DOI: 10.26104/NNTIK.2022.20.95.011

Маруфий А.Т., Турдажиева Э.Н., Алиева А.П.

РЕАЛДУУ ИШТӨӨСҮНӨ ЖАКЫН ШАРТТАРДЫ ЭСКЕ АЛУУ МЕНЕН ЭКИ ПАРАМЕТРДҮҮ СЕРПИЛГИЧТҮҮ НЕГИЗДЕ АКЫРКЫ УСТУНДУ ЭСЕПТӨӨ АЛГОРИТМИ

Маруфий А.Т., Турдажиева Э.Н., Алиева А.П.

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА КОНЕЧНОЙ БАЛКИ НА ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ УСЛОВИЙ БЛИЗКИХ К ЕЕ РЕАЛЬНОЙ РАБОТЕ

A. Marufi, E. Turdazhieva, A. Alieva

ALGORITHM FOR CALCULATION OF A FINITE BEAM ON A TWO-PARAMETER ELASTIC FOUNDATION TAKING INTO ACCOUNT CONDITIONS CLOSE TO ITS REAL OPERATION

УДК: 624.073.02

Бул макалада устундун деформацияланууучу негиз менен толук эмес байланышын эске алуу менен эки параметрдүү серпилгичтүү негизде акыркы устунду эсептөө алгоритми иштелип чыккан. Серпилгичтүү негиздин бир нече моделдери бар. Макалада серпилгичтүү негиз моделинин параметрлерин жана акыркы устундун негиз менен толук эмес байланышын жана кадимки дифференциалдын жаңы классын камтыган негиздин бөлүштүрүү жөндөмдүүлүгүн эске алган эки параметрдүү модель тандалган, теңдеме баштапкы дифференциалдык ийилүүчү теңдемеде алынат. Натыйжадагы дифференциалдык теңдеме чоң математикалык кызыгууну туудурат. Макалада каралган долбоорлоо схемасы чөккөн топурактагы имараттар жана курулмалар үчүн тилкелүү пайдубалдарды долбоорлоодо же пайдубалдын астынан ар кандай инженердик коммуникацияларды өткөрүүдө колдонулат. Жогорудагы факторлорду эске алуу менен эки параметрдүү серпилгичүү негизде акыркы устунду эсептөө алгоритми инженерлердин кеңири катмары үчүн эң жеткиликтүү болгон чектүү айырмачылык методу менен түзүлгөн. Бул методдун маңызы төртүнчү даражадагы баштапкы кадимки дифференциалдык теңдемени саны бөлүү чекиттеринин санына барабар болгон алгебралык теңдемелер системасына айландыруу болуп саналат.

***Негизги сөздөр**: устун, алгоритм, ийкемдүү фундамент, толук эмес контакт, чектүү айырмачылыктар, ийилүү, четтөө, туундулар, эки параметрдүү модель, тилкелүү фундамент, чөгүүчү топурак, коммуналдык кызматтар.*

В данной статье разработан алгоритм расчета конечной балки на двухпараметрическом упругом основании с учетом неполного контакта балки с деформируемым основанием. Существуют несколько моделей упругого основания. В статье выбрана двухпараметрическая модель, которая учитывает распределяющую способность грунтового основания, включая параметры модели упругого основания и неполного контакта конечной балки с основанием в исходное дифференциальное уравнение изгиба. Получен новый класс обыкновенного дифференциального уравнения, который представляет большой математический интерес. Принятая в статье расчетная схема используется при проектировании ленточных фундаментов зданий и сооружений на просадочных грунтах или прохождении всевозможных инженерных коммуникаций под фундаментами. Алгоритм расчета конечной балки на двухпараметрическом упругом основании с учетом вышеперечисленных факторов составлен методом конечных разностей, который является наиболее доступным для широкого класса инженеров. Суть данного метода заключается в преобразовании исходного обыкновенного диффенциального уравнения четвертого порядка к системе алгебраических уравнений количество которых равно числу точек разбиения.

***Ключевые слова:** балка, алгоритм, упругое основание, неполный контакт, конечные разности, изгиб, прогиб, производные, двухпараметрической модель, ленточный фундамент, просадочный грунт, инженерные коммуникации.*

In this article, an algorithm for calculating the final beam on a two-parameter elastic foundation is developed, taking into account the incomplete contact of the beam with the deformable foundation. There are several models of elastic foundation. In the article, a two-parameter model is chosen that takes into account the distributing ability of the soil foundation, including the parameters of the elastic foundation model and the incomplete contact of the final beam with the foundation, a new class of ordinary differential equation is obtained in the original differential bending equation. The resulting differential equation is of great mathematical interest. The design scheme printed in the article is used in the design of strip foundations for buildings and structures on subsiding soils or the passage of various engineering communications under the foundation. The algorithm for calculating the final beam on a two-parameter elastic foundation, taking into account the above factors, was compiled by the finite difference method, which is the most accessible for a wide class of engineers. The essence of this method is to transform the original fourth-order ordinary differential equation to a system of algebraic equations, the number of which is equal to the number of partition points.

***Key words:** beam, algorithm, elastic foundation, incomplete contact, finite differences, bending, deflection, derivatives, two-parameter model, strip foundation, subsidence soil, engineering communications.*

Введение. При проектировании ленточных фундаментов зданий и сооружений на просадочных грунтах в процессе эксплуатации под ними может образоваться провал (неполный контакт). Это же явление встречается при прохождении под фундаментами всевозможных инженерных коммуникаций. Такого рода ленточные фундаменты при расчете сводятся к расчетной схеме балок на деформируемом основании [3,4,5].

Целью исследования является разработка алгоритма расчета конечной балки, опирающейся на линейно-деформируемое двухпараметрическое основание с учетом неполного контакта с основанием в виде одной траншеи, расположенной в центральной части балки.

Метод исследования. Алгоритм расчета конечной балки на двухпараметрическом упругом основании с учетом неполного контакта балки с основанием составлен методом конечных разностей. Суть метода исследований заключается в введении в исходное дифференциальное уравнение изгиба балки параметров, учитывающих, как двухпараметрическую модель упругого основания, так и явления неполного контакта балки с основанием.

Рассмотрим конечную балку длиной l, лежащую на двухпараметрическом упругом основании под центральной частью, которой длиной $2a$ упругое основание отсутствует (нет контакта балки с основанием) (рис. 1).

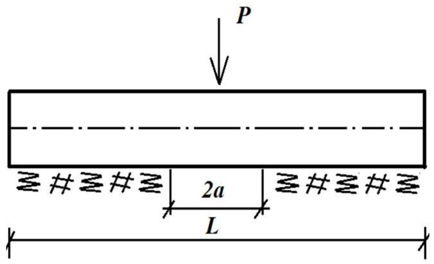

Рис.1.

Дифференциальное уравнение изгиба балки на двухпараметрическом упругом основании с учетом неполного контакта с основанием в виде одной траншеи, расположенной в центре поперек оси балки, имеет вид [5, 7, 8]:

$$\mathrm{E}J\frac{d^4w(y)}{dx^4} - 2r^2\frac{d^2w(x)}{dx^2} + s^4w(x)\theta(x-a) = q_0(x) \qquad (1)$$

где: $w(x)$ - функция прогиба балки, $q_0(x)$ – функция нагрузки,
$2a$ - размер участка, на котором нет контакта балки с основанием,
r^2 и s^4 - обобщенные упругие характеристики балки и основания,
$\theta(x-a)$ - формулы Хевисайда, учитывающее неполный контакт балки с основанием, $\theta(x-a)$= 0($x \leq a$); $\theta(x-a)$ =1($x \geq a$),
J - момент инерции поперечного сечения балки (см^4).
E - модуль упругости материала балки (Па, кг/см^2).
Разобьём балку на несколько частей по длине, согласно рис. 2 *а, б*.

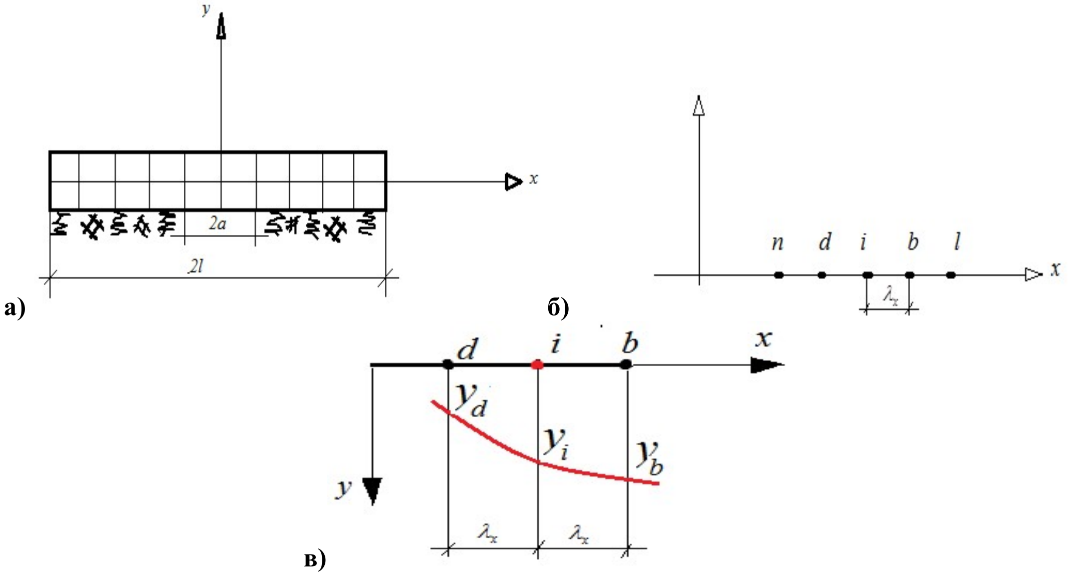

Рис. 2.

Рассмотрим плоскость *XOY*, проходящей через центральную точкуi (рис. 2 *в*) [1,2,6]. Выразим две первые производные в центральной точке i через прогибы балки в центральной точке и двух соседних с ней точках b и d. Для этого аппроксимируем кривую прогибов в точках i, b и d параболой второго порядка, проходящей через три ординаты прогибов y_d, y_i и y_b, отстоящих друг от друга на равном расстоянии λ_x (рис. 2 *в*). Пусть координата центральной точки i будет x, координата точки $b(x+\lambda_x)$ и координата точки $d(x-\lambda_x)$, а парабола, проходящая через прогибы в этих точках, имеет выражение

$$y_i = Ax^2 + Bx + C \tag{2}$$

Соответственно:

$$\frac{dy_i}{dx} = 2Ax + B \tag{3}$$

$$\frac{d^2y_i}{dx^2} = 2A \tag{4}$$

На основании выражения (2), запишем выражение для прогиба y_b:

$$y_b = A(x+\lambda_x)^2 + B(x+\lambda_x) + C = Ax^2 + 2Ax\lambda_x + A\lambda_x^2 + Bx + B\lambda_x + C =$$
$$= (Ax^2 + Bx + C) + 2Ax\lambda_x + A\lambda_x^2 + B\lambda_x == y_i + 2Ax\lambda_x + A\lambda_x^2 + B\lambda_x = y_i + A(2\lambda_x x + \lambda_x^2) + B\lambda_x$$

т.е.

$$y_b = y_i + A(2\lambda_x x + \lambda_x^2) + B\lambda_x \tag{5}$$

Аналогично для прогиба в точке d, т.е. y_d :

$$y_d = A(x-\lambda_x)^2 + B(x-\lambda_x) + C = Ax^2 - 2Ax\lambda_x + A\lambda_x^2 + Bx - B\lambda_x + C =$$
$$= (Ax^2 + Bx + C) - 2Ax\lambda_x + A\lambda_x^2 - B\lambda_x = y_i + A(-2x\lambda_x + \lambda_x^2) - B\lambda_x;$$

т.е.

$$y_d = y_i + A(-2x\lambda_x + \lambda_x^2) - B\lambda_x; \tag{6}$$

На основании формул (5) и (6) вычислим их разность:

$$y_b - y_d = y_i + 2Ax\lambda_x + A\lambda_x^2 + B\lambda_x - y_i - A(-2x\lambda_x + \lambda_x^2) + B\lambda_x =$$
$$= 2A\lambda_x x + A\lambda_x^2 + B\lambda_x + A2x\lambda_x - A\lambda_x^2 + B\lambda_x = 4A\lambda_x x + 2B\lambda_x = (2Ax+B)2\lambda_x = 2\lambda_x\frac{dy_i}{dx};$$

На основании (3) $(2Ax+B) = \frac{dy_i}{dx}$; т.е. $y_b - y_d = \frac{dy_i}{dx}2\lambda_x$; отсюда определим первую производную функции прогибов

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{y_b - y_d}{2\lambda_x} \tag{7}$$

Из тех же уравнений (5) и (6), определим их сумму:

$$y_b + y_d = y_i + 2Ax\lambda_x + A\lambda_x^2 + B\lambda_x + y_i + A(-2x\lambda_x + \lambda_x^2) - B\lambda_x =$$
$$= 2y_i + A2x\lambda_x + A\lambda_x^2 + B\lambda_x - 2A\lambda_x x + A\lambda_x^2 - B\lambda_x - 2y_i + 2A\lambda_x^2;$$

т.е. $y_b + y_d = 2y_i + 2A\lambda_x^2$; Отсюда определим $2A = (y_b + y_d - 2y_i)\frac{1}{\lambda_x^2}$; на основании формулы (4) $2A = \frac{d^2y_i}{dx^2}$ с учетом этого, получим вторую производную функцию прогибов:

$$\frac{d^2y_i}{dx^2} = 2A = \frac{y_b - 2y_i + y_d}{\lambda_x^2} \tag{8}$$

Далее составляем следующие производные в конечных разностях, для чего в свою очередь аппроксимируем параболой второго порядка соседние точки вторых производных, т.е.

$$\frac{d^2y_i}{dx^2} = A_1x^2 + B_1x + C_1 \tag{9}$$

Производя затем такие же операции с применением уравнения (9), какие были проведены с применением уравнения (2) получим аналогичные выражения, как и (7)÷(8), с заменой в них прогибов балки на вторые производные.

Взяв производную из выражения (9), получим:

$$\frac{d^3y_i}{dx^3} = 2A_1x + B_1 \tag{10}$$

По выражению (9), запишем выражение для второй производной $\frac{d^2y_b}{dx^2}$:

$$\frac{d^2y_b}{dx^2} = (x+\lambda_x)^2A_1 + B_1(x+\lambda_x) + C_1 = A_1x^2 + 2A_1x\lambda_x + A_1\lambda_x^2 + B_1x + B_1\lambda_x + C_1 =$$

$$= (A_1x^2 + B_1x + C_1) + 2A_1x\lambda_x + A_1\lambda_x^2 + B_1\lambda_x = \frac{d^2y_i}{dx^2} + A_1(2x\lambda_x + \lambda_x^2) + B_1\lambda_x;$$

т.е.

$$\frac{d^2y_b}{dx^2} = \frac{d^2y_i}{dx^2} + A_1(2x\lambda_x + \lambda_x^2) + B_1\lambda_x; \tag{11}$$

Аналогично для второй производной прогиба $\frac{d^2y_d}{dx^2}$:

$$\frac{d^2y_d}{dx^2} = A_1(x-\lambda_x)^2 + B_1(x-\lambda_x) + C_1 = A_1x^2 - 2A_1x\lambda_x + A_1\lambda_x^2 + B_1x - B_1\lambda_x + C_1 =$$

$$= (A_1x^2 + B_1x + C_1) - 2A_1x\lambda_x + A_1\lambda_x^2 - B_1\lambda_x = \frac{d^2y_i}{dx^2} + (-2x\lambda_x + \lambda_x^2)A_1 - B_1\lambda_x;$$

т.е.

$$\frac{d^2y_d}{dx^2} = \frac{d^2y_i}{dx^2} + A_1(-2x\lambda_x + \lambda_x^2) - B_1\lambda_x; \tag{12}$$

На основании формул (11) и (12) определим их разность:

$$\frac{d^2y_b}{dx^2} - \frac{d^2y_d}{dx^2} = \frac{d^2y_i}{dx^2} + A_1(2x\lambda_x + \lambda_x^2) + B_1\lambda_x - \frac{d^2y_i}{dx^2} - A_1(-2x\lambda_x + \lambda_x^2) + B_1\lambda_x =$$

$$= A_1 2x\lambda_x + A_1\lambda_x^2 + B_1\lambda_x + A_1 2x\lambda_x - A_1\lambda_x^2 + B_1\lambda_x = 4A_1x\lambda_x + 2B_1\lambda_x = 2\lambda_x(2A_1x + B_1);$$

На основании (10) $2A_1x + B_1 = \frac{d^3y_i}{dx^3}$; с учетом этого, запишем

$$\frac{d^2y_b}{dx^2} - \frac{d^2y_d}{dx^2} = 2\lambda_x\frac{d^3y_i}{dx^3},$$

Откуда

$$\frac{d^3y_i}{dx^3} = \frac{1}{2\lambda_x}\left(\frac{d^2y_b}{dx^2} - \frac{d^2y_d}{dx^2}\right) \tag{13}$$

Взяв производную из выражения (10), получим

$$\frac{d^4y_i}{dx^4} = 2A_1 \tag{14}$$

Из уравнений (11) и (12), определим их сумму:

$$\frac{d^2y_b}{dx^2} + \frac{d^2y_d}{dx^2} = \frac{d^2y_i}{dx^2} + A_1(2x\lambda_x + \lambda_x^2) + B_1\lambda_x + \frac{d^2y_i}{dx^2} + A_1(-2x\lambda_x + \lambda_x^2) - B_1\lambda_x =$$

$$= 2\frac{d^2y_i}{dx^2} + A_1 2x\lambda_x + A_1\lambda_x^2 + B_1\lambda_x - A_1 2x\lambda_x + A_1\lambda_x^2 - B_1\lambda_x = 2\frac{d^2y_i}{dx^2} + 2A_1\lambda_x^2;$$

$$\frac{d^2y_b}{dx^2} + \frac{d^2y_d}{dx^2} = 2\frac{d^2y_i}{dx^2} + 2A_1\lambda_x^2; \tag{15}$$

$$\frac{d^4y_i}{dx^4} = 2A_1 = \left(\frac{d^2y_b}{dx^2} + \frac{d^2y_d}{dx^2} - 2\frac{d^2y_i}{dx^2}\right)\frac{1}{\lambda_x^2} \tag{16}$$

Учитывая выражение (8), выражения третьих и четвертых производных функции прогибов, выраженных в формулах (13) и (16), запишем в виде:

$$\frac{d^3y_i}{dx^3} = \frac{1}{2\lambda_x}\left(\frac{y_i - 2y_b + y_l}{\lambda_x^2} - \frac{y_n - 2y_d + y_i}{\lambda_x^2}\right); \tag{17}$$

$$\frac{d^4y_i}{dx^4} = \frac{1}{\lambda_x^2}\left(\frac{y_n - 2y_d + y_i}{\lambda_x^2} - 2\,\frac{y_d - 2y_i + y_b}{\lambda_x^2} + \frac{y_i - 2y_b + y_l}{\lambda_x^2}\right) \tag{18}$$

Окончательно выражения третьих и четвертых производных функции прогибов, запишем в виде:

$$\frac{d^3y_i}{dx^3} = \frac{1}{2\lambda_x^3}(y_i - 2y_b + y_l - y_n + 2y_d - y_i) = \frac{1}{2\lambda_x^3}(-y_n + 2y_d - 2y_b + y_l); \tag{19}$$

$$\frac{d^4y_i}{dx^4} = \frac{1}{\lambda_x^4}[y_n - 2y_d + y_i - 2y_d + 4y_i - 2y_b + y_i - 2y_b + y_l] = \frac{1}{\lambda_x^4}[6y_i - 4(y_d + y_b) + y_n + y_l] \tag{20}$$

После получения всех необходимых производных, подставим их значения в исходное дифференциальное уравнение изгиба балки, записываемое для точки *i*.

$$EJ\,\frac{6y_i - 4(y_d + y_b) + y_n + y_i}{\lambda_x^4} - 2r^2\,\frac{\text{ув} - 2yi + y}{\lambda_x^2} + s^4 yi\;\theta(x - a) = q_0(\mathrm{x}) \tag{21}$$

Подставим в 1-й член в конечных разностях производную 4-го порядка, а во второй член уравнения (2) вторую в конечных разностях.

Вывод: Полученное дифференциальное уравнение с учетом модели упругого основания и неполного контакта конечной балки с основанием представляет определенный математический интерес. В статье получено аналитическое решение задачи изгиба конечной балки на двухпараметрическом упругом основании с учетом неполного контакта балки с основанием, в виде одной траншеи, расположенной в центральной части поперек оси балки. Аналитическое решение получено путем замены производных в исходном дифференциальном уравнении изгиба балки конечно-разностными отношениями, в результате оно преобразовано в систему алгебраических уравнений с неизвестными прогибами.

Литература:

1. Киселев В.А. Расчет пластин. - Москва: Стройиздат, 1973. -157с.
2. Леонтьев Н.Н., Маруфий А.Т. Расчет прямоугольной плиты на упругом двухпараметрическом основании. Сборник трудов МИСИ «Расчет пространственных конструкций». - Москва, 1983. - 122-126 с.
3. Маруфий А.Т. Алгоритм расчета полубесконечной балки на двухпараметрическом упругом основании с участком без основания на удалении от края под балкой [Текс] / А.Т. Маруфий, А.А. Эгембердиева. - Бишкек, Известия КГТУ №3 (51), 2019. - 126-133 с.
4. Маруфий А.Т. Изгиб полубесконечной балки на двухпараметрическом упругом основании с неполным контактом с основанием на краю балки [Текс] / А.Т. Маруфий, А.А. Эгембердиева/ Бишкек, Вестник КГУСТА №1 (63), 2019.-59-64 с.
5. Маруфий А.Т. Изгиб различных схем плит на упругом основании с учетом неполного контакта с основанием [Текс]/ А.Т. Маруфий. – М.; Издательство АСВ, СНГ, 2003.- 206 с.
6. Маруфий А.Т., Эгенбердиева А.А. Учебное пособие, Составление алгоритмов по дисциплине «Численные методы решения задач в строительстве». Ош, 2019. - 64 с.
7. Калыков А.С. Результаты расчета полубесконечной плиты на упругом основании с учетом сложных условий её работы. // Известия ВУЗов Кыргызстана. Н.Ж. №1, 2020. - 9-17 с.
8. Маруфий А.Т., Цой А.В., Калыков А.С. Методика расчета плиты на упругом основании с участком пониженной жесткости основания. Н.Ж. // Наука, Новые технологии и инновации Кыргызстана. №1, 2021. - 9-13 с.