DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 8, 2021

Байгесеков А.М.

БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕС ТИБИНДЕГИ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН ЖАРЫМ ОКТОГУ БААЛООЛОРУ

Байгесеков А.М.

ОЦЕНК РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ТИПА ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕСА НА ПОЛУОСИ

A. Baygesekov

THE ESTIMATES OF SOLUTIONS OF A SYSTEM OF LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST ORDER OF TYPE VOLTERRA-STYLTIES ON THE SEMI-AXIS

УДК: 517.968.72

Вольтерра-Стилтьес тибиндеги сызыктуу биринчи тартиптеги интегро-дифференциалдык теңдемелер системасынын бардык чыгарылыштарынын жарым октогу баалоолорун камсыздай турган жетиштүү шарттар табылат. Бул шарттар жеңил текшериле турган «функциянын белгилери жана функциянын жарым окто абсолюттук интегралданышы түрүндө» алынат. Ошондой эле матрицалардын квадраттык формалары колдонулат. Макалада С.Искандаровдун (1995) матрицалык салмактык жана кесүүчү функциялар методу жана Вольтерра-Стилтьес интегралы менен интегралдык барабарсыздыктар методу өнүктүрүлөт. Каралган системада теңдемелерди интегралдоо өсүүчү функция боюнча жүргүзүлөт жана А. Асановдун аныктамасы (2001) колдонулат. Ж.О. Толубаевдин кандидаттык диссертациясындагы (2016) тиешелүү жыйынтыктар жалпыланат. Сунушталган макаладагы баалоолорго окшош баалоолор Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелер системасы үчүн С.Искандаров тарабынан (1995) каралган, ал эми Вольтерра-Стилтьес тибиндеги системалар үчүн эч ким чыгарылыштардын баалоолорун «асимптотикалык касиеттери белгилүү» скалярдык функциянын жардамы аркылуу сунуштаган эмес. Макалада алынган баалоолордун баалуулугу ушундайча аныкталат. Макаладагы теореманын шарттарын текшерүү кыйынчылык туудурбайт деп эсептейбиз.

Негизги сөздөр: *интегро-дифференциалдык теңдемелер, система, өсүүчү, шарттар, матрица, функциялар, Вольтерра-Стилтьес, лемма, асимптотикалык, симметриялык.*

Устанавливаются достаточные условия, позволяющие оценки всех решений системы линейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка типа Вольтерра-Стилтьеса на полуоси. Эти условия получаются в виде «знаков функции и абсолютного интегрирования функции на полуоси», что легко проверяется. Также используются квадратные формы матриц. В статье развивается методы С.Искандарова (1995) матричных весовых функций и срезывающих функций, метод интегральных неравенств с интегралом Вольтерра-Стилтьеса. В этой системе интегрирование в уравнениях выполняется по возрастающей функции и используется определение А.Асанова (2001). Обобщены соответствующие результаты кандидатской диссертации Ж.О. Толубаева (2016). Оценки, аналогичные приведенным в предлагаемой статье, были предоставлены С.Искандаровым (1995) для системы интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтера, и никто не предложил оценок для систем типа Вольтерра-Стилтьеса с использованием скалярной функции «известной как асимптотические свойств». Так определяется ценность полученных в статье оценок. Считаем, что проверить условия теоремы в статье несложно.

Ключевые слова: *интегро-дифференциальные уравнения, система, приращения, условия, матрица, функции, Вольтерра-Стилтьес, лемма, асимптотическая, симметричная.*

Sufficient conditions are established that make it possible to estimate all solutions of a system of linear integro-differential equations of the first order of Volterra-Stieltjes type on the semiaxis. These conditions are obtained in the form of «signs of the function and absolute integration of the function on the semiaxis», which is easily verified. Also used are square matrix shapes. The article develops the methods of S. Iskandarov (1995) of matrix weight functions and cutting functions, the method of integral inequalities with the Volterra-Stieltjes integral. In this system, the integration in the equations is performed over an increasing function and the definition of A. Asanov (2001) is used. The corresponding results of Zh.O. Tolubaev's Ph.D. thesis (2016) are generalized. Estimates similar to those in this paper were provided by S. Iskandarov (1995) for a system of Voltaire-type integro-differential equations, and no one has proposed estimates for Volterra-Stieltjes-type systems using the scalar function «known as asymptotic properties». This is how the value of the grades obtained in the article is determined. We believe that it is not difficult to verify the conditions of the theorem in the article.

Key words: *integro-differential equations, system, increments, conditions, matrix, functions, Volterra-Stilties, lemma, asymptotic, symmetric.*

Все фигурирующие функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0, t \geq \tau \geq t_0$; нормы $\|x\|$ и $\|A\|$ для $n \times 1$ вектора $x = \{x_i\}$ и $n \times n$ матрицы $A = (a_{ik})$ означают (см, например, [1, с.142, 2,с.10]) : $\|x\| = (x_1^2 + \; ... \; x_n^2)^{1/2}$ - евклидова длина вектора x и $\|A\| = \sqrt{\gamma}$, где γ – наибольшее собственное значение матрицы $A^T A$, при этом справедливо соотношения $\gamma \leq \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}^2$, здесь A^T – транспонированная для матрицы $A = (a_{ik})$, т.е. $A = (a_{ki})$; соотношения для матриц понимаются как соотношения для их

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

квадратичных форм с любым ненулевым вектором, например, для $n \times n$ матриц A, B оценка $A \geq B$ означает: $(Ax, x) \geq (Bx, x)$ для любого вектора $x \neq 0$; под $\langle x, y \rangle$ понимается скалярное произведение векторов $x = \{x_i\}$ $y = \{y_i\}$: $\langle x, y \rangle = = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$;

СИДУВС – система интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра - Стилтьеса; $J = [t_0, \infty)$;

Изучается следующая задача. Установить достаточные условия для оценки решений СИДУВС вида:

$$x'(t) + A(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x(t)\, dg(\tau) = f(t), t \geq t_0 \qquad (1)$$

где $x(t) = \{x_i(t)\} = col(x_1(t), x_2(t) \ldots x_n(t))$ - n× 1- неизвестная вектор-функция, $A(t), K(t,\tau)$ - известные $n \times n$ матричные функции, $g(t)$ - возрастающая скалярная известная функция; $f(t)$ - n × 1 - известная вектор - функция. Как известно, $A(t)$ - коэффициент, $K(t,\tau)$ - ядро, $f(t)$ - свободный член СИДУВС (1). В (1) $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dg(t)} \cdot \frac{dg(t)}{dt}, \frac{dx(t)}{dg(t)} == x'_{g(t)}$ - производная от $x(t)$ по возрастающей функции понимается в смысле определения А.Асанова [3,8,9].

Отметим, что в настоящей работе устанавливаются оценки решений СИДУВС (1) следующего вида:

$$\|x(t)\| = M(t)O(1), \qquad (2)$$

где $0 < M(t)$ - скалярная функция, допускающая наложения условий, гарантирующие асимптотические свойства (ограниченность на J, стремления к нулю при $t \to \infty$ и т.д.) для любого решения $x(t)$ СИДУВС (1), $O(1)$ - символ Ландау, означающий ограниченность на J.

Заметим, что ранее СИДУВС вида (1) рассмотрена в кандидатской диссертации Ж.О. Толубаева [4] и получены достаточные условия принадлежности пространству $L^2_{n,g}[t_0, \infty)$ любого решения уравнения (1) в случае, когда $f(t) \in L^2_{n,g}[t_0, \infty)$. Имеются несколько статей и работ А. Асанова и Ж.О. Толубаева, результаты которых включены в [4].

Отметим также, что выше поставленная нами задача изучается впервые и дает возможность значительно расширить классы СИДУВС из [4].

Для решения нашей задачи мы развиваем матричный метод весовых и срезывающих функций С. Искандарова [5, 6].

Приступаем к получению основного результата.

Аналогично [5, 6] введем следующие предположения и обозначения:

$0 < \Phi(t)$ - некоторая неособенная $n \times n$ симметричная матричная функция, т.е. $\Phi^{\mathrm{T}}(t) = \Phi(t)$;

$$K(t,\tau) = \sum_{j=0}^{m} K_j(t,\tau), \qquad (K)$$

$$f(t) = \sum_{j=0}^{m} f_j(t), \qquad (f)$$

$S_j(t)$ $(j = 1 \ \ldots \ m)$ - некоторые неособенные срезывающие $n \times n$ матричные функции;

$R_j(t,\tau) \equiv \left(S_j^{-1}(t)\right)^T \Phi(t) K_j(t,\tau) S_j^{-1}(\tau)$ - симметрические матрицы;

$E_j(t) \equiv \left(S_j^{-1}(t)\right)^T \Phi(t) f_j(t), (j = 1 \ldots m)$;

$R_j(t,\tau) = M_j(t) + T_j(t)$ $(j = 1 \ldots m)$, $\qquad (R)$

$c_j(t)(j = 1 \ldots m)$ - некоторые скалярные функции.

Для произвольно фиксированного решения $x(t)$ СИДУВС (1) умножаем скалярно на вектор $\Phi(t)x(t)$, затем интегрируем в пределах от t_0 до t по Стилтьесу (по возрастающей функции $g(t)$). Тогда получаем следующее тождество:

$$\int_{t_0}^{t_0} \langle x'(s), \Phi(s)x(s) \rangle dg(s) + \int_{t_0}^{t_0} \langle A(s)x(s), \Phi(s)x(s) \rangle dg(s) +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \left\langle \int_{t_0}^{s} K(s,\tau)x(\tau)dg(\tau), \Phi(s)x(s) \right\rangle dg(s) \equiv \int_{t_0}^{t} \langle f(s), \Phi(s)x(s) \rangle\, dg(s). \qquad (3)$$

Далее проведем следующие преобразования:

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

I. $\int_{t_0}^{t}\langle x'(s),\Phi(s)x(s)\ \rangle\, dg(s) = \int_{t_0}^{t}\langle\frac{g(s)}{d(s)}\cdot\frac{dx(s)}{dg(s)},\Phi(s)x(s)\ \rangle\, dg(s) = \int_{t_0}^{t}\langle g'(s)\Phi(s)\frac{dx(s)}{dg(s)},x(s)\rangle\, dg(s) = \frac{1}{2}\langle g'(t)\Phi(t)x(t),x(t)\rangle - c_* - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\langle (g'(s)\Phi(s))'_{g(s)}x(s),x(s)\ \rangle\, dg(s),$ (4)

где $c_* = \frac{1}{2}\langle g'(t_0)\Phi(t_0)x(t_0),x(t_0)\rangle$ (мы учитываем симметричность матрицы $\Phi(t)$);

II. $\int_{t_0}^{t}\langle\int_{t_0}^{s}K(s,\tau)x(\tau)dg(\tau),\Phi(s)x(s)\rangle\, dg(s) = \int_{t_0}^{t}\langle\int_{t_0}^{s}\Phi(s)K(s,\tau)dg(\tau),x(s)\rangle\, dg(s) =$
$= \sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\langle\int_{t_0}^{s}\Phi(s)K_j(s,\tau)x(\tau)dg(\tau),x(s)\rangle\ dg(s) + \int_{t_0}^{t}\langle\int_{t_0}^{s}\Phi(s)K_0(s,\tau)x(\tau)dg(\tau),x(s)\rangle\ dg(s) =$
$= \sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\langle\int_{t_0}^{s}\Phi(s)K_j(s,\tau)S_j^{-1}(\tau)S_j(\tau)dg(\tau),S_j^{-1}(s)S_j(s)x(s)\rangle\ dg(s) +$
$+ \int_{t_0}^{t}\langle\int_{t_0}^{s}\Phi(s)K_0(s,\tau)x(\tau)dg(\tau),x(s)\rangle\ dg(s) = \sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle R_j(s,\tau)S_j(\tau)x(\tau),\ S_j(s)x(s)\rangle\, dg(\tau)dg(s) +$
$+ \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle\Phi(s)K_0(s,\tau)x(\tau),x(s)\rangle\, dg(\tau)\ dg(s).$ (5)

Для получения соотношения (5) мы использовали условия (K) и ввели некоторые неособенные срезывающие функции $S_j(t)(j = 1 \dots n)$. Теперь к (5) применим преобразования, аналогичные (3.2.6) - (3.2.13) [4]. Тогда имеем

$\int_{t_0}^{t}\langle\int_{t_0}^{s}K(s,\tau)\,x(\tau)dg(\tau),\Phi(s)x(s)\rangle\, dg(s) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\{\langle R_j(t,t_0)y_j(t,t_0),y_j(t,t_0)\rangle -$
$- \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\langle R'_{jg(s)}(s,t_0)y_j(s,t_0),y_j(s,t_0)\rangle\, dg(s) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\langle R'_{jg(\tau)}(t,\tau)y_j(t,\tau),y_j(t,\tau)\rangle\ dg(\tau) -$
$- \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle R''_{jg(\tau)g(s)}(s,\tau)y_j(s,\tau),y_j(s,\tau)\rangle\, dg(\tau)dg(s)\} + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle\Phi(s)K_0(s,\tau)x(\tau),x(s)\rangle\, dg(\tau)dg(s),$ (6)

где $y_j(t,\tau) \equiv \int_{\tau}^{t}S_j(\eta)x(\tau)dx\ (j = 1 \dots n)$;

III. $\int_{t_0}^{t}\langle f(s),\Phi(s)x(s)\rangle dg(s) = \sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\langle\Phi(s)f_j(s),S^{-1}(s)S_j(s)x(s)\ \rangle\, dg(s) + \int_{t_0}^{t}\langle\Phi(s)f_0(s),x(s)\ \rangle\, dg(s) =$
$= \sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\langle E_j(s),S_j(s)x(s)\rangle dg(s) + \int_{t_0}^{t}\langle\Phi(s)f_0(s),x(s)\ \rangle\ dg(s) =$
$= \sum_{j=1}^{m}\left[\langle E_j(t),y_j(t,t_0)\rangle - \int_{t_0}^{t}\langle E'_j(s),y_j(s,t_0)\rangle\, dg(s)\right] + \int_{t_0}^{t} < \Phi(s)f_0\,(s),x(s) > dg(s).$ (7)

(Для получения соотношения (7) мы использовали условия (f), ввели функции $S_j(t)(j = 1 \dots m)$ и интегрировали по частям).

С учетом преобразований I, II, III, т.е. соотношений (4), (6), (7) из тождества (4) приходим к следующему тождеству, при этом вводим скалярные функции $c_j(t)\ (j = 1 \dots m)$ аналогично работам [5,6]:

$\langle g'(t)\Phi(t)x(t),x(t)\rangle + \int_{t_0}^{t}\langle D(s)x(s),x(s)\rangle ds + + \sum_{j=1}^{m}\{\langle M_j(t)y_j(t,t_0),y_j(t,t_0)\rangle + \langle T_j(t)y_j(t,t_0),y_j(t,t_0)\rangle -$
$-2\langle E_j(t),y_j(t,t_0)\rangle + c_j(t) - \int_{t_0}^{t}[\langle (T'_j(s)y_j(s,t_0),y_j(s,t_0))\rangle -$
$-2\langle E'_j(s),y_j(s,t_0)\rangle + c'_i(s)\ ]ds + \int_{t_0}^{t}\langle R'_{jg(\tau)}(t,\tau)y_j(t,\tau),y_j(t,\tau)\rangle\, dg(\tau)\} \equiv$
$\equiv c_{**} + \sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\left[\langle M'_j(s)y_j(s,t_0),y_j(s,t_0)\rangle + \int_{t_0}^{s}\langle R''_{jg(\tau)g(s)}(s,\tau)y_j(s,\tau),y_j(s,\tau)\rangle\, dg(\tau)\right] dg(s) -$
$2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle\Phi(s)K_0(s,\tau)x(\tau)dg(\tau),x(s)\rangle + \langle\Phi(s)f_0(s),x(s)\rangle dg(s)$ (8)

где $D(t) \equiv 2\Phi(t)A(t) - \left(g'(t)\Phi(t)\right)',\ c_{**} = c_* + \sum_{j=1}^{m}c_j\,(t_0).$

Переходом от тождества (8) к интегральному неравенству и применяя лемму об интегральном неравенстве с интегралом Стилтьеса из статьи [7], доказывается

Теорема. Пусть

1) $g(t) -$ возрастающая функция; $0 < \Phi(t)$ -некоторая неособенная весовая симметрическая $n \times n$ матричная функция; выполняются условия $(K),(f),(R)$; $S_j(t)(j = 1 \dots n)$ - некоторые неособенные срезывающие $n \times n$ матричные функции; $R_j(t,\tau)(j = 1 \dots m)$ - симметрические $n \times n$ матричные функции;

2) существует скалярная функция $\Delta(t) > 0$ такая, что $g'(t)\Phi(t) \geq \Delta(t)$;

3) $D(t) \geq 0$;

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

4) $M_j(t) \geq 0, T_j(t) \geq 0, T_j'(t) \leq 0,\ R'_{jg(\tau)}(t,\tau) \geq 0$, существует скалярные функции $\mu_j(t)\epsilon L^1(J,R_+),\ c_j(t),\ r_j(t)\epsilon L^1(J,R_+)$ такие, что $M_j'(t) \leq \mu_j(t)M_j(t),\quad R''_{jg(\tau)g(t)}(t,\tau) \leq\ r_j(t)\ R'_{jg(\tau)}(t,\tau)$, для любого $n \times 1$ векторов u_j:$(-1)^k\left[\langle T_j(t)u_j, u_j\rangle - 2\langle E_j(t), u_j\rangle + c_j(t)\right] \geq 0\ (j = 1 \dots m);\ k = 0{,}1)$;

5) $\Delta(t)^{-\frac{1}{2}}\left[\int_{t_0}^{t}\|\Phi(t)K_0(t,\tau)\|dg(\tau) + ||\Phi(t)f_0(t)||\right] \in L^1_{n,g}[t_0,\infty)$.

Тогда для любого решения СИДУВС (1) $x(t) \in C^1(J,R^n)$ с любым $x(t_0)$ справедлива оценка:

$$\|x(t)\| = \Delta(t)^{-\frac{1}{2}}\,O(1).$$

Замечание. Исходя из оценки теоремы можно сформулировать следствия от асимптотических свойств решений (об ограниченности и степенной абсолютной интегрируемости на J, о стремлении к нулю при $t \to \infty$) СИДУВС (1), аналогично [5,6].

Таким образом, нам удалось найти достаточные условия разрешимости выше поставленной нами задачи.

Литература:

1. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. - М: Наука, 1967. - 224 с.
2. Тышкевич В.А. Некоторые вопросы теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений. - Киев: Наука. думка, 1981. - 80 с.
3. Асанов А. Производная функции по возрастающей функции // Табигый илимдер журналы. - Бишкек: Кыргызско-Турецкий университет «Манас», 2001. - С. 18-64.
4. Толубаев Ж.О. Ограниченность и квадратичная суммируемость решений интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра-Стилтьеса: Дисс… канд.физ. – мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2016. – 108 с.
5. Искандаров С. Метод матричных весовых и срезывающих функций в асимптотической теории вольтерровых систем на полуоси // Вестник КГНУ. Сер. Естественно-технические науки. - Бишкек, 1995. - Вып.1, 4.1 – С. 163-171.
6. Искандаров С. Метод матричных весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра на полуоси // Исслед. по интегро-дифференц.уравнениям. - Бишкек: Илим, 2000. - Вып.29. - С. 88-99.
7. Искандаров С. О леммах с интегралом Стилтьеса и их применении к изучению асимптотических свойств решений вольтерровых интегро-дифференциальных и интегральных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц.уравнениям. - Бишкек: Илим, 1999. - Вып.28. - С. 64-74.
8. Искандаров С., Байгесеков А.М. Об оценке и асимптотических свойствах решений слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка Вольтерра-Стилтьеса на полуоси // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. - Бишкек, 2016. - №7. - С. 7-11.
9. Искандаров С., Байгесеков А.М. О степенной абсолютной интегрируемости на полуоси решения линейного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго рода// Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. - Б., 2016. - №8(2). - С. 33-36.