МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

DOI:10.26104/NNTIK.2022.61.33.001

Акматов А.А., Газыбаева Б.А.

МЕКТЕП ФИЗИКАСЫНДАГЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН МАСЕЛЕЛЕРИ

Акматов А.А., Газыбаева Б.А.

ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ФИЗИКИ

A. Akmatov, B. Gazybaeva

PROBLEMS OF DIFFERENTIAL EQUATION IN THE SCHOOL PHYSICS COURSE

УДК: 517.928

Тигил же бул кубулуштар баш ийген көптөгөн физикалык мыйзамдар кандайдыр бир чоңдуктардын ортосундагы белгилүү бир байланышты билдирген математикалык теңдеме катары жазылат. Математика үчүн дифференциалдык теңдемелер жана айрыкча анын колдонулушу чоң мааниге ээ, анткени мындай теңдемелерди чечүүдө көптөгөн физикалык жана техникалык маселелерди изилдөө азаят. Макалада электр талаасынын таасиринде кыймылга келүүчү электрондун кыймылынын теңдемеси каралат. Эгерде тең салмактуулук абалы сакталса анда ал Гуктун мыйзамы боюнча каралат. Тескерисинче тең салмактуулук абалы сакталбаса, анда Гуктун мыйзамы иш ке ашпайт. Бул учурдагы козголуу сызыктуу эмес болуп, ал козголууну кичине параметр усулу же козголуу усулу деген аталышка ээ болгон ыкма менен жогорку тактыкка чейин изилдөө каралган. Изилдөө ыкмасы толугу менен жумушта сүрөттөлгөн. Жумуш өз учурунда теориялык усул болгон кичине параметр усулунун практикалык колдонулушу катары саналат.

Негизги сөздөр: *дифференциалдык теңдеме, катар, козголуу, кыймыл, электрон, жыйналуучулук, чечим, оптика, кичине параметр, электр талаасы, термелүү.*

Многие физические законы, которым подчиняются те или иные явления, записываются в виде математического уравнения, выражающего определенную зависимость между какими-то величинами. Большое значение имеют дифференциальные уравнения для математики и особенно для ее приложений, это объясняются тем, что к решению таких уравнений сводится исследование многих физических и технических задач. В статье рассмотрено уравнения движения электрона под действием электрического поля. Если сохраняется условия равновесия то это подчиняется закона Гука. В обратном случае закон Гука не выполняется и колебания будет нелинейным. В этом случае применим метод малого параметра и исследуем до высшего приближения. Правила исследования полностью иллюстрировано в работе. Малый параметр считается чисто теоретическим. Но использования этого метода к уравнению движения электрона при неподчинение закона Гука считается практическим применением.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения, ряд, возмущения, движения, электрон, сходимость, решение, оптика, малый параметр, электрические поля, колебания.*

Many physical laws that certain phenomena obey are written in the form of a mathematical equation expressing a certain relationship between some quantities. Differential equations are of great importance for mathematics and especially for its applications, this is explained by the fact that the solution of such equations reduces the study of many physical and technical problems. The paper considers the equations of motion of an electron under the action of an electric field. If the equilibrium conditions are maintained, then this obeys Hooke's law. Otherwise, Hooke's law is not fulfilled and the oscillations will be nonlinear. In this article, we apply the small parameter method and investigate to the highest approximation. The research rules are fully illustrated at work. The small parameter is considered purely theoretical. But the use of this method to the equation of motion of an electron when disobeying Hooke's law is considered a practical application.

Key words: *differential equations, series, disturbances, motions, electron, convergence, solution, optics, small parameter, electric fields, oscillations.*

Киришүү. Мектеп физикасынын оптика бөлүмүндө кездешүүчү физикалык маселелер, математикалык модел болуп саналган дифференциалдык теңдемелердин жардамында окулуп үйрөнүлөт. Жумушта E электр талаасынын таасири астындагы ийилчээк байланыштагы электрондун кыймылы каралат [6, 7]. Эгерде электрон тең салмактуу абалда болсо, анда физика курсунан белгилүү болгон Гуктун мыйзамына баш ийет. Ошондой эле тең салмактуу абалдан четтөө болсо, кыймыл Гук мыйзамына баш ийбей термелүү сызыктуу эмес болот. Ал күч $f(x) = -mw_0^2x(t)$ барабардыгы менен аныкталат. Жумушта теориялык болуп эсептелген кичине параметр усулунун жардамында ушул кубулушту окуп үйрөнөбүз. Ал үчүн мектеп курсунда белгилүү болгондой функцияны катарга ажыратуу ыкмасын пайдаланабыз. Ал ыкма илимде Тейлор катары аттуу аталышка ээ. Козголуу усулун колдонуп маселенин чечимин изилдейбиз.

Маселенин коюлушу. Жумушта E электр талаасынын таасири астындагы ийилчээк байланыштагы электрондун кыймылы

$$mx^{''}(t)+\gamma mx^{'}(t)+mw_0^2x(t)=eE, \tag{1}$$

дифференциалдык теңдемеси менен сүрөттөлөт. Мында E чыналуусу X сан огу боюнча таралат. Электронду тең салмактуулук абалында кармап туруучу $f(x)=-mw_0^2x(t)$ күчү үчүн, анча чоң эмес $x(t)$ маанилеринде гана Гуктун эрежеси сакталат. Ал эми чоң болгон $x(t)$ маанилери үчүн Гук эрежеси аткарылбай термелүү сызыкту эмес болот [7]. Жалпы учурда $f(x)$ функциясы Тейлор катарынын жекече учуру болгон Маклорен катары менен көрсөтүлөт. Анда $f(x)=f(0)+xf'(0)+\dfrac{x^2}{2!}f''(0)+....+\dfrac{x^n}{n!}f^{(n-1)}(0)+...$.

Сызыктуу эмес учурда жарык толкундарында электрондун кыймылын

$$mx''(t)+m\gamma x'(t)=eE+f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+...+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+..., \tag{2}$$

мында $m=9.1\times10^{-31}$ *кг* -электрон массасы, w_0 -термелүүнүн айланпа жыштыгы болуп, оптикада тартиби $10^{15}\times c^{-1}$ болгон нурдануу спектри, γ – тыныгуу.

Тең салмактуулук $x=0$ чекити пределдик учурда туруктуу болсо, анда $f(0)=0$. Ошондой эле $f(x)$ күчү ар дайым тең салмактуулук чекитине багытталат. Демек, $f'(0)<0$. Мындан $f'(0)=-mw_0^2$ деп алуу менен (2) барабардыкты төмөнкүчө жазып алабыз:

$$mx''(t)+m\gamma x'(t)+mw_0^2x(t)=eE+f(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+...+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+... . \tag{3}$$

Эгерде (3) барабардыктан квадраттык жана кубдук же андан жогорку мүчөлөрүн таштап жиберсек, анда сызыктуу осциллятордун теңдемесине ээ болобуз. Эгерде бул мүчөлөрдү эске алсак осциллятор ангармоникалык, ал эми термелүү ангармоникалык термелүү деп аталат. Ангармоникалык термелүү учурунда $x(E)$ көз карандылыгы сызыктуу болбойт. Мына ошондуктан жарыктын чачыроосун төмөнкү формада жазуу максатка ылайыктуу $P=N|e|x(t)$.

Эгерде $f''(0)\neq0$ болсо, сызыктуу эмес мүчө $x(t)$ квадратынан башталат. Ал эми (3) теңдеме төмөнкү көрүнүштө жазылат:

$$x''(t)+\gamma x'(t)+w_0^2x(t)=\left(\frac{e}{m}\right)E+\xi x^2(t), \tag{4}$$

мында $\xi=\dfrac{f''(0)}{2m}$. Демек, $\xi x^2(t)$ чоңдугун кичине деп божомолдоп (4) теңдемени козголуу усулу менен чечебиз [1-5]. Чечим катар түрүндө изилденет:

$$x(t)=x_0(t)+x_1(t)+x_2(t)+....+x_n(t)+..., \tag{5}$$

мында $x_1(t),x_2(t),...,x_n(t),...$ - мүчөлөрү $x_0(t)$ салыштырмалуу $\xi,\xi^2,...,\xi^n,...$ тартибиндеги чексиз кичине чоңдуктар.

Акыркы (5) барабардыкты (4) барабардыкка ξ даражалары боюнча

$$x_0^{''}(t)+\gamma x_0^{'}(t)+w_0^2x_0(t)=\left(\frac{e}{m}\right)E, \tag{6}$$

$$x_1^{''}(t)+\gamma x_1^{'}(t)+w_0^2x_1(t)=\xi x_0^2(t), \tag{7}$$

$$x_2^{''}(t)+\gamma x_2^{'}(t)+w_0^2x_2(t)=2\xi x_0(t)x_1(t), \tag{8}$$

.....................................,

$$x''_{n-1}(t)+\gamma x'_{n-1}(t)+w_0^2 x_{n-1}(t)=\xi\left[x^2_{\frac{n-1}{2}}(t)+2x_0(t)x_{n-1}(t)+...+2x_{k-1}(t)x_{n-k-1}(t)\right], \qquad (9)$$

$$x''_n(t)+\gamma x'_n(t)+w_0^2 x_n(t)=2\xi[x_0(t)x_{n-2}(t)+x_1(t)x_{n-3}(t)+...+x_{k-1}(t)x_{n-k-2}(t)]. \qquad (10)$$

топтоштурабыз. Бул жерде $k\in N, n\in N,\ k<n$.

Сызыктуу эмес учурда (6) теңдемени чыгарбыз. Эгерде X огуна багытталган чыналуу $E(t)=E_0e^{iwt}$ болсо, анда орун алган режимде $x(t)$ функциясы гармоникалык функция болуп $x(t)=x_0e^{iwt}$. Мындан (6) чечими

$$x_0(t)=\frac{e}{m}\times\frac{E}{w_0^2-w^2+iw\gamma}\cdot \qquad (11)$$

Термелген электрон нурдануунун булагы болуп, анын энергиясы түшүү толкуну менен берилет. Жыйынтыгында ийилчээк электрон энергияны жутуп алат. Энергияны жутуу интенсивдүүлүгү (11) барабардык менен аныкталган амплитуданын квадратына пропорционалдуу болот. Мына ошондуктан

$$x_0(t)=\frac{e}{m}\times\frac{E}{(w_0^2-w^2)^2-w^2\gamma^2}\,. \qquad (12)$$

Кийинки кадамда (12) барабардыкты эске алуу менен (7) теңдемени чечебиз.

Анда $x_1(t)=\left[\frac{e}{m}\times\frac{E}{(w_0^2-w^2)^2-w^2\gamma^2}\right]^2\times\frac{1}{w_0^2-w^2+i\gamma w}$, энергиянын жутулуусун эске алуу менен $x_1(t)=\left[\frac{e}{m}\times\frac{E}{(w_0^2-w^2)^2-w^2\gamma^2}\right]^2\times\frac{1}{(w_0^2-w^2)^2-\gamma^2w^2}$. Кээ бир жөнөкөйлөтүүлөрдү эске алуу менен

$$x_1(t)=\left[\frac{e}{m}\right]^2\times\frac{E^2}{((w_0^2-w^2)^2-\gamma^2w^2)^3}. \qquad (13)$$

Ал эми (12), (13) барабардыктарды эске алуу менен (8) теңдемени чечимин аныктасак $x_2(t)=2\left[\frac{e}{m}\right]^3\times\frac{E^3}{((w_0^2-w^2)^2-\gamma^2w^2)^5}$. Ушул жараянды улантуу менен (9) теңдеменин чечими $x_{n-1}(t)=\left[\frac{e}{m}\right]^n\times\frac{F_{n-1}E^n}{\left((w_0^2-w^2)^2-\gamma^2w^2\right)^{2n-1}}$.

Мында F_{n-1} туруктуу санынын мааниси рекуренттик түрдө улам мурдакы теңдемелерден аныкталат. Аналогиялуу түрдө (10) теңдеменин чечими $x_n(t)=\left[\frac{e}{m}\right]^{n+1}\times\frac{F_nE^{n+1}}{\left((w_0^2-w^2)^2-\gamma^2w^2\right)^{2n+1}}$, бул жерде туруктуу F_n саны F_{n-1} аркылуу аныкталат. Жыйынтыгында

$$x_n(t)=\left[\frac{e}{m}\right]\times\frac{E}{\left(w_0^2-w^2\right)-\gamma^2w^2}+\left[\frac{e}{m}\right]^2\times\frac{E^2}{\left(\left(w_0^2-w^2\right)-\gamma^2w^2\right)^3}+\left[\frac{e}{m}\right]^3\times\frac{2E^3}{\left(\left(w_0^2-w^2\right)^2-\gamma^2w^2\right)^5}+$$
$$+...+\left[\frac{e}{m}\right]^n\times\frac{F_{n-1}E^n}{\left(\left(w_0^2-w^2\right)^2-\gamma^2w^2\right)^{2n-1}}+\left[\frac{e}{m}\right]^{n+1}\times\frac{F_nE^{n+1}}{\left(\left(w_0^2-w^2\right)^2-\gamma^2w^2\right)^{2n+1}}+....$$

Чечимдер рекуренттик аныкталат. б.а. $x_n(t)=x_{n-1}(t),\ n\in N,$ улам кийинки чечим андан алдынкы чечимден караганда жогорку тартиптгеи чексиз кичине чоңдук болот. Пределдик $\lim_{\xi\to0}x_n(t)=x_0(t)$ барабардыгы орун алып, сызыктуу болгон (1) маселенин чечимине (2) маселенин чечимин умтулары келип чыгат.

Алынган жыйынтыктар жана талкуулоолор. Физикалык жактан алып караганда жарыктын чачыроосу тең салмактуулук $x(t)$ кичинекей болгон учурда сызыктуу болот. Ал эми тескери учурда сызыктуу эмес. Демек, анын математикалык модели козголгон маселеге келип калат. Сызыктуу жарыктын чачыроосун козголбогон маселе катары кабылдайбыз. Мындан көрүнгөндөй сызыктуу эмес чачыроо болгон учур козголгон маселеге дал келет. Изилденүүчүгө негизги маселе болуп козголгон жана козголбогон маселелердин чечиминин жакындыгын мүнөздөөчү пределдик барабардыкты далилдөө болуп саналат. Чечилген маселеден көрүнгөндөй, кичине параметр боюнча жогорку тактыкка дейре каралуучу физикалык кубулуштун табиятын мүнөздөөгө болору келип чыгат.

Корутунду. Жогорку изилденген маселеден көрүнгөндөй козголуу усулун колдонуу менен, мектеп физикасында кездешүүчү кээ бир маселелерди изилдөөгө болору келип чыгат. Каралган мисалда электрондун кыймылынын табиятын так сүрөттөө жогорку тактыкка чейин каралган.

Адабияттар:

1. Акматов А.А. Асимптотическое представление интегралов Френеля в комплексной плоскости. Вестник ОшГУ. - Ош, 2021. - С. 21-27.
2. Акматов А.А. Исследование решений сингулярно возмущенной задачи. Вестник ОшГУ. - Ош. 2021. - С. 28-35.
3. Владмиров В.С. Уравнения математической физики. - Москва: Наука., 1981. - 82-102 с.
4. Каримов С., Акматов А.А. Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, имеющих условную устойчивость. Вестник ОшГУ. - Ош. 2021. - С. 61-69.
5. Каримов С. Акматов А. А., Анарбаева Г.М. Более точные оценки решения сингулярновозмущенной задачи. Вестник ОшГУ. - Ош, 2015. - С. 112-118.
6. Ландсберг Г.С. Оптика. - Москва, 1976. - С. 150-168.
7. Матвеев. Оптика. - Москва, 1985. - С. 232-234.
8. Алымбаев А.Т., Көчөрбаева Б.Э., Токтогулова Ж.Б. Рассмотрение постоянных коэффициентов дифференциальных и необходимых уравнений в рамках связей с предметами. / Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2022. - №. 5. - С. 3-8.
9. Дуйшеналиева У.Э. Обучение к составлению и решению дифференциальных уравнений в школьной математике. / Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2019. №. 5. С. 118-123