DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 8, 2021

Сражидинов А., Абдраева Н.И., Жалилов М.М.

4-КӨРСӨТКҮЧ ФЕРМАНЫН УЛУУ ТЕОРЕМАСЫН ЖАЛПЫЛАГАН ТЕНДЕМЕЛЕРДИ ЭЛЕМЕНТАРДЫК ЫКМА МЕНЕН ИЗИЛДӨӨ

Сражидинов А., Абдраева Н.И., Жалилов М.М.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫМ МЕТОДОМ УРАВНЕНИЙ, ОБОБЩАЮЩИХ ВЕЛИКУЮ ТЕОРЕМУ ФЕРМА ПОКАЗАТЕЛЯ 4

A. Srazhidinov, N. Abdraeva, M. Zhalilov

STUDY BY AN ELEMENTARY METHOD OF EQUATIONS GENERALIZING FERMAT'S LAST THEOREM OF EXPONENT 4.

УДК: 511.521

Каралып жаткан биздин кыска макалабызда $x^4+y^4=z^2$, $x^4+y^2=z^4$ жана $x^2+y^4=z^4$ теңдемелери натуралдык сандар көптүгүндө чыгарылышка ээ болбой тургандыгы (теорема 1) мектеп окуучуларына оңой түшүнгүдөй ыкма менен далилденди. Максат – каралып жаткан теңдемелерди да Ферманын улуу теоремасынын айрым учурлары болгон $x^4+y^4=z^4$ жана $x^3+y^3+z^3=0$ теңдемелери менен бирге мектеп факультативдик курсуна кийирүү. Ошондой эле аталган теңдемелер жөнөкөй жана мектеп окуучуларына жетишээрлик түшүнүктүү. Аларды макалада сунушталган ыкмалардын жардамында изилдөө – курска катышуучулардын математикалык логикасын өстүрүүгө салым кошот деген ойдобуз. Теорема 1ге карата келтирилген эскертүүдөгү $x^2+y^2=z^4$, $x^2+y^4=z^2$ жана $x^4+y^2=z^2$ теңдемелеринин бүтүн чыгырылыштарын факультативдик курска катышуучулар тарабынын өз алдынча, мүмкүн болсо, адегенде алардын алгоритмин түзүп, анын негизинде чыгара билүүсү да теманы терең өздөштүрүүгө жардам берет.

Негизги сөздөр: *Ферманын Улуу теоремасы, 3-көрсөткүч 4-көрсөткүч, жөнөкөй сандар, сандардын жуптугу, далил, тандалма курс, окуучулар.*

В данной заметке рассматриваются уравнения $x^4+y^4=z^2$, $x^4+y^2=z^4$ и $x^2+y^4=z^4$ и простым способом доказываются, что ни одно из них не имеет решений в натуральных числах. Цель – указанные уравнения наряду с уравнениями $x^4+y^4=z^4$, $x^3+y^3+z^3=0$, являющимися частным случаем Великой теоремы Ферма, включить в факультативный курс школьников. Освоение участниками факультативного курса доказательства теоремы 1, нам кажется, развивает их математическую логику и культуру. Разработка алгоритмов и на основании их нахождение чисел, удовлетворяющих любому из уравнений $x^2+y^2=z^4$, $x^2+y^4=z^2$, $x^4+y^2=z^2$, несомненно, представляет интерес у участников к математике. Составленный таким образом факультативный курс, наверняка, оправдывает цель – приковывать любовь к вечно цветущей науке, так называемой математикой.

Ключевые слова: *Великая теорема Ферма, показатель 3 показатель 4, простые числа, четность чисел, доказательство, факультативный курс, школьники.*

In this note we consider equations $x^4+y^4=z^2$, $x^4+y^2=z^4$ and $x^2+y^4=z^4$ and is proved in a simple way that none of them has solutions in natural numbers. It seems to as that the participants mastering the proof of Theorem 1 in the optional course develops their mathematical logic and culture. The development of algorithms and, on the basis of them, finding numbers that satisfy any of the equations $x^2+y^2=z^4$, $x^2+y^4=z^2$ and $x^4+y^2=z^2$ is undoubtedly of interest to the participants in mathematics. An optional course for schoolchildren, based on special cases of Fermat's Last Theorem – equations $x^4+y^4=z^4$, $x^3+y^3+z^3=0$, as well as the equations mentioned above probably justifies the goal – to rivet love for the ever-flourishing science, the so-called mathematics.

Key words: *Fermat's Great Theorem, exponent 3 exponent 4, prime numbers, parity of numbers, proof, elective course, schoolchildren.*

Исторические справки о Великой теореме Ферма можно найти, например, в книгах [1, 2], а ее доказательству посвящены работы [3, 4, 5]. В данном сообщении доказывается:

Теорема 1. В натуральных числах не имеет решений ни одно из уравнений

$x^4+y^4=z^2$, (1)

$x^4+y^2=z^4$, (2)

$x^2+y^4=z^4$. (3)

Теорему докажем методом от противного. Предположим, что для некоторых натуральных чисел x, y и z имеет место равенство (1) (или (2), или (3)). Без ограничения общности, можно считать, что $D(x,y)=1$, т.е. натуральные числа x и y взаимно простые. Тогда из (1) (а также из (2) и (3)) очевидно получаем, что $D(x, z)=1$, $D(y, z)=1$. Эти условия будем считать выполнены. В далнейшем ползуемся следующим общеизвестным фактом. Для удобства ниже приводим его формулировки.

Лемма 1. Для взаимно простых натуральных чисел a,b,c равенство $a^2+b^2=c^2$ имеет место лишь тогда, когда одно из a и b четное, скажем a четное, а c нечетное, причем выполняются равенства $a=2mn$. $b=m^2-n^2$. $c=m^2+n^2$ при некоторых взаимно простых натуральных числах $m, n, m > n$.

Записав уравнение (1) в виде $(x^2)^2+(y^2)^2=z^2$ и применяя к последному равенству лемму 1, получим:

$x^2=2mn,\ y^2=m^2-n^2,\ z=m^2+n^2$, (4)

где m, n – взаимно простые натуральные числа, причем $m > n$, m – нечетное в силу (4). Из первого равенства (4) заключаем, что

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$m= m_1^{\,2}, n= 2n_1^2$ (5)

Из (4) и (5) непосредственно получаем, что

$x =2m_1n_1,\ y^2=m_1^{\,4}– 4n_1^4,\ z = m_1^{\,4}+ 4n_1^4$, (6)

а также $D(m_1, n_1)=1$, Из второго равенства (6) в силу леммы 1 находим:

$2n_1^2 =2m_2n_2,\ y=m_2^2– n_2^2,\ m_1^{\,2}= m_2^2+ n_2^2$. (7)

А из первого равенства (7) определим:

$m_2= m_3^2,\ n_2 = n_3^2$. (8)

Тогда из последного равенства (7) в силу (8) имеем:

$m_1^{\,2}= m_3^4+ n_3^4$. (9)

Последнее уравнение (9) также имеет вид (1), т.е.

$x_1^{\,4}+y_1^4 =z_1^2$, (10)

где $x_1 = n_3,\ y_1 = m_3,\ z_1= m_1$. Из равенства (1) мы получаем (10). Покажем, что это не верно. Прежде всего, в уравнении (1) заметим, что $D(x,y)=1$ и x – четное. Поэтому среди таких решений (x, y, z) всегда найдется компонента x, которая является наименьшей остальных. Значит $x \le x_1$, т.е.

$x \le n_3$. (11)

С другой стороны, $x >n_3$. Действительно, из равенств (4), (5), (7) и (8) непосредственно получаем:

$x^2 =2mn= 4m_1^{\,2}n_1^{\,2}=4m_1^{\,2}\, m_2n_2= 4m_1^{\,2}\, m_3^{\,2}n_3^{\,2}$, т.е. $x^2=4m_1^{\,2}\, m_3^{\,2}n_3^{\,2}$. Откуда,

$x=2m_1 m_3 n_3$ (12)

Так как m_1, m_3 и n_3 натуральные числа, то из (12) следует, что:

$x >2n_3$ (13)

Мы получили противоречие, т.е. неравенство (11) противоречит неравенство (13). Так что уравнение (1) в натуральных числах не имеет решений.

Переходим к уравнению (2). Рассуждая как и выше, имеем:

$x^2 =2mn,\ y=m^2 - n^2,\ z^2 = m^{\,2}+ n^2$ (14)

Откуда, $m= m_1^{\,2}, n= 2n_1^2$, и, следовательно,

$x =2m_1n_1,\ y=m_1^{\,4}- 4n_1^4,\ z^2 = m_1^{\,4}+ 4n_1^4$ (15)

Из первого равенства (15) находим: $m_2 =m_3^2$, $n_2=n_3^2$. Поэтому второго из равенств (15) принимает вид $m_1^{\,2}= m_3^4+ n_3^4$, т.е.

$x_1^{\,4}+y_1^4 =z_1^2$, (16)

где $x_1 = n_3,\ y_1 = m_3,\ z_1= m_1$. Мы получили уравнение (16) вида (1). Выше показано, что уравнение (16) не имеет решений в натуральных числах, и, следовательно, таковым является и уравнение (2).

Теперь, переходим к последному третьему уравнению (3). Из (3) аналогичным рассуждением получаем:

$x =2mn, y^2=m^2 - n^2, z^2 = m^{\,2}+ n^2$, (17)

где m, n – взаимно простые, причем, например, согласно последному из равенств (17) , m – нечетное , n – четное натуральные числа. Непосредственно из последных двух равенств (17) следует, что $(yz)^2= m^4–n^4$, т.е. равенство вида (1). Действительно, для этого достаточно переобозначить через x, y и z числа n, yz и m соответственно. А уравнение (1), как показано выше, не имеет решений. Следовательно, тогда и уравнение (3) не может выполняться в натуральных числах. Теорема доказана.

Замечание. Аналогичное утверждение неверно относительно уравнений

$x^2 +y^2 =z^4 ,\ x^2 +y^4 =z^2 ,\ x^4 +y^2 =z^2$. (18)

Действительно, например, тройки чисел *(840; 41; 29), (312; 5; 313), (28; 2337; 2465)* удовлетворяют соответственно уравнение (18).

Литература:

1. Саймон Сингх. Великая теорема Ферма. - М.: МЦНМО, 2000. - 288 с.
2. Энциклопедический словарь юного математика/ Сост. А.П. Савин. - М.: Педагогика, 1985. - 352 с.
3. Wiles A. Modular elliptic curves and Fermat`s Last Theorem// Ann. of Math., 1995. - Vol. 142. - P. 443-551.
4. Taylor R., Wiles A. Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras// Ann. of Math., 1995. Vol. 142, P. 553-572.
5. Сражидинов А. Элементарное доказательство Великой теоремы Ферма, адаптированное для факультативного курса школьников // Изв. ОшТУ. - №2, 2020. - С. 205-212.
6. Сражидинов А., Абдраева Н.И., Бекмурзаева Б.А. Элементарное доказательство великой теоремы Ферма при показателе 4. / Известия ВУЗов Кыргызстана. - 2021. - №. 3. - С. 23-25.