DOI:10.26104/NNTIK.2022.62.63.007

Толубаев Ж.О., Тухлиев К., Туйчиев А.М.

L_2(R) МЕЙКИНДИГИНДЕ ОРТОЧО КВАДРАТТЫК БҮТҮН ФУНКЦИЯЛАР БОЮНЧА ЖАКЫНДАШТЫРУУ

Толубаев Ж.О., Тухлиев К., Туйчиев А.М.

СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ L_2(R)

Zh. Tolubaev, K. Tukhliev, A. Tuychiev

ROOT-MEAN-SQUARE APPROXIMATION BY INTEGER FUNCTIONS IN THE SPACE L_2(R)

УДК: 715.5

Математикалык физиканын, кванттык механиканын жана азыркы прикладдык математиканын маселелеринде көбүнчө функцияларды жакындаштыруу теориясы колдонулат, башкача айтканда, кээ бир математикалык объекттердин башкалары тарабынан болжолдуу түрдө көрсөтүлүшүнүн мүмкүндүгү жөнүндөгү маселени изилдөөчү эсептөө математикасынын бөлүмү, эреже катары, жөнөкөй мүнөздөгү, ошондой эле каталар менен киргизилген баа жөнүндө суроолор. Иш функцияларды аппроксималоо теориясында экстремалдык маселелерди чечүүдө бүтүндөй функцияларды колдонууга арналган. Функцияларды жакындатуу теориясынын негизги милдеттеринин бири – Джексон-Стечкин тибиндеги так барабарсыздыктарды табуу. Жексон-Стечкин тибиндеги барабарсыздыктар кеңири мааниде ар кандай нормалдуу X мейкиндигинде – бул мамилелер, мында жеке функциянын эң жакшы жакындашуусу f жакынкы функциянын өзүнө же анын айрым туундуларына мүнөздүү берилген жылмакайлыктын шартында бааланат. $f^{(r)} \in X$. Джексон-Стечкин тибиндеги барабарсыздыктар макалада так табылган. Жана ошондой эле Стеклов оператору менен байланышкан m-тартиптин үзгүлтүксүздүгүнүн атайын модулдары менен аныкталган тиешелүү мейкиндиктердин $L_p(R)$ $(1 \le p \le \infty, R:=(-\infty,+\infty))$, функциялардын кээ бир класстары үчүн ар кандай орточо тууралыктардын так маанилери эсептелинет.

Негизги сөздөр: *эң жакшы жакындоолор, үзгүлтүксүздүктүн m-даражадагы модулу, Джексон-Стечкин тибиндеги барабарсыздыктар, экспоненциалдык типтеги бүткүл функция, ν-туурасы, Стеклов оператору, экстремалдык мүнөздөмө, өлчөөчүлүк, жыйындылык, норма, төмөнкү чети.*

В задачах математической физики, квантовой механики и современной прикладной математики, чаще всего используется теория приближения функций, то есть, раздел вычислительной математики, изучающий вопрос о возможности приближенного представления одних математических объектов другими, как правило, более простой природы, а также вопросы об оценках вносимой при этом погрешности. Работа посвящёна применению целых функций при решении экстремальных задач теории приближения функций. Одной из основных задач теории приближения функций является нахождение точных неравенств типа Джексона-Стечкина. Под неравенствами типа Джексона-Стечкина в широком смысле в любом нормированном пространстве X понимают соотношения,в которых наилучшее приближения индивидуальной функции f оцениваетсячерез заданную характеристику гладкости самой приближаемой функцией или некоторой её производной $f^{(r)} \in X$. В статье найдены точные неравенства типа Джексона-Стечкина. А также вычеслены точные значение различных средних поперечниковдля некоторых классов функцийпринадлежащих пространств $L_p(R)$ $(1 \le p \le \infty, R:=(-\infty,+\infty))$, определяемых специальными модулями непрерывности m-го порядка, связанные с оператором Стеклова.

Ключевые слова: *наилучшие приближения, модуль непрерывности m-го порядка, неравенства типа Джексона-Стечкина, целая функция экспоненциального типа, ν -поперечник, оператор Стеклова, экстремальная характеристика, измеримость, суммируемость, норма, нижняя грань.*

In problems of mathematical physics, quantum mechanics and modern applied mathematics, the theory of approximation of functions is most often used, that is, a section of computational mathematics that studies the question of the possibility of approximate representation of some mathematical objects by others, usually of a simpler nature, as well as questions about estimates of the error introduced in this case. The paper is devoted to the application of integer functions in solving extreme problems of the theory of approximation of functions. One of the main tasks of the theory of approximation of functions is to find exact inequalities of the Jackson-Stechkin type. Jackson-Stechkin type inequalities in a broad sense in any normalized space X are understood as relations in which the best approximation of an individual function f is estimated through a given smoothness characteristic of the most approximated function or some of its derivative $f^{(r)} \in X$. The exact inequalities of the Jackson-Stechkin type are found in the article. And also, the exact values of various average cross-sections for some classes of functions belonging to spaces $L_p(R)$ $(1 \le p \le \infty, R:=(-\infty,+\infty))$, defined by special modules of continuity of the m-th order associated with the Steklov operator are calculated.

Key words: *best approximations, m-th order modulus of continuity, Jackson-Stechkin type inequalities, exponential type integer function, ν -widths, Steklov operator, extreme characteristic, measurability, summability, norm, lower bound.*

Общеизвестно, сопряженные с аппроксимацией на всей оси, первым изложено С.Н. Бернштейном [1], который ввёл понятие оптимальной аппроксимации функции, установленной на безграничном интервале посредством целых функций конечной степени и основал теорию аппроксимации на всей оси.

Предположим $L_p(R)$ $(1 \le p \le \infty, R:=(-\infty,+\infty))$ – пространство измеримых и интегрируемых в p-й степени на всей оси R функций f с нормой

$$\|f\|_{L_p(\mathsf{R})} := \sqrt[p]{\int_{\mathsf{R}} |f(x)|^p\, dx} < \infty \ (1 \le p < \infty).$$

Наряду с этим $L_\infty(R)$ – пространство измеримых и ограниченных на R функций с нормой $\|f\|_{L_\infty(R)} := vraisup\{|f(x)|: x \in R\}$; N – множество натуральных чисел; $Z_+ = N \cup \{0\}$; R_+ – совокупность положительных действительных чисел. С помощью $L_p^{(r)}(R)$ $(1 \le p \le \infty, r \in Z_+; L_p^{(0)}(R) = L_p(R))$ определим совокупность функций $f \in L_p^{(r)}(R)$, для них производные $(r-1)$ -го порядка $f^{(r-1)}$ безусловно непрерывны, а также имеет место, для производных r -го порядка, следуюшие включения $f^{(r)} \in L_p(R)$,$1 \le p \le \infty$. Далее, как в работах [1;2], структурные характеристики функций из $f \in L_p(R)$ определяются обобщённым модулем гладкости m -го порядка созданные с помощью среднего оператора Стеклова функции $f \in L_p(R)$

$$\Omega_m(f;t)_p = \sup\{\|\Delta_h^m(f;\cdot)\|_{L_p(\mathsf{R})} : h \in (0,t]\}, \tag{1}$$

где $\Delta_h^m(f;x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}S_h^k f(x),\ f \in L_p(\mathsf{R}),$ $S_h^0 f(x) = f(x), S_h^k f(x) = S_h\left(S_h^{k-1} f(x)\right), k = \overline{1,m}; m \in \mathsf{N};$

$$S_h f(x) = \frac{\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt}{2h}, h > 0 .$$

С помощью $B_{\sigma,p}(0 < \sigma < \infty, 1 \le p \le \infty)$ определим, сжатие на множество любых функций экспоненциального типа σ, являвшимися элементами в $L_p(R)$. Следующую характеристику $A_\sigma(f)_p := inf\{\|f - g_\sigma\|_p\colon g_\sigma \in B_{\sigma,p}\}$, $1 \le p \le \infty$ называем оптимальной аппроксимацией функции $f \in L_p(R)$ элементами подпространства $B_{\sigma,p}$ $(\sigma \in R_+, 1 \le p \le \infty)$.

Для удобства вводим и изучаем следующую величину

$$M_{\sigma,m,r,q}(\psi;t) := \sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathsf{R})} \frac{A_\sigma(f)_2}{\sqrt[q]{\int_0^t \Omega_m^q(f^{(r)};\tau)_2 \psi(\tau)d\tau}}, \tag{2}$$

где $\psi \ge 0$ –измеримая интегрируемая на сегменте $[0,t]$ функция, не равносильную к нулю; $r \in Z_+; m \in N; t, \sigma \in R_+; 0 < q \le 2$.

Здес подчёкиваем, что в выражении (2), когда структурные характеристики функций определяется классическими модулями гладкости (как определил С.Н. Бернштейном в 1912 г.), а в качестве аппарата аппроксимации употребляются тригонометрические многочлены, при $p \in (0,2]$ ранее исследованные в статье М.Ш. Шабозова и Г.А. Юсупова, а когда p = 2 еще ранее в работе А.А. Лигуна. А также в разных величинах m, p и явных весовых функциях ψ многими исследователями [3-12].

В этой статье продолжим изучение величины (2) и излагаем более обшие и окончательные результаты, нежели в указанных выше цитированных работах, в случае, когда структурный состав функций определяется обобщённым модулем непрерывности m-го порядка, а в качестве аппарата аппроксимации принимаются целые функции. То есть сначало доказываются следуюшие утверждения:

Теорема 1. Если $\psi \ge 0$ – измеримая интегрируемая на сегменте $[0, t]$ функция и $m \in N, r \in Z_+, \sigma \in R_+, t \in (0, \pi/\sigma], q \in (0,2]$. То для величины (2) имеет место следуюшее неравенство

$$\frac{1}{a_{m,r,q}(\psi;t,\sigma)} \le M_{\sigma,m,r,q}(\psi;t) \le \frac{1}{\inf\limits_{\sigma \le u < \infty} a_{m,r,q}(\psi;t,u)},$$

где

$$a_{m,r,q}(\psi;t,u)=\sqrt[q]{u^{rq}\int_0^t\left(\frac{u\tau-\sin u\tau}{u\tau}\right)^{mq}\psi(\tau)d\tau},u\geq\sigma.$$

Отсюда вытекают:

Следствие 1. Если имеет место все условия теоремы 1 и, помимо весовая функция $\psi\geq 0$ является интегрируемой на сегменте $[0,t]$. Тогда для всех $0<t\leq 3\pi/(4\sigma)$ выполняется равенство

$$M_{\sigma,m,r,q}(\psi;t)=\{a_{m,r,q}(\psi;t,\sigma)\}^{-1}:=\frac{\sigma^{-r}}{\sqrt[q]{\int_0^t\left(\frac{\sigma\tau-\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mq}\psi(\tau)d\tau}}.$$

Отсюда если $q=1/m$, $m\in N$, $\psi(\tau)\equiv 1$ и $\psi(\tau)\equiv\tau$, верны следующие равенства

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathsf{R})}\frac{t^m\sigma^r A_\sigma(f)_{L_2(\mathsf{R})}}{\left(\int_0^t\Omega_m^{1/m}(f^{(r)};\tau)d\tau\right)^m}=\left(\frac{\sigma t}{\sigma t-Si(\sigma t)}\right)^m,\sigma\in\mathsf{R}_+,$$

где $Si(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}$;

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathsf{R})}\frac{t^{2m}\sigma^r A_\sigma(f)_{L_2(\mathsf{R})}}{\left(\int_0^t\tau\,\Omega_m^{1/m}(f^{(r)};\tau)d\tau\right)^m}=\frac{2^m}{\left\{1-\left(\frac{2}{\sigma t}\sin\frac{\sigma t}{2}\right)^2\right\}^m}.$$

Далее рассмотрим следуюшую экстремальную характеристику

$$\widetilde{M}_{\sigma,m,r,p}(g;a)=\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathsf{R})}\frac{\sigma^r A_\sigma(f)_2}{\sqrt[p]{\int_0^a\Omega_m^p(f^{(r)};\tau/\sigma)g(\tau)d\tau}},$$

для которых имеет место следующее утверждение:

Следствие 2. Если $g(\tau)\geq 0$ – некоторая измеримая интегрируемая на сегменте $[0,a]$ ($a\in(0,\pi]$) функция и $m\in N, r\in Z_+, 0<p\leq 2$, то имеет место следующее неравенство

$$\{a_{m,r,p}(g;a,1)\}^{-1}\leq\widetilde{M}_{\sigma,m,r,p}(g;a)\leq\left\{\inf_{x\geq 1}a_{m,r,p}(g;a,x)\right\}^{-1}.$$

Если

$$\inf_{x\geq 1}a_{m,r,p}(g;a,x)=a_{m,r,p}(g;a,1),$$

тогда выполняется равенство

$$\widetilde{M}_{\sigma,m,r,p}(g;a)=\frac{1}{a_{m,r,p}(g;a,1)}.$$

Теорема 2. Если $\psi(\tau)$ – некоторая интегрируемая на сегменте $[0,t]$ функция (неэквивалентную нулю),$m\in N, r\in Z_+, 0<p\leq 2, \sigma\in R_+, 0<h\leq 3\pi/(4\sigma)$, тогда справедливо равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathsf{R})}\frac{\sigma^s A_\sigma(f^{(r-s)})_{L_2(\mathsf{R})}}{\sqrt[p]{\int_0^t\Omega_m^p(f^{(r)};\tau)\psi(\tau)d\tau}}=\frac{1}{\sqrt[p]{\int_0^t\left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mp}\psi(\tau)d\tau}},$$

где $s = 0,1,2, \dots, r$.

Для описания будущих новых исследований приводим следующие определения и обозначения.

Далее полагаем, что Q центрально-симметричное множество из $L_p(R)$ и $\nu > 0$ любое число. В таком случае, средним ν -поперечником по Колмогорову множества Q в пространстве $L_p(R)$ понимаются следуюшие равенство

$$\overline{d}_\nu(Q, L_p(\mathsf{R})) := \inf\{\sup\{\inf\{\| f - \varphi \|_p : \varphi \in J\} : f \in Q\} :$$

$$: J \subset Lin_C(L_p(\mathsf{R})), \overline{\dim}(J, L_p(\mathsf{R})) \le \nu\}.$$

Средним прямолинейным ν - поперечником множества Q в $L_p(R)$ именуют величину

С помощью следуюшего равенства

$$\overline{\delta}_\nu(Q, L_p(\mathsf{R})) := \inf\{\sup\{\| f - \Lambda(f) \|_p : f \in Q\} : (X, \Lambda)\},$$

определяется средним линейным ν -поперечником множества Q в $L_p(R)$, где инфимум определяется по модулю всем парам (X, Λ).

Наконец-то с помощью следуюшей формулы определим средние ν -поперечника по Бернштейну множества Q в $L_p(R)$:

$$\overline{b}_\nu(Q, L_p(\mathsf{R})) := \sup\{\sup\{\rho > 0 : J \cap \rho BL_p(\mathsf{R}) \subset Q\} :$$

$$: J \subset Lin_C(L_p(\mathsf{R})), \overline{\dim}(J, L_p(\mathsf{R})) > \nu, \overline{d}_\nu(J \cap BL_p(\mathsf{R}), L_p(\mathsf{R})) = 1\}$$

Если $\Psi_1(t)$, $t \ge 0$ - любая возрастающая непрерывная функция такая, что $\Psi_1(0) = 0$, то для любых $m \in N, r \in Z_+, 0 \le q \le 2$ и $h \in R_+$ подразумеваем

$$W_q^{(r)}(\Omega_m; \Psi_1) = \left\{ f \in L_2^{(r)}(\mathsf{R}) : \frac{1}{h} \int_0^h \Omega_m^q (f^{(r)}; t)_2 \, dt \le \Psi_1^q(h) \right\}.$$

Для каждого центрально-симметричного множества G$\subset L_2(R)$, определим оптимальную аппроксимацию

$$A_\sigma(G)_{L_2(\mathsf{R})} = \sup\{A_\delta(f)_2 : f \in G\},$$

$$\left(\frac{t - \sin t}{t}\right)_* := \left\{\frac{t - \sin t}{t}, \text{если } 0 < t < t_*; \frac{t_* - \sin t_*}{t_*}, \text{если } t \ge t_*\right\},$$

где $4.49 < t_* < 4.51$.

Теперь используя заключения теоремы 1 можно доказать следующее утверждение:

Теорема 3. Пусть для любых $\sigma \in \mathrm{R}_+, 0 < h \le \pi/\sigma$, $m \in \mathrm{N}, 0 < q \le 2$ мажоранта функция Ψ_1 удовлетворяет условию

$$\left(\frac{\Psi_1(h)}{\Psi_1(\pi/\sigma)}\right)^q \ge \frac{\pi \left\{ \int_0^{\sigma h} \left(\frac{t - \sin t}{t}\right)_*^{mq} dt \right\}}{\sigma h \left\{ \int_0^{\pi} \left(\frac{t - \sin t}{t}\right)^{mq} dt \right\}},$$

тогда при $\sigma = \pi\nu (\nu > 0)$, $r \in \mathrm{Z}_+$ получаем равенство

$$\overline{\mu}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m; \Psi_1), L_2(\mathsf{R})) = A_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m; \Psi_1))_{L_2(\mathsf{R})} = \mathcal{E}_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m; \Psi_1); (L_2(\mathsf{R}), \Lambda_{\nu\pi}^*))_{L_2(\mathsf{R})} =$$

$$= \frac{\Psi_1\left(\frac{1}{\nu}\right)}{(\pi\nu)^r \sqrt[q]{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{t-\sin t}{t}\right)^{mq} dt}},$$

где $\overline{\mu}_{\nu}(\cdot)$-любой из перечисленных выше средних ν -поперечников (Колмогорова, линейного, Бернштейна).

Из этой теоремы следует:

Следствие 3. При выполнении условия теоремы 1; $s = 0,1,\ldots,r-1$, где $r \in N$ и $0 < \nu < \infty$, получаем следующее равенство:

$$sup\left\{A_{\nu\pi}\left(f^{(r-s)}\right)_{L_2(\mathrm{R})} : f \in W_q^{(r)}(\Omega_m;\Psi_1)\right\} = \frac{\Psi_1\left(\frac{1}{\nu}\right)}{(\pi\nu)^s \sqrt[q]{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq} dt}}.$$

Литература:

1. Тухлиев К. О наилучших приближениях целыми функциями в пространстве $L_2(R)$. I. Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. -2013. -3(152). -С. 19-29.
2. Тухлиев К. О наилучших приближениях целыми функциями в пространстве $L_2(R)$. II. Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. -2014. -3(156). -С. 7-19.
3. Тухлиев К. Наилучшие приближения и поперечники некоторых классов сверток в L_2. Труды Института математики и механики УрО РАН. -2016. -Т.22.-№4. -С. 284-294.
4. Тухлиев К., Туйчиев А.М.Среднеквадратическое приближение функций на всей оси с весом Чебышева-Эрмита алгебраическими полиномами. Труды Института математики и механики УрО РАН. - 2020. - Т. 26. - №2. - С. 270-277.
5. Тиман М.Ф., Тухлиев К. Состав некоторых ортонормированных систем. Изв.Вузов, Математика. -1983. -№9. -С. 65-73.
6. Тухлиев К.,Муродов К.Н. О верхних гранях отклонения некоторых классов функций от их частных сумм рядов Фурье-Бесселя в пространстве $L_{2,\nu}$.Ученые записки ХГУ им. Б. Гафурова, Серия естественные и экономические науки. 2017. №1(40). -С. 47-57
7. Тухлиев К.,Маликов А.М. О приближении функций в среднем на всей оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева-Эрмита. ДАН РТ. - 2016.-Т. 59. - №7-8. - С. 284-291.
8. Тухлиев К., Бекназаров Дж.Х. О наилучшем приближении функций суммами Фурье-Чебышёва в $L_{2,\mu}$ [-1,1]. ДАН РТ.-2014.-Т.57.-№3. - С. 177-183.
9. Тухлиев Д.К. О точных константах в прямых и обратных теоремах в пространстве Бергмана. ДАН РТ. -2018. -Т.61. -№6. - С. 517-523.
10. Тухлиев Д.К. О точных константах в теоремах о приближении функций в пространстве Бергмана.Учёные записки ХГУ им. Б.Гафурова, Серия естественные и экономические науки. – 2018. – №3 (46). – С.12-22.
11. Толубаев Ж.О. «Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка Вольтерра-Стилтьеса на полуоси», «Наука и новые технологии» № 4, 2013 – Бишкек: 2013. С 69-74. http://www.science-journal.kg/en/journal/1/2013/4/
12. Толубаев Ж.О, Сабиров Я.А, Холбеков Н.О. «Построение оператора регуляризации для решения нелинейного интегрального уравнения первого рода истокопредставимым исходным данным», ISSN 1694-7681 «Известия вузов Кыргызстана» №11, 2019 – Бишкек: 2019. С 3-9. http://www.science-journal.kg/ru/journal/2/2019/11/