиеттерин, экинчи тартиптеги туруктуу коэффициенттүү дифференциалдык жана чектүү айырмадагы теңдеменин түшүнүктөрүн чечмелөө аркылуу талдап көрөбүз.

**1. Теңдеменин жазылышы, тартиби:**

1) Дифференциалдык теңдеме

$$a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = g(x), x \in G \subset R, R = (-\infty, \infty) \qquad (1)$$

Экинчи тартиптеги туруктуу коэффициенттүү теңдеме. $a_0, a_1, a_2$ – туруктуу заттык сандар-теңдеменин коэффициенти, g(x) белгилүү функция, g(x)=0 болгон учурда теңдемен бир тектүү, ал эми g(x)≠0 болсо бир тектүү эмес теңдеме деп аталышат. Теңдемедеги белгисиз функциянын туундунун эң чоң тартиби, теңдеменин тартиби деп аталат.

2) Чектүү айырмадагы теңдеме

$$\mathrm{a}_0 f(\mathrm{x}+2) + \mathrm{a}_1 \mathrm{f}(\mathrm{x}+1) + \mathrm{a}_2 \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{q}(\mathrm{x}), \mathrm{x} \in \mathrm{G} \subset \mathrm{R}, \mathrm{R} = (-\infty, \infty) \qquad (2)$$

Экинчи тартиптеги туруктуу коэффициенттүү бир тектүү эмес теңдеме. $a_0, a_1, a_2$ – заттык сандар - коэффициенттер. Теңдеменин тартибин, теңдемедеги x+c – чоңдугундагы, c - санынын эн чоң мааниси эсептелет (2) теңдемеде c = 2.

**2. Теңдеменин чыгарылышы.**

1) Экинчи тартиптеги туундусу боло турган жана (1) теңдеме койгондо, теңдеменин теңдештике айландыруучу y=y(x) функциясы x∈G областында теңдеменин чыгарылышы деп аталат;

2) (2) теңдемеге койгондо, аны теңдештике айландыруучу f=f(x) функциясы x∈G областында теңдеменин чыгарылышы деп аталат.

**3. Мүнөздөөчү теңдеме.**

1) Бир тектүү дифференциалдык теңдеме

$$a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = 0 \qquad (3)$$

Теңдемени карайлы. Чыгарылышты y(x)=$e^{\lambda x}$, $\lambda$- изилделүүчү параметр түрүндө издейбиз. Бул функцияны (3) теңдемеге коюп $a_0\lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_2 e^{\lambda x} = 0$ барабардыгын алабыз. Мындан $e^{\lambda x} \neq 0$ болгондуктан

$$a_0 \lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda + a_2 = 0 \qquad (4)$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



теңдемесин алабыз. (4) Теңдеме мүнөздөөчү теңдеме деп аталат. Дискриминант D=$a_1^2 - 4a_0a_2$ белгисине жараша мүнөздөөчү теңдеменин эки $\lambda_1, \lambda_2$ тамыры болот. Эгерде а) D>0 болсо, анда $y_1$(x)=$e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ функциялары (3) теңдеменин жекече чыгарылыштарын түзөт. Теңдеменин жалпы чыгарылышы

y (x) =$c_1{}^{\lambda_1 x} + c_2{}^{\lambda_2 x}$,$c_1$ , $c_2$ – туруктуулар, формуласы аркылуу жазылат.

б) D=0, жекече чыгарылыштар $y_1$(x)=$e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = xe^{\lambda}$ функциялары аркылуу жазылып, жалпы чыгарылыш

y(x) =$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2{}^{\lambda_1 x}$, , $c_1, c_2$ – туруктуулар, формуласы аркылуу табылат.

в) D<0 болгон учурда мүнөздөөчү теңдеменин өз ара түйүндөш болгон эки тамыры $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ бар. $e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x \pm i\beta x}$=$e^{\alpha x}(cos\beta x \pm isin\beta x)$ экендигин эске алсак, анда жекече чыгарылыштар

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

функциялары аркылуу жазылат. Жалпы чыгарылыш

$$y(x) = e^{\alpha x}(\ c_1\cos x + c_2\sin\beta x),$$ формуласы аркылуу жазылат.

2) Бир тектүү чектүү айырмадагы теңдеме

$$a_0 f(x+2) + a_1 f(x+1) + a_2 f(x) = 0 \qquad (5)$$

Теңдеменин чыгарылышын

$f(x) = \lambda^x$, $\lambda$-изделүүчү параметр, түрүндө издейбиз. Функцияны (5) теңдемеге коюп

$$a_0\lambda^{x+2} + a_1\lambda^{x+1} + a_2\lambda^x = \lambda^x(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0,$$

барабардыгын алабыз. Мындан $\lambda^x \neq 0$ болгондуктан

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,$$

мүнөздөөчү квадраттык теңдемени алабыз

а) D>0, болсо, анда $f_1(x) = \lambda_1^x, f_2(x) = \lambda_2^x$ жекече чыгарылыштарды алабыз. Теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$f(x)\ c_1\,\lambda_1^x + c_2\,\lambda_2^x,$$

формуласы аркылуу жазылат.

б) D=0, болгон учурда $f_1(x) = \lambda_1^x$, $f_2(x) = x\lambda_1^x$ функциялар жекече чыгарылыштарды аныкташат, ал эми

$$f(x) = \lambda_1^x(c_1 + c_2 x),$$

функция теңдеменин жалпы чыгарылышы болот.

в) D <0, болгон учурда

$$f_1(x) = \lambda_1^x = (\alpha + i\beta)^x = \alpha^x(cos\beta x + isin\beta x),$$
$$f_2(x) = \lambda_2^x = (\alpha - i\beta)^x = \alpha^x(cos\beta x + isin\beta x),$$

Жекече чыгарылыштын комплексттик функция түрүндө жазылышын берет. Бул функциялардан жекече чыгарылыштардын заттык түрү

$$g_1(x) = \alpha^x cos\beta x, g_2(x) = \alpha^x sin\beta x$$

функциялары аркылуу жазылып, жалпы чыгарылыш

$$f(x) = \alpha^x(c_1 cos\beta x + c_2 sin\beta x)$$

формула турундо жазылат.

**4. Коши маселеси.**

1) Дифференциалдык теңдеме.

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



Маселенин жазылышы:

$$a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = 0 \quad (6)$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0 \quad (7)$$

Эгерде $y_1(x)$, $y_2(x)$ теңдеменин жекече чыгарылыштары болсо, анда

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

теңдеменин жалпы чыгарылышын тузот (7) баштапкы шарттан

$$\begin{cases} y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = c_1 y'(x_0) + c_2 y'_2(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

$c_1, c_2$ туруктууларга карата теңдемелердин системасын алабыз. Системадан туруктууларды таап, Коши маселенин чыгарышын таба алабыз.

$$y(x) = c_1^0 y_1(x) + c_2^0 y_2(x).$$

2) Чектүү айырмадагы теңдеме

Маселенин жазылышы:

$$a_0 f(x+2) + a_1 f(x+1) + a_2 f(x) = 0 \quad (8)$$

$$f(x_0) = f_0, f(x_0+1) = f'_0 \quad (9)$$

$f_1(x), f_2(x)$ теңдеменин жекече чыгарылыштары болушсун, анда жалпы чыгарылыш

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

формуласынын негизинде аныкталат (9) шарттан

$$\begin{cases} f(x_0) = c_1 f_1(x_0) + c_2 f_2(x_0) = f_0 \\ f(x_0+1) = c_1 f_1(x_0+1) + c_2 f_2(x_0+1) = f_0^I \end{cases}$$

системасын алабыз. Системадан $c_1^0, c_1^0$туруктуулардын маагилерин таап, Коши маселенин чыгарылышын табабыз.

$$f(x) = c_1^0 f_1(x) + c_2^0 f_2(x)$$

**5. Бир тектүү эмес теңдеме**

1) Дифференциалдык теңдеме

$$a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = g(x) \quad (10)$$

Теңдеменин жалпы чыгарышын

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \bar{y}(x) \quad (11)$$

Формула аркылуу жазууга болот. Мында $\bar{y}(x)$ (10) теңдеменин жекече чыгарылышы. Жекече чыгарылышты туруктууларды вариациялоо ыкмасы (Лагранждын методу) менен тапсак болот:

Функция түзөбүз

$$\bar{y}(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) \quad (12)$$

мындан

$\bar{y}'(x) = c'_1(x)y_1(x) + c'_2(x)y_2(x) + c_1(x)y'_1(x) + c_2(x)y'_2(x)$, $c'_1(x)y_1(x) + c'_2(x)y_2(x) = 0$ деп алып,

$$\bar{y}'(x) = c_1(x)y'_1(x) + c_2(x)y'_2(x) \quad (13)$$

функцияны алабыз.

$$\bar{y}''(x) = c'_1(x)y'_1(x) + c'_2(x)y'_2(x) + c_1(x)y''_1(x) + c_2(x)y''_2(x), \quad (14)$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



(12), (13), (14) функцияларды (10) теңдемеге төмөндөгүдөй барабардыкты алабыз

$$c_1(x)\left(a_0y_1''(x)+a_1y_1'(x)+a_2y_1(x)\right)+\ c_2(x)\left(a_0y_2''(x)+a_1y_2'(x)+a_2y_2(x)\right)+$$
$$+a_0(c_1'(x)y_1'(x)+(c_2'(x)y_2'(x))=g(x) \qquad (15)$$

$y_1(x)$ жана$y_2(x)$ функциянын жекече чыгарылыштары болгондуктан, (15) барабардыктан $c_1'(x), c_2'(x)$ карата $c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x)=\frac{1}{a_0}g(x)$ теңдемесин алабыз.

Ошентип, $c_1'(x), c_2'(x)$ функцияларына карата теңдемелердин төмөндөгүдөй системасын түзө алабыз.

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x)+c_2'(x)y_2(x)=0 \\ c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x)=\dfrac{1}{a_0}g(x) \end{cases}$$

Мындан

$$\begin{cases} c_1'(x)=\frac{1}{a_0}*\frac{g(x)y_2(x)}{y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)\cdot y_1'} \\ c_2'(x)=\frac{1}{a_0}*\frac{g(x)y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)} \end{cases}(x) \qquad (16)$$

(16) барабардыктардан $c_1(x), c_2(x)$ функцияларын табабыз

$$c_1(x)=-\frac{1}{a_0}\int_{x_0}^{x}\frac{g(x)y_2(x)}{y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)}\,dx+c_1^0, \qquad (17)$$

$$c_2(x)=\frac{1}{a_0}\int_{x_0}^{x}\frac{g(x)y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)}\,dx+c_2^0, \qquad (18)$$

$c_1^0, c_2^0$-туруктуулар

(17), (18) функцияларды (12) формулага коюп (10) теңдеменин жалпы чыгарылышын табабыз

$$y(x)=c_1^0y_1(x)+c_2^0y_1(x)+\frac{1}{a_0}\int_{x_0}^{x}\frac{(y_1(x)-y_1(x))g(x)}{y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)}dx$$

2) Чектүү айырмадагы теңдеме

$$a_0f(x+2)+a_1f(x+1)+a_2f(x)=g(x) \qquad (19)$$

Функция түзөбүз:

$$f(x)=c_1(x)f_1(x)+c_2(x)f_2(x) \qquad (20)$$

Мындан

$$f(x+1)=\Delta c_1(x)f_1(x)+\Delta c_2(x)f_2(x)+c_1(x)f_1(x+1)+c_2(x)f_2(x+1),$$
$$\Delta c_1(x)f_1(x)+\Delta c_2(x)f_2(x)=0 \text{ деп эсептеп}$$

$$f(x+1)=c_1(x)f_1(x+1)+c_2(x)f_2(x+1) \qquad (21)$$

Барабардыгын алабыз. (21) барабардыктын $f(x+2)$ функциясын табабыз

$$f(x+2)=\Delta c_1(x)f_1(x)+\Delta c_2(x)f_2(x+1)+c_1(x)f_1(x+2)+c_2(x)f_2(x+2) \qquad (22)$$

(20), (21), (22) функцияларды (19) теңдеме коюп, төмөндөгүдөй теңдештикти алабыз

$$a_0(\Delta c_1(x)f_1(x+1)+\Delta c_2(x)f_2(x+1))+c_1c(x)(a_0f_1(x+2)+a_1f_1(x+1)+a_2f_1(x))+$$
$$+c_2(x)\left(a_0f_2(x+2)+a_1f_2(x+1)+a_2f_2(x)\right)=g(x).$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



$f_1(x), f_2(x)$ бир тектүү теңдеменин чыгарылыштары болгондуктан, акыркы барабардыктан

$$\Delta c_1(x) f_1(x+1) + \Delta c_2(x) f_2(x+1) = \frac{1}{a_0} g(x)$$

теңдемени алабыз.

Система түзөбүз

$$\begin{cases} \Delta c_1(x) f_1(x) + \Delta c_2(x) f_2(x) = 0 \\ \Delta c_1(x) f_1(x+1) + \Delta c_2(x) f_2(x+1) = \frac{1}{a_0} g(x) \end{cases} \qquad (23)$$

$$\Delta c_1(x) = -\frac{1}{a_0} \cdot \frac{y(x) f_2(x)}{f_1(x) f_2(x+1) - f_2(x) f_1(x+1)} \qquad (24)$$

$$\Delta c_1(x) = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{g(x) f_1(x)}{f_1(x) f_2(x+1) - f_2(x) f_1(x+1)} \qquad (25)$$

(24), (25) теңдемелерден, алардын чыгарылыштары

$$c_1(x) = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{x-1} \frac{g(k) f_2(k)}{f_1(k) f_2(k+1) - f_2(k) f_1(k+1)},$$

$$c_2(x) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{x-1} \frac{g(k) f_1(k)}{f_1(k) f_2(k+1) - f_2(k) f_1(k+1)},$$

Формалары аркылуу аныкталаарын тастыктап койсо болот (20) формулага $c_1(x)$, $c_2(x)$ функциялардын маанилерин коюп, (19) теңдеменин жалпы чыгарылышын жазабыз

$$f(x) = c_1^0 f_1(x) + c_2^0 f_2(x) + \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{x-1} \frac{g(k)(f_1(k) \cdot f_2(x) - f_2(k) f_1(x))}{f_1(k) f_2(k+1) - f_2(k) \cdot f_1(k+1)}.$$

**6. Теңдемедеги өзгөрүлмө чоңдуктардын орун алмаштыруунун теңдеменин тарбине болгон таасири.**

1) Дифференциалдык теңдеме.

(1) тендемеге x=t+1 барабардыктын негизинде орун алмаштыруу жасайбыз, С-туруктуу сан.

$$a_0 y''(t+1) + a_1 y'(t+1) + a_2 y(t+1) = g(t+1).$$

2) Чектүү айырмадагы теңдеме

$$a_0 f(t+3) + a_1 f(t+2) + a_2 f(t+1) = g(t+1)$$

Орун алмаштыруудан дифференциалдык теңдеменин тартиби өзгөрбөгөндүгү үчүн, ал эми чектүү айырмадагы теңдеменин тартиби өзгөргөндүгүн байкоого болот. Чектүү айырмадагы тендеменин тартиби 2-ден, 3-айланды.

**Адабияттар:**

1. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Высшая школа, 1963. - 547 с.
2. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. - М.: 1967. - 375 с.
3. Санойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. - М.: Высшая школа, 1989. - 383 с.
4. Алымбаев А.Т. Численные, численно-аналитические и асимптотические методы исследования краевых задач. - Бишкек: Изд. КНУ, 2015, -205 с.
5. Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. –Киев: Наукова думка, 1972, - 250 с.
6. Байзаков А.Б., Кыдыралиев Т.Р., Шаршенбеков М.М. Структура и асимптотическая устойчивость решений систем дифференциальных уравнений типа Коши. / Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2018. №. 7. С. 3-8.