DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 1, 2022

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

MATHEMATICAL SCIENCES

Алымбаев А.Т., Бапа кызы А.

ИНТЕГРАЛДЫК МҮЧӨНҮН ВАН-ДЕР-ПОЛЬДУН ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН ЧЫГАРЫЛЫШЫНА БОЛГОН ТААСИРИ

Алымбаев А.Т., Бапа кызы А.

ВЛИЯНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ЧЛЕНА К РЕШЕНИЮ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

A. Alymbaev, Bapa kyzy A.

THE INFLUENCE OF THE INTEGRAL TERM ON THE SOLUTION OF THE VAN DER POL EQUATION SYSTEM

УДК: 517.928

Голландиялык инженер Ван-дер-Польдун эмгектеринин жарык көрүшүнөн кийин, бир жыштыктуу термелүүнү сүрөттөгөн дифференциалдык теңдемелердин системасынын чыгарылыштарын изилдөөчү жаңы эффективдүү ыкма өнүгө баштады. Ван-дер-Поль өзүнүн наамында аталуучу кичине параметрди кармаган экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемени караган. Электр чынжырындагы термелүү кыймылын изилдөө учурунда, ал чөйрөдө термелүү кыймылы убакыттын узак мөөнөтүндө жүрө тургандыгын байкаган. Ал мындай термелүүнү өзүнөн өзү жана турган же автотермелүү деп атаган. Гармоникалык термелүүнү сүрөттөгөн, өзүнүн теңдемесинин чыгарылышын табуу үчүн, атайын тандалып алынган өзгөрмөнү алмаштыруу жолу менен, теңдемени ага эквиваленттүү биринчи тартиптеги амплитудалык жана бурчтук өзгөрүлмө чоңдуктарга карата теңдемелер системасына келтирген. Бирок мындай ыкма толук математикалык формада негизделген эмес. 20 кылымдын 30 жылдарында Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов Ван-дер-Польдун ыкмасынын базасында кыймылды бурчтук жана нормалдык чоңдуктарга ажыратуучу асимптотикалык ыкманы сунуш кылышкан. Макалада интегралдык мүчөнү кармаган Ван-дер-Польдун системасынын жакындаштырылган мезгилдик чыгарылышын табуу маселеси каралат. Интегралдык мүчөнүн, эки өлчөмдүү фазалык тегиздикте, системанын пределдик циклин шарттай турган таасири изилденет.

Негизги сүйлөмдөр: *Ван-дер-Польдун теңдемеси, автотермелүү, гармоникалык баланстуулук ыкмасы, интегралдык мүчөнүн таасири, жакындаштырылган чыгарылыш.*

С появлением работ голландского инженера Ван-дер-Поля [2] получил развитие новый эффективный метод исследования системы дифференциальных уравнений с малым параметром, описывающий одночастотные колебания. В своих исследованиях Ван-дер-Поль рассматривал дифференциальное уравнение второго порядка с малым параметром, которое носит его имя. Изучал колебательные процессы в электрических цепях, он заметил, что в реальных средах колебания может длиться достаточно длительные отрезки времени. Он называл такие колебания самовозбуждающимися или автоколебаниями. Для получения решения своего уравнения, описывающее гармоническое колебание, подходящей заменой переменной получил эквивалентную систему уравнений первого порядка, относительно амплитудной и угловой переменной. Однако такой подход не был математически обоснованным. На базе метода Ван-дер-Поля в тридцатые года XX века Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов предложили асимптотический метод разделения движений, основанный принципу усреднения [3]. В настоящей работе изучается задача построения приближенных периодических решений системы уравнений Ван-дер-Поля с интегральным членом. Показано, влияния интегрального члена, на существование предельных циклов, в двумерной фазовой плоскости.

Ключевые слова: *уравнение Ван-дер-Поля, автоколебания, метод гармонического баланса, влияния интегрального члена, приближенное решение.*

With the appearance of the works of the Dutch engineer Van der Pol [2], a new effective method for studying a system of differential equations with a small parameter, describing single-frequency oscillations, has been developed. In his research, Van der Pol considered a second-order differential equation with a small parameter, which bears his name. He studied oscillatory processes in electrical circuits, he noticed that in real environments, oscillations can last for quite long periods of time. He called such oscillations self-excited or self-oscillations. To obtain a solution to his equation, describing a harmonic oscillation, by a suitable change of variable, he received an equivalent system of equations of the first order, with respect to the amplitude and angular variables. However, this approach was not mathematically justified. Based on the Van der Pol method, in the thirties of the 20th century, N.M. Krylov, N.N. Bogolyubov proposed an asymptotic method for separating motions based on the averaging principle [3]. In this paper, we study the problem of constructing approximate periodic solutions to the Van der Pol system of equations with an integral term. It is shown how the integral term affects the existence of limit cycles in a two-dimensional phase plane.

Key words: *Van der Pol equation, self-oscillations, harmonic balance method, integral term effects, approximate solution.*

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Рассмотрим систему уравнений Ван-дер-Поля вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \lambda(x^2 - 1)y + \lambda \int_t^{t+\tau} x(s)ds, \end{cases} \tag{1}$$

где $\lambda > 0$ – параметр, член $\lambda(x^2 - 1)y$ определяет величину «затухание». Значение «затухание» положительно при $x > 1$ и отрицательно при $x < 1$. Другими словами, колебания малой амплитуды будет раскачиваться, а большой затухать.

Находим приближенное периодическое решение методом гармонического баланса развитой А.А. Кондратьевой [1].

Решение системы при первом приближении ищем в виде:

$$x(t) = a_0 + a_1 cos\omega t + b_1 sin\omega t,$$
$$y(t) = d_0 + d_1 cos\omega t + c_1 sin\omega t,$$

где - частота, $a_0, a_1, b_1, d_0, d_1, c_1$-коэффициенты разложения подлежащие к определению.

Находим производные

$$\dot{x}(t) = -a_1\omega sin\omega t + b_1\omega cos\omega t,$$
$$\dot{y}(t) = -d_1\omega sin\omega t + c_1\omega cos\omega t.$$

Положим $\dot{x}(0) = 0$ тогда $\dot{x}(0) = \omega b_1 = 0$. Отсюда $b_1 = 0$. Следовательно,

$$x(t) = a_0 + a_1 cos\omega t, \qquad \dot{x}(t) = -\omega a_1 sin\omega t, \tag{2}$$
$$y(t) = d_0 + d_1 cos\omega t + c_1 sin\omega t, \qquad \dot{y}(t) = -\omega d_1 sin\omega t + \omega c_1 cos\omega t.$$

Поставляя (2) в системе (1), получим

$$-\omega a_1 sin\omega t = d_0 + d_1 cos\omega t + c_1 sin\omega t, \tag{3}$$

$$-\omega d_1 sin\omega t + \omega c_1 cos\omega t = -a_0 - a_1 cos\omega t - \lambda[(a_0 + a_1 cos\omega t)^2 - 1] \times$$
$$\times (d_0 + d_1 cos\omega t + c_1 sin\omega t) + \lambda \int_t^{t+\tau} (a_0 + a_1 cos\omega s)ds \tag{4}$$

Из равенства (3) получим: $d_0 = 0,\ d_1 = 0,\ c_1 = -a_1$.

Представим (4) в виде

$$-\omega^2 a_1 cos\omega t = -a_0 - a_1 cos\omega t + \lambda\omega a_1 a_0^2 sin\omega t + 2\lambda\omega a_0 a_1^2 cos\omega t sin\omega t +$$
$$+\lambda\omega a_1^3 cos^2\omega t sin\omega t - \lambda\omega a_1 sin\omega t + \lambda a_0 \tau + \lambda \frac{a_1}{\omega}\ (sin\omega(t-\tau) - sin\omega t) \tag{5}$$

Поскольку,

$$cos\omega t sin\omega t = \frac{1}{2} sin2\omega t,$$
$$cos^2\omega t sin\omega t = \frac{1}{4}(sin\omega t + sins\omega t),$$
$$sin\omega(t-\tau) - sin\omega t = (cos\omega\tau - 1)sin\omega t - sin\omega\tau cos\omega t,$$

то равенство (5) имеет вид

$$-\omega^2 a_1 cos\omega t = -a_0 - a_1 cos\omega t + \lambda\omega a_1 a_0^2 sin\omega t + \lambda\omega a_0 a_1^2 sin2\omega t +$$
$$+\lambda \frac{\omega a_1^3}{4}(sin\omega t + sins\omega t) - \lambda\omega a_1 sin\omega t + \lambda a_0\tau + \lambda\frac{a_1}{\omega}\left((cos\omega\tau - 1)sin\omega t - sin\omega\tau cos\omega t\right). \tag{6}$$

Ограничиваясь гармоникой ωt из (6) получим равенство

$$-\omega^2 a_1 cos\omega t = -a_0 - a_1 cos\omega t + \lambda\omega a_1 a_0^2 sin\omega t + \lambda\omega a_1^3 14 sin\omega t - -\lambda\omega a_1 sin\omega t + \lambda a_0\tau +$$
$$+\lambda\frac{a_1(cos\omega\tau - 1)}{\omega} sin\omega t - \lambda\frac{a_1 sin\omega\tau}{\omega} cos\omega t.$$

Отсюда получим

$$(\lambda\tau - 1)a_0 = 0, \quad a_0 = 0,$$
$$-\omega^2 a_1 = -a_1 - \lambda\frac{a_1 sin\omega\tau}{\omega},$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$$\lambda\frac{\omega a_1^3}{4}-\lambda\omega a_1+\lambda\frac{a_1(cos\omega\tau-1)}{\omega}=0.$$

Поскольку

$$\omega^2=1+\frac{\lambda sin\omega\tau}{\omega} \quad \text{и} \quad a_1^2=4-\frac{4(cos\omega\tau-1)}{\omega^2}$$

и

$$sin\omega\tau=\omega\tau-\frac{\omega^3\tau^3}{6},\quad cos\omega\tau=1-\frac{\omega^2\tau^2}{2}$$ при малых τ, то

$$\omega^2=1+\lambda\tau-\frac{\omega^2\tau^2}{6}\quad,\quad a_1^2=4-\frac{4\tau^2}{2}=4\left(1-\frac{\tau^2}{2}\right).$$

Таким образом для малых значений τ имеем

$$\omega^2=\frac{1+\lambda\tau}{1+\frac{\tau^2}{6}}\quad,\quad a_1^2=4\left(1-\frac{\tau^2}{2}\right).$$

Отсюда получим

$$\omega=\sqrt{\frac{1+\lambda\tau}{1+\frac{\tau^2}{6}}}\quad,\quad a_1=2\sqrt{1-\frac{\tau^2}{2}}.$$

Далее, поскольку $c_1=-\omega a_1$, то

$$c_1=-2\sqrt{\frac{1+\lambda\tau}{1+\frac{\tau^2}{6}}}\cdot\sqrt{1-\frac{\tau^2}{2}}\ .$$

Учитывая, что $a_0=0,\ d_0,d_1=0,$ то из (2) получим приближенное решение системы (1) в виде

$$x(t)=2\sqrt{1-\frac{\tau^2}{2}}\cos\left(\sqrt{\frac{1+\lambda\tau}{1+\frac{\tau^2}{6}}}\right)t,$$

$$y(t)=-2\sqrt{\frac{1+\lambda\tau}{1+\frac{\tau^2}{6}}}\cdot\sqrt{1-\frac{\tau^2}{2}}sin\left(\sqrt{\frac{1+\lambda\tau}{1+\frac{\tau^3}{6}}}\right)t.$$

Так как

$$cos\left(\sqrt{\frac{1+\lambda\tau}{1+\frac{\tau^2}{6}}}\right)t=\frac{x(t)}{2\sqrt{1-\frac{\tau^2}{2}}}\quad,\qquad sin\left(\sqrt{\frac{1+\lambda\tau}{1+\frac{\tau^2}{6}}}\right)t=-\frac{y(t)}{2\sqrt{\frac{1+\lambda\tau}{1+\frac{\tau^3}{6}}}\cdot\sqrt{1-\frac{\tau^2}{2}}}\ .$$

Возведя в квадрат обоих частей этих равенств и сложив получим уравнении траекторий решений т.е. предельного цикла системы (1).

$$\frac{x^2(t)}{4(1-\frac{\tau^2}{2})}+\frac{y^2(t)}{4(1-\frac{\tau^2}{2})\cdot\frac{1+\lambda\tau}{1+\frac{\tau^3}{6}}}=1. \qquad (7)$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Это уравнение, семейство уравнений эллипса зависящее от параметров $\lambda > 0$ и $\tau(-\sqrt{2} < \tau < \sqrt{2})$, с полуосями:

$$a^2 = 4\left(1 - \frac{\tau^2}{2}\right), \quad b^2 = 4\left(1 - \frac{\tau^2}{2}\right)\frac{1+\lambda\tau}{1+\frac{\tau^3}{6}} .$$

При $\tau = 0$, получим периодическое решение системы (1) вида

$$x(t) = 2cost, \quad y(t) = -2sint.$$

которое хорошо согласуется с решением работы [1], в первом приближении. Неявный вид образует уравнение окружности с радиусом равный двум (R=2).

$$x^2(t) + y^2(t) = 4, \quad t \in R.$$

При $\tau < \pm\sqrt{2}$ эллипс вырождается в точку т.е. цикл разрушается с влиянием интегрального члена в первом приближении.

При $\tau < 2$ и $\tau > 2$ эллипс преобразуется к мнимому эллипсу, что равносильно разрушению цикла в первом приближении.

Положим $\lambda = 1$ и $\tau = 0{,}5$. Вычислим a и b :

$$a = \sqrt{4\left(1 - \frac{0.5^2}{2}\right)} = 2\sqrt{0.875} = 2 \cdot 0.935 = 1.870,$$

$$b = 1.87 \cdot \sqrt{\frac{1+0.5}{1+\frac{0.5^3}{6}}} = 1.87 \cdot \sqrt{\frac{1.5}{1+\frac{0.5^3}{6}}} = 1.87 \cdot \sqrt{\frac{1.5}{1.02}} = 1.87 \cdot \sqrt{1.47} = 1.87 \cdot 1.212 = 2.266,$$

$$a = 1.87, \quad b = 2.266.$$

Далее пусть $\lambda = 1$ и $\tau = 0{,}8$, тогда

$$a = \sqrt{4\left(1 - \frac{0.8^2}{2}\right)} = 2\sqrt{0.68} = 2 \cdot 0.824 = 1.648,$$

$$b = 1.648 \cdot \sqrt{\frac{1+0.8}{1+\frac{0.8^3}{6}}} = 1.648 \cdot \sqrt{\frac{1.8}{1.085}} = 1.648 \cdot \sqrt{1{,}659} = 1.648 \cdot 1.288 = 2.123.$$

Согласно вычислениям при $\lambda = 1$ и $\tau = 0{,}5$ приближенное периодическое решение имеет вид

$$x(t) = 1.870 \cdot cos1.212t,$$
$$y(t) = -2.266 \cdot sin1.212t.$$

При $\lambda = 1$ и $\tau = 0{,}8$ получим

$$x(t) = 1.648 \cdot cos1.288t,$$
$$y(t) = -2.123 \cdot sin1.288t .$$

Соответственно на фазавой плоскости (x, y) при $\lambda = 1$ и $\tau = 0{,}5$ уравнением эллипса

$$\frac{x^2(t)}{(1.870)^2} + \frac{y^2(t)}{(2.266)^2} = 1 , \quad t \in R.$$

При $\lambda = 1$ и $\tau = 0{,}5$ уравнением эллипса

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$$\frac{x^2(t)}{(1.648)^2} + \frac{y^2(t)}{(2.123)^2} = 1\,, \quad t \in R.$$

Эти кривые изображены на рисунке 1.

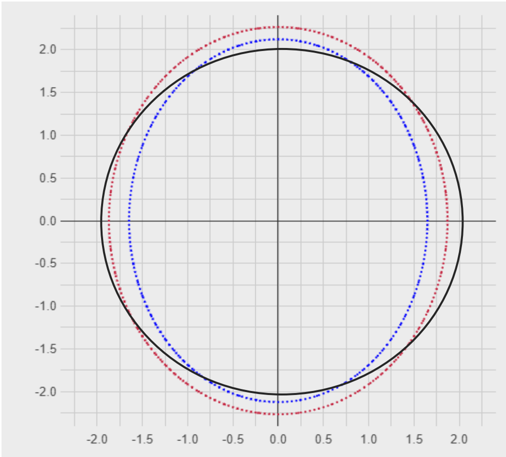

Рис. 1.

Литература:

1. Кондратьева А.А. Численно-аналитические методы локализации предельных циклов в математических моделях нелинейной динамики. Учебное пособие. - М.: Издательство «Доброе слово», 2019 - 49 с.
2. Ван дер Поль. Нелинейная теория электрических колебаний. - М.: Связь издать, 1935. – 220 с.
3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: Физматгиз, 1963. - С. 503.
4. Алымбаев А.Т. Численные, численно-аналитические и асимптотические методы исследования краевых задач. - Бишкек: Издательство КНУ, 2015. - 205 с.