DOI:10.26104/NNTIK.2022.18.37.002

Искандаров С., Байгесеков А.М.

КЕСИЛГЕН ФУНКЦИЯЛАРДЫН ДИФФЕРЕНЦИРЛЕНБЕГЕН УЧУРУНДАГЫ ВОЛЬТЕРРА ТИБИНДЕГИ ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН ТУРУМДУУЛУК ШАРТТАРЫ

Искандаров С., Байгесеков А.М.

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ НЕГЛАДКОСТИ СРЕЗАННЫХ ФУНКЦИЙ

S. Iskandarov, A. Baigesekov

THE CONDITIONS OF STABILITY OF SOLUTIONS OF LINEAR VOLTERRA TYPE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION IN CASE NONDIFFERENTIABILITY OF CUTTING FUNCTIONS

УДК: 517.968.72

Экинчи тартиптеги сызыктуу Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдеменин бардык чыгарылыштарынын жарым октогу турумдуулугунун жетиштүү шарттары кесилген функциялардын жарым октун кээ бир чекиттеринде дифференцирленбей калышы мүмкүн болгон учурда табылат. Ошондой эле кесилген функциялар ядро жана бош мүчөдөн кандайдыр бир кесүүчү функцияны киийрүү аркылуу пайда болорун эскерте кетели. Мындай изилдөөлөр, биздин билишибизче, башка авторлор тарабынан мурда жүргүзүлгөн эмес. Ал эми кесилген функциялар дифференцирленүүчү учурларда аталган теңдеменин чыгарылыштарынын турумдуулугуна арналган илимий эмгектер Кыргыз математиктеринин бир тобунда бар экенин белгилесек болот. Биз бул сунушталган макалада коюлган максатка жетүү үчүн В.Вольтерранын теңдемелерди өзгөртүү методун, кесүүчү функциялар методун, бөлүктөп интегралдоо методун, интегралдык барабарсыздыктар методун өнүктүрөбүз жана Коши-Буняковскийдин барабарсыздыгын колдонобуз жана кесилген функцияларды каралган теңдеменин дифференциалдык операторундагы белгисиз функциянын биринчи туундусунун коэффициенти менен байланыштыра турган өзгөртүүлөр жүргүзөбүз. Алынган шарттарды тастыктай турган иллюстративдик мисал тургузулат.

Негизги сөздөр: *Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдеме, чыгарылыштардын турумдуулугу, кесилген функциялардын дифференцирленбеши, кесүүчү функциялар методу, бөлүктөп интегралдоо методу, Коши-Буняковскийдин барабарсыздыгы.*

Устанавливаются достаточные условия устойчивости на полуоси любого решения линейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка типа Вольтерра в случае, когда срезанные функции могут быть недифференцируемыми в некоторых точках полуоси. Насколько нам известно, такие исследования ранее не проводилось. Также отметим, что срезанные функции появляются от ядра и свободного члена в результате введения некоторой срезывающей функции. Также заметим, что в случаях дифференцируемости срезанных функций есть работы некоторых математиков Кыргызстана. Мы в предлагаемой статье, для достижения поставленной цели, развиваем метод преобразования уравнений Вито Вольтерра, метод срезывающих функций, метод интегрирования по частям, метод интегральных неравенств, применяем неравенство Коши-Буняковского и проводим преобразования, связывающие срезанных функций с коэффициентом первой производной неизвестной функции в дифференциальном операторе рассматриваемого уравнения. Строится иллюстративный пример, подтверждающий естественность полученных условий.

Ключевые слова: *интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра, устойчивость решений, недифференцируемость срезанных функций, метод срезывающих фунцкий, метод интегрирования по частям, неравенство Коши-Буняковского.*

Sufficient conditions are established for the stability on the half-axis of any solution of a second-order linear integro-differential equation of the second order of the Volterra type in the case when the truncated functions can be non-differentiable at some points of the semi-axis. To the best of our knowledge, no such studies have been carried out before. We also note that cut functions appear from the kernel and the free term as a result of the introduction of some cut function. We also note that in cases of differentiability of truncated functions, there are works by some mathematicians from Kyrgyzstan. In the proposed article, in order to achieve this goal, we develop the method of transforming the Vito Volterra equations, the method of cutting functions, the method of integration by parts, the method of integral inequalities, we apply the Cauchy-Bunyakovsky inequality and carry out transformations that connect cut functions with the coefficient of the first derivative of an unknown function in a differential operator the equation under consideration. An illustrative example is constructed, confirming the naturalness of the obtained conditions.

Key words: *Volterra-type integro-differential equation, sustainability of decisions, non-differentiability of truncated functions, cutting function method, method of integration by parts, the Cauchy-Bunyakovsky inequality.*

Все фигурирующие в работе функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0$, $t \geq \tau \geq t_0$; $J = [t_0, \infty)$; ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение; под устойчивостью решений линейного ИДУ второго порядка понимается ограниченность на полуинтервале J всех его решений и их первых производных.

Рассмотрим следующее линейное ИДУ второго порядка типа Вольтерра:

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x'(\tau)\,d\tau = f(t), t \geq t_0 \tag{1}$$

Введем предположения и обозначения [1]: $\psi(t)$- некоторая срезывающая функция, $R(t,\tau) \equiv K(t,\tau)\big(\psi(t)\psi(\tau)\big)^{-1}$,

$$E(t) \equiv f(t)\big(\psi(t)\big)^{-1}.$$

Как известно, $R(t,\tau)$ называется срезанным ядром, $E(t)$ - срезанным свободным членом. Таким образом, $K(t,\tau), E(t)$ – срезанные функции.

Ставится

Задача. Получить достаточные условия устойчивости решений ИДУ (1), в случае, когда срезанные функции $R(t,\tau), E(t)$ могут быть недифференцируемыми в некоторых точках полуинтервале *J*.

Такая задача для ИДУ (1) насколько нам известно, ранее никем не изучена. Подобная задача для линейного ИДУ первого порядка типа Вольтерра рассмотрена в статье [2].

Мы в нашей работе будем развивать аналог метода из [2].

Для произвольно фиксированного решения $x(t)$ умножаем ИДУ (1) на $x'(t)$ [3, с. 194 − 127], производим интегрирование в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, вводим функции $\psi(t), R(t,\tau), E(t)$. В итоге имеем следующее тождество:

$$\big(x'(t)\big)^2 + 2\int_{t_0}^{t} a_1(s)\big(x'(s)\big)^2\,ds + a_0(t)\big(x(t)\big)^2 +$$

$$+2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} R(s,\tau)y(\tau)y(s)d\tau ds \equiv c_* + 2\int_{t_0}^{t} E(s)y(s)\,ds + \int_{t_0}^{t} a_0'(s)\big(x(s)\big)^2\,ds, \tag{2}$$

где $c_* = \big(x'(t_0)\big)^2 + a_0(t_0)\big(x(t_0)\big)^2$, $y(t) \equiv \psi(t)x'(t)$.

Проведем следующее преобразование, аналогично преобразованию (3) [2]:

$$2\int_{t_0}^{t} a_1(s)\big(x'(s)\big)^2\,ds = 2\int_{t_0}^{t} a_1(s)\big(\psi(s)\big)^{-2}\big(\psi(s)\big)^2\big(x'(s)\big)^2 ds \equiv 2\int_{t_0}^{t} \Delta_1(s)\big(y(s)\big)^2\,ds, \tag{3}$$

где $\Delta_1(t) \equiv a_1(t)\big(\psi(t)\big)^{-2}$ $\qquad (\Delta_1)$

Пусть [2]:

$$\Delta_1(t) > 0,$$

$$R(t,\tau) = R_1(t,\tau)R_2(t,\tau), \tag{R}$$

$$E(t) \equiv E_1(t)E_2(t). \tag{E}$$

Тогда справедливы следующие преобразования, подобно преобразованиям (3), (4) из [2]:

$$2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} R(s,\tau)y(\tau)y(s)d\tau ds = 2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} R_1(s,\tau)R_2(s,\tau)y(\tau)y(s)d\tau ds \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{s}\big(R_2(s,\tau)\big)^2 d\tau\right]\big(y(s)\big)^2 ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\frac{\big(R_1(s,\tau)\big)^2}{\Delta_1(\tau)}\Delta_1(\tau)\big(y(\tau)\big)^2 d\tau ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{s}\big(R_2(s,\tau)\big)^2 d\tau\right]\big(y(s)\big)^2 ds + \int_{t_0}^{t}\left[\frac{\big(R_1(s,s)\big)^2}{\Delta_1(s)}\left(\int_{t_0}^{s}\Delta_1(\eta)\big(y(\eta)\big)^2 d\eta\right) - \right.$$

$$-\int_{t_0}^{s}\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\left(R_1(s,\tau)\right)^2}{\Delta_1(\tau)}\left(\int_{t_0}^{\tau}\Delta_1(\eta)\left(y(\eta)\right)^2 d\eta\right)d\tau]\,ds, \qquad (4)$$

$$2\int_{t_0}^{t}E(s)y(s)\,ds=\int_{t_0}^{t}E_1(s)E_2(s)\,y(s)ds\le\int_{t_0}^{t}\left(E_2(s)\right)^2\left(y(s)\right)^2 ds+\int_{t_0}^{t}\left(E_1(s)\right)^2 ds. \qquad (5)$$

На основании преобразований (3)-(5) из тождества (2) переходим к следующему неравенству:

$$\left(x'(t)\right)^2+\int_{t_0}^{t}D_1(s)\left(y(s)\right)^2 ds+\int_{t_0}^{t}\Delta_1(s)\left(y(s)\right)^2 ds+a_0(t)\left(x(t)\right)^2\le c_*+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left(E_1(s)\right)^2 ds+\int_{t_0}^{t}a_0'(s)\left(x(s)\right)^2 ds+\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\left(R_1(s,s)\right)^2}{\Delta_1(s)}\left(\int_{t_0}^{s}\Delta_1(\eta)\left(y(\eta)\right)^2 d\eta\right)\right.$$

$$\left.-\int_{t_0}^{s}\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\left(R_1(s,\tau)\right)^2}{\Delta_1(\tau)}\left(\int_{t_0}^{\tau}\Delta_1(\eta)\left(y(\eta)\right)^2 d\eta\right)d\tau\right]ds, \qquad (6)$$

где

$$D_1(t)\equiv\Delta_1(t)-\int_{t_0}^{t}\left(R_2(t,\tau)\right)^2 d\tau-\left(E_2(t)\right)^2.$$

Теорема. Пусть 1) выполняются условия (Δ_1), (R), (E);
2) $D_1(t)\ge 0$;
3) $a_0(t)\ge a_{00}>0$, существует функция $a_0^*(t)\in L^1(J,R_+)$ такая, что $a_0'(t)\le a_0^*(t)a_0(t)$;
4) $\left(E_1(t)\right)^2+\frac{\left(R_1(t,t)\right)^2}{\Delta_1(t)}+\int_{t_0}^{t}\left|\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\left(R_1(t,\tau)\right)^2}{\Delta_1(\tau)}\right)\right|d\tau\in L^1(J,R_+)$.
Тогда для любого решения $x(t)$ верны соотношения: $x^k(t)=O(1)$
($k=0{,}1$), т.е. любое решение ИДУ (1) устойчиво.
Доказательство. В силу условий 1) - 4) теоремы получаем следующее интегральное неравенство:

$$0\le u(t)\equiv\left(x'(t)\right)^2+\int_{t_0}^{t}D_1(t)\left(y(s)\right)^2 ds+\int_{t_0}^{t}\Delta_1(s)\left(y(s)\right)^2 ds+$$

$$+a_0(t)\left(x(t)\right)^2\le c_{**}+\int_{t_0}^{t}\left\{\left[a^*(s)+\frac{\left(R_1(s,s)\right)^2}{\Delta_1(s)}\right]u(s)+\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{s}\left|\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\left(R_1(s,\tau)\right)^2}{\Delta_1(\tau)}\right)\right|u(\tau)d\tau\right\}ds, \qquad (7)$$

где

$$c_{**}=c_*+\int_{t_0}^{\infty}\left(E_1(t)\right)^2 dt<\infty.$$

Применяя к интегральному неравенству основную лемму Я.В. Быкова [4, с. 121] и учитывая условие 4) теоремы, будем иметь оценку:

$$u(t)\le c_{***}, \qquad (8)$$

где

$$c_{***}=c_{**}\exp\left(\int_{t_0}^{\infty}\left[a^*(s)+\frac{\left(R_1(s,s)\right)^2}{\Delta_1(s)}+\int_{t_0}^{s}\left|\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\left(R_1(s,\tau)\right)^2}{\Delta_1(\tau)}\right)\right|d\tau\right]ds\right)<\infty.$$

Из (8) вытекает: $\left(x'(t)\right)^2+a_0(t)\left(x(t)\right)^2\le c_{***}<\infty$, что означает:

$\left(x'(t)\right)^2 + a_{00}\left(x(t)\right)^2 \leq c_{***}$. Отсюда будем получать: $x^k(t) = O(1)$ $(k = 0,1)$, что означает устойчивость любого решения ИДУ (1). Теорема доказана. Можно аналог результаты данной работы использовать для интегро-дифференциального уравнения Вольтерра-Стилтьеса [5,6,7].

Приведем простейший

Пример. Для ИДУ второго порядка

$$x''(t) + (t+10)^3 e^{2t\sqrt[3]{cost}} x'(t) + \frac{t+1}{t+2} x(t) +$$

$$+ \int_0^t \frac{e^{t\sqrt[3]{cost} + \tau\sqrt[3]{cos\tau}}}{(t+\tau+4)^5} \left(\sqrt[4]{|sint|\sqrt[6]{cos\tau}}\right) x(\tau)d\tau = -\frac{e^{t\sqrt[3]{cost}}}{(t+8)^2}|cos7t|, \qquad t \geq 0$$

выполняются все условия теоремы при $\psi(t) = e^{t\sqrt[3]{cost}}$, здесь

$$\Delta_1(t) \equiv (t+10)^3, \ \ R(t,\tau) = \frac{\sqrt[4]{|sint|\sqrt[6]{cos\tau}}}{(t+\tau+4)^5}, \ \ E(t) = -\frac{|cos7t|}{(t+8)^2},$$

$$R_1(t,\tau) \equiv \frac{1}{(t+\tau+4)^2}, \ \ R_2(t,\tau) \equiv \frac{\sqrt[4]{|sint|\sqrt[6]{cos\tau}}}{(t+\tau+4)^3},$$

$$E_1(t) \equiv \frac{|cos7t|}{t+8}, \qquad E_2(t) \equiv \frac{1}{t+8},$$

$$D_1(t) \equiv \Delta_1(t) - \int_0^t \left(R_2(t,\tau)\right)^2 d\tau - \left(E_2(t)\right)^2 > (t+10)^3 - -\frac{5}{64} > 0.$$

Следовательно, любое решение приведенного ИДУ устойчиво.

В заключении отметим, что к исследованию устойчивости решений ИДУ приведенного примера не применимы результаты из [1]. Нам удалось найти класс линейных ИДУ второго порядка типа Вольтерра вида (1), для которого решаема выше поставленная задача.

Литература:

1. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. - Бишкек: Илим, 2002. - 216 с.
2. Искандаров С. О развитии метода весовых и срезывающих функций для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2004. - Вып. 33. - С. 58-61.
3. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование: Пер. с фр. / Под ред. Ю.М. Свирежева. – М.: Наука, 1976. -288с.
4. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Киргиз. гос. ун-т, 1957. - 328 с.
5. Искандаров С, Байгесеков А.М. Об оценке и асимптотических свойствах решений слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка Вольтерра-Стилтьеса на полуоси //Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2016. - №7. - С. 7-11. www.nnt.el.kg www.sience-journal.kg.
6. Искандаров С., Байгесеков А.М. О степенной абсолютной интегрируемости на полуоси решения линейного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго рода // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2016. –№8(2). – С. 33-36. www.nnt.el.kg www.sience-journal.kg.
7. Искандаров С, Байгесеков А.М. Об асимптотических свойствах решений слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка Вольтерра-Стилтьеса на полуоси // Известия вузов Кыргызстана. – Бишкек, 2016. –№9. – С. 3-8. www.nnt.el.kg www.sience-journal.kg.