

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Аширбаев Б.Б., Апышова Г.Ж.

**СЫЗЫКТУУ СИНГУЛЯРДЫК КЕҢЕЙТИЛГЕН ОПТИМАЛДЫК ТЕЗ КЫЙМЫЛ
 МАСЕЛЕСИНИН АСИМПТОТИКАЛЫК ЧЫГАРЫЛЫШЫ**

Аширбаев Б.Б., Апышова Г.Ж.

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОЙ
 ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ**

B.Y. Ashirbaev, G.Zh. Apysheva

**ASYMPTOTIC SOLUTION OF A LINEAR SINGULAR-PERTURBED
 OPTIMAL SPEED PROBLEM**

УДК: 519.714.4

Макалада динамикалык объектиси сингулярдык-кеңейтилген система (туундунун алдында кичине параметр болгон система) болгон оптималдык тез кыймыл маселеси изилденген. Каралган сингулярдык-кеңейтилген системада жай жана тез өзгөрмөлөрдүн абалдары бөлүнгөн жана алар башкаруу функциясы менен гана бири бири менен байланышкан, бул система берилген сингулярдык-кеңейтилген системага эквиваленттүү болуп эсептелинет. Өзгөрмөлөрү бөлүнгөн сингулярдык-кеңейтилген системаны алуунун зарыл жана жетиштүү шарты болуп, макалада келтирилген Риккати жана Ляпунов теңдемелеринин чыгарылыштарынын болушу жана жалгыздыгы эсептелинет. Макалада бул чыгарылыштар бир калыпта жыйналуучу даражалуу катарлар менен берилээри жана ал катарлардын жардамы менен Риккати жана Ляпунов теңдемелеринин чыгарылыштары аныкталган. Эквиваленттүү сингулярдык-кеңейтилген системаны $O(\mu)$ тактыгында аппроксимациялоочу асимптотикалык система үчүн моменттер методунун жардамы менен сингулярдык-кеңейтилген оптималдык тез кыймыл маселесинин оптималдык башкаруу функциясын аныктоо формуласы алынды. Белгисиз параметрлерди аныктоо талап кылынган кошумча маселенин жакындаштырылган чыгарылышын аныктоо ыкмасы сунушталды.

Негизги сөздөр: сингулярдык-кеңейтилген дифференциалдык теңдемелер, шарттуу экстремум, шартсыз экстремум, ылдый түшүү ийри сызыгы, ылдый түшүү ылдамдыгы, гипертегиздик.

В статье исследуется задача оптимального быстрого действия динамическим объектом которой, является сингулярно-возмущенная система (системы с малым параметром при части производных). Рассмотрена сингулярно-возмущенная система, у которой разделены медленные и быстрые переменные состояния, связанная только с управляющими функциями, эта система является эквивалентной к данной сингулярно-возмущенной системе. Необходимым и достаточным условием получения эквивалентной разделенной переменных состояния сингулярно-возмущенной системы, является существования и единственности решения матричных уравнений Риккати и Ляпунова приведенной в статье. Установлено, что эти уравнения имеют решения, которые могут быть представлены в виде равномерно сходящихся степенных рядов. Для асимптотической сингулярно-возмущенной системы, в которой аппроксимирует эквивалентную сингулярно-возмущенную систему с точностью $O(\mu)$, получена формула нахождения оптимального управления сингулярно-возмущенной задачи оптимального быстрого действия с помощью метода момента. Предложен приближенный способ решения вспомогательной задачи для определения неизвестных параметров.

Ключевые слова: сингулярно-возмущенные дифференциальные уравнения, условный экстремум, безусловный экстремум, кривой спуска, скорость спуска, гиперплоскость.

The article investigates the problem of optimal performance of a dynamic object of which is a singularly perturbed system (systems with a small parameter at some derivatives). A singularly perturbed system is considered, in which slow and fast state variables are separated, associated only with control functions, this system is equivalent to this singularly perturbed system. A necessary and sufficient condition for obtaining an equivalent separated state variables of a singularly perturbed system is the existence and uniqueness of the solution of the matrix Riccati and Lyapunov equations given in the article. It was found that these equations have solutions that can be represented in the form of uniformly converging power series. For an asymptotic singularly perturbed system, in which it approximates an equivalent singularly perturbed system with accuracy $O(\mu)$, a formula is obtained for finding the optimal control for a singularly perturbed optimal time-optimal problem using the moment method. An approximate method for solving an auxiliary problem for determining unknown parameters is proposed.

Key words: singularly perturbed differential equations, conditional extremum, unconditional extremum, descent curve, descent rate, hyperplane.

Введение. Из всех методов нахождения оптимальных управлений для решения задач предельного быстродействия для широкого класса объектов наибольшее применение получил принцип максимума Л.С. Понтрягина [1]. При построении решений данной задачи, использования способ разделения движений в управляемых сингулярно-возмущенных системах рассматривались многими авторами, среди них можно отметить работы [2-7]. Задачи оптимального управления объектами управления в которой, является сингулярно-возмущенные управляемые системы, были предметом и нашего исследования [8-13].

Данная работа является развитием исследований вышеупомянутых работ по данной проблеме.

1. Постановка задачи.

Пусть объект управления описывается сингулярно-возмущенным дифференциальным уравнением [5,8,10-13]

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + A_2 z(t) + B_1 u(t), \quad (1)$$

$$\mu \dot{z}(t) = A_3 x(t) + A_4 z(t) + B_2 u(t), \quad (2)$$

где $x \in R^n, z \in R^m, u \in R^r, A_i (i = \overline{1,4}), B_j (j = \overline{1,2})$ – матрицы с постоянными коэффициентами соответствующей размерности, μ – малый параметр, $0 < \mu \ll 1$.

Требуется перевести систему (1), (2) из начального состояния

$$x(t_0) = x_0, z(t_0) = z_0 \quad (3)$$

в конечное состояние

$$x(t_1) = x_1, z(t_1) = z_1 \quad (4)$$

за минимальное время $T = t_1 - t_0$, при условии, что

$$\|u\| = \max_{[t_0, t_1]} |u(t, \mu)|. \quad (5)$$

Предположим, что корни характеристического уравнения матрицы A_4 удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re} \lambda_k = \nu_k < 0, k = \overline{1, m} \quad (6)$$

2. Решение задачи.

Систему (1, 2) заменим эквивалентной системой [8,10,12,13], у которой разделены медленные $\tilde{x}(t)$ и быстрые $\tilde{z}(t)$ составляющие вектора состояния полученной из [8]:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}_1 \tilde{x}(t) + \tilde{B}_1 u(t), \quad (7)$$

$$\mu \dot{\tilde{z}}(t) = \tilde{A}_4 \tilde{z}(t) + \tilde{B}_2 u(t),$$

где

$$\tilde{x}(t) = x(t) + \mu N \tilde{z}(t), \tilde{z}(t) = z(t) - H x(t), \quad (8)$$

$$\tilde{A}_1 = A_1 + A_2 H, \tilde{A}_4 = A_4 + \mu H A_2, \tilde{B}_1 = B_1 + N \tilde{B}_2, \tilde{B}_2 = B_2 - \mu H B_1.$$

Матрицы H и N определяются из уравнения [8,10,12,13]:

$$\mu H (A_1 + A_2 H) = A_3 + A_4 H, \quad (9)$$

$$\mu (A_1 N + A_2 H N + N H A_2) = A_3 + N A_4. \quad (10)$$

Используя теорему о неявной функции можно показать, что уравнения (9), (10) имеют решения, которые могут быть представлены в виде равномерно сходящихся степенных рядов [14]:

$$H(\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i \mu^i, N(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k \mu^k. \quad (11)$$

Матрицы $H_i(\mu)$ и $N_k(\mu)$ ($i, k = 0, 1, \dots$) определяются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях μ в уравнениях (9), (10). В результате имеем:

$$H_0 = -A_4^{-1}A_3, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} H_1(\mu) &= A_4^{-1}(\mu H_0 + H_0 A_1 + H_0 A_2 H_0), \dots, \\ H_i(\mu) &= A_4^{-1}(\mu H_{i-1} + H_{i-1} A_1 + \sum_{j=0}^{i-1} H_j A_2 H_{v-1}), \\ i &= 1, 2, \dots, v = i, i-1, i-2, \dots, \\ N_0 &= -A_2 A_4^{-1}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} N_1(\mu) &= (\mu N_0 + A_1 N_0 + A_2 H_0 N_0 + \\ &+ N_0 H_0 A_2) A_4^{-1}, \dots, \\ N_k &= [\mu N_{k-1} + A_1 N_{k-1} + A_2 (\sum_{j=0}^{k-1} H_j N_{s-1}) + \\ &+ (\sum_{j=0}^{k-1} N_j H_{s-1}) A_2] A_4^{-1}, k = 1, 2, \dots, s = i, i-1, i-2, \dots. \end{aligned}$$

Граничные условия системы (7) с учетом (8) имеют вид:

$$\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0, \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}_0, \quad (14)$$

$$\tilde{x}(t_1) = \tilde{x}_1, \tilde{z}(t_1) = \tilde{z}_1, \quad (15)$$

где $\tilde{x}_s = x_s + \mu N \tilde{z}_s$, $\tilde{z}_s = z_s - H x_s$, $s = 0, 1$.

При $\mu = 0$ из уравнения (1), (2) получаем:

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + A_2 z(t) + B_1 u(t),$$

$$0 = A_3 x(t) + A_4 z(t) + B_2 u(t)$$

или

$$\dot{\bar{x}}(t) = A_0 \bar{x}(t) + B_0 \bar{u}(t), \quad (16)$$

$$\bar{z}(t) = -A_4^{-1} A_3 \bar{x}(t) - A_4^{-1} B_2 \bar{u}(t),$$

где $A_0 = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3$, $B_0 = B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2$.

В работе [9] доказано, что при выполнении условий (6) исходную систему (1), (2) можно заменить эквивалентной системой [8,10,12,13] (7). Так как, при выполнении условий (6) матрица A_4 является устойчивой и при достаточно малых значениях параметра μ действительной части собственных значений матрицы $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_4$ будут отрицательными и близкими к собственным значениям матриц A_0 и A_4 соответственно. Поэтому, вместо системы (7) мы можем рассмотреть систему

$$\dot{\bar{x}}(t) = A_0 \bar{x}(t) + B_0 \bar{u}(t), \quad (17)$$

$$\mu \dot{\bar{z}}(t) = A_4 \bar{z}(t) + B_2 u(t).$$

С учетом (14), (15) граничные условия системы (17) определяются соотношениями:

$$\bar{x}(t_0) = x_0, \bar{z}(t_0) = \tilde{z}_0, \quad (18)$$

$$\bar{x}(t_1) = x_1, \bar{z}(t_1) = \tilde{z}_1. \quad (19)$$

Система (17) аппроксимирует систему (1), (2) с точностью порядка μ , т.е. она является асимптотической системой [8,10,12,13] с точностью $O(\mu)$ и получается из (7) при приближениях:

$$H(\mu) \approx H_0 = -A_4^{-1} A_3, \quad N(\mu) \approx N_0 = -A_2 A_4^{-1}, \quad (20)$$

$$\tilde{A}_1 \approx A_0, \tilde{A}_4 \approx A_4, \tilde{B}_1 \approx B_0, \tilde{B}_2 \approx B_2, \tilde{z}(t) = \bar{z}(t) + A_4^{-1} A_3 \bar{x}(t).$$

Теперь сформулируем задачу (1) – (5) в форме: требуется перевести систему (17) из начального состояния (18) в конечное состояние (19) за минимальное время $T = t_1 - t_0$, при условии (5).

Предположим, что для задачи (17) – (19) выполняются условия: (6) и

$$\text{rank}(B_0, A_0 B_0, \dots, A_0^{n-1} B_0) = n, \quad (21)$$

$$\text{rank}(B_2, A_4 B_2, \dots, A_4^{n-1} B_2) = m.$$

Задачу (17) – (19) можно свести к проблеме моментов [15]: требуется найти

$$\rho = \min_{p, q} \int_{t_0}^{t_1} |B'_0 \bar{p}(t) + B'_2 \tilde{q}(t)| dt, \quad (22)$$

при условии

$$\alpha' \bar{p}_1 + \mu \beta' \tilde{q}_1 = 1, \quad (23)$$

где $\bar{p}_1, \tilde{q}_1$ – неизвестные параметры, которые необходимо определить, $\bar{p}, \tilde{q}$ – являются решениями задачи

$$\dot{\bar{p}}(t) = -A'_0 \bar{p}(t), \bar{p}(t_1) = \bar{p}_1, \quad (24)$$

$$\mu \dot{\tilde{q}}(t) = -A'_4 \tilde{q}(t), \quad \tilde{q}(t_1) = \tilde{q}_1. \quad (25)$$

Уравнения: $\dot{\bar{p}}(t) = -A'_0 \bar{p}(t), \mu \dot{\tilde{q}}(t) = -A'_4 \tilde{q}(t)$ являются сопряженными к однородным уравнениям (17) при $\bar{u}(t) = u(t) = 0$.

При $\bar{u}(t) = u(t) = 0$ решения задачи (17), (18) имеют вид:

$$\bar{x}(t) = e^{A_0 t} x_0, \quad \bar{z}(t) = e^{\frac{A_4 t}{\mu}} \tilde{z}_0.$$

С учетом конечных условий (19) из последних соотношений имеем:

$$\alpha = x_1 - e^{A_0 t_1} x_0, \quad \beta = \tilde{z}_1 - e^{\frac{A_4 t_1}{\mu}} \tilde{z}_0. \quad (26)$$

Теперь рассмотрим задачу (24), (25) и решения этих задач представим виде:

$$\bar{p}(t) = e^{-A'_0(t-t_1)} \bar{p}_1, \quad \tilde{q}(t) = e^{-\frac{A'_4(t-t_1)}{\mu}} \tilde{q}_1. \quad (27)$$

С учетом (27) задачу (22) – (25) сформулируем в следующей форме: требуется найти

$$\rho = \min_{p, q} \int_{t_0}^{t_1} \left| B'_0 e^{-A'_0(t-t_1)} \bar{p}_1 + B'_2 e^{-\frac{A'_4(t-t_1)}{\mu}} \tilde{q}_1 \right| dt, \quad (28)$$

при условии (23).

Если нам будут известны векторы $\bar{p}_1$ и $\tilde{q}_1$, то будут известны минимальная функция

$$\varphi^0(t, \mu) = B'_0 e^{-A'_0(t-t_1)} \bar{p}_1 + B'_2 e^{-\frac{A'_4(t-t_1)}{\mu}} \tilde{q}_1 \quad (29)$$

и число $\rho > 0$.

На основании метода проблемы моментов [15], нам необходимо определить искомое оптимальное управление $u^0(t, \mu)$ при условии

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi^0(t, \mu) u^0(t, \mu) dt = \max_u \int_{t_0}^{t_1} \varphi^0(t, \mu) u(t, \mu) dt = 1, \quad (30)$$

где $|u^0(t, \mu)| \leq \frac{1}{\rho}$.

Тогда решение задачи (29), (20) определяется выражением

$$u^0(t, \mu) = \frac{1}{\rho} \text{sign} \left(B'_0 e^{-A'_0(t-t_1)} \bar{p}_1 + B'_2 e^{-\frac{A'_4(t-t_1)}{\mu}} \tilde{q}_1 \right) \quad (31)$$

причем функция $u^0(t, \mu)$ определена всюду кроме конечного числа изолированных значений $t = t_s$, где функция стоящая под знаком $sign$ обращается в нуль.

Таким образом, одним из оптимальных управлений перевода систему (17) из начального состояния (18) в конечное состояние (19) за минимальное время $T = t_1 - t_0$, при выполнении условия (5), является функция (31).

Теперь нам необходимо определить оптимальных параметров $\bar{p}_1$ и $\tilde{q}_1$. Представим этих параметров в виде $\bar{p}_i, \tilde{q}_k$ $i = \overline{1, n}; k = \overline{1, m}$ и ниже покажем один из способов определения.

Полагая $\alpha'_n \neq 0$, перепишем равенство (23) в форме

$$\bar{p}_{1n} = \frac{1}{\alpha'_n} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i \bar{p}_{1i} - \mu \sum_{k=1}^m \beta'_k \tilde{q}_{1k} \right). \quad (32)$$

Тогда функцию $\varphi^0(t, \mu)$ стоящие под знаком модуля в (28) записываем в виде

$$\begin{aligned} \varphi^0(t, \mu) &= B'_0 e^{-A'_0(t-t_1)} \frac{1}{\alpha'_n} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i \bar{p}_{1i} - \mu \sum_{k=1}^m \beta'_k \tilde{q}_{1k} \right) + \\ &+ B'_2 e^{-\frac{A'_4(t-t_1)}{\mu}} \tilde{q}_1 = \\ &= \frac{1}{\alpha'_n} \left(B'_0 e^{-A'_0(t-t_1)} - B'_0 e^{-A'_0(t-t_1)} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i \bar{p}_{1i} - \mu B'_0 e^{-A'_0(t-t_1)} \sum_{k=1}^m \beta'_k \tilde{q}_{1k} \right) + \\ &+ B'_2 e^{-\frac{A'_4(t-t_1)}{\mu}} \tilde{q}_1. \end{aligned}$$

В последнем равенстве введем следующие обозначения:

$$B'_0 e^{-A'_0(t-t_1)} \bar{p}_1 = \sum_{i=1}^n K_i(t-t_1) \bar{p}_{1i}, \quad (33)$$

$$B'_2 e^{-\frac{A'_4(t-t_1)}{\mu}} \tilde{q}_1 = \sum_{k=1}^m \theta_k \frac{(t-t_1)}{\mu} \tilde{q}_{1k}. \quad (34)$$

Тогда с учетом (33) и (34) функцию $\varphi^0(t, \mu)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi^0(t, \mu) &= \frac{1}{\alpha'_n} \left(\sum_{i=1}^n K_i(t-t_1) - \sum_{i=1}^n K_i(t-t_1) \sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i \bar{p}_{1i} - \right. \\ &\left. - \mu \sum_{i=1}^n K_i(t-t_1) \sum_{k=1}^m \beta'_k \tilde{q}_{1k} \right) + \sum_{k=1}^m \theta_k \frac{(t-t_1)}{\mu} \tilde{q}_{1k}. \end{aligned}$$

Последнее равенство перепишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi^0(t, \mu) &= \varphi(t, \bar{p}, \tilde{q}, \mu) = \frac{K_n}{\alpha'_n} + \left(K_i - \frac{K_n}{\alpha'_n} \alpha'_i \right) \bar{p}_{1i} + \\ &+ \mu \theta_k \tilde{q}_{1k} - \mu \frac{K_n}{\alpha'_n} \theta_k \tilde{q}_{1k}, \quad (i = \overline{1, n-1}; k = \overline{1, m}). \end{aligned} \quad (35)$$

Таким образом, в этом случае задача (28) на условный экстремум сводится к задаче на безусловного экстремума функции [15]

$$\rho(\bar{p}, \tilde{q}, \mu) = \int_{t_0}^{t_1} |\varphi(t, \bar{p}, \tilde{q}, \mu)| dt. \quad (36)$$

Заметим, что для функции φ , ρ имеют место следующие предельные соотношения:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \varphi(t, \bar{p}, \tilde{q}, \mu) = \varphi_0(t, \bar{p}), \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \rho(\bar{p}, \tilde{q}, \mu) = \rho_0(\bar{p}), \quad (37)$$

где $\varphi_0(t, \bar{p}) = \frac{K_n}{\alpha'_n} + \left(K_i - \frac{K_n}{\alpha'_n} \alpha'_i\right) \bar{p}_{1i}$, α'_i ($i = \overline{1, n-1}$) – компоненты вектора α в (26), $\rho_0(\bar{p}) = \int_{t_0}^{t_1} |\varphi_0(t, \bar{p})| dt$.

Числа $\bar{p}_{1i}$ ($i = \overline{1, n-1}$) и $\tilde{q}_{1k}$ ($k = \overline{1, m}$) определяющие минимальную функцию $\varphi(t, \bar{p}, \tilde{q}, \mu) = \varphi_0(t, \bar{p})$ будут удовлетворять системе уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \bar{p}_{1i}} = \int_{t_0}^{t_1} \left[K_i(\tau - t_1) - \frac{K_n(\tau - t_1)}{\alpha'_n} \alpha'_i \right] \text{sign} \varphi(\tau, \bar{p}, \tilde{q}, \mu) d\tau = 0, \quad (38)$$

где ($i = \overline{1, n-1}$),

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tilde{q}_{1k}} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\theta_k \frac{(\tau - t_1)}{\mu} - \frac{\mu K_n(\tau - t_1)}{\alpha'_n} \alpha'_i \right] \text{sign} \varphi(\tau, \bar{p}, \tilde{q}, \mu) d\tau = 0, \quad (39)$$

где ($k = \overline{1, m}$).

В работе [15] для решения подобной задачи рассматриваются дифференциальные уравнения:

$$\frac{dl_i}{d\sigma} = -\omega \frac{\partial \Psi(l_i)}{\partial l_i}, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad (40)$$

относительно неизвестных параметров l_i , где $\omega > 0$ – коэффициент пропорциональности, определяющий «скорость спуска».

При составлении дифференциальных уравнений (40) вводится новый параметр σ , который понимается как время, отсчитываемое при движении точки $l = \{l_i\}$ вдоль «кривой спуска» от произвольно выбранной точки

$\bar{l} = \{\bar{l}_i\}$ на гиперплоскости $\sum_{i=1}^n l_i c_i = 1$ к искомой точке $l^0 = \{l_i^0\}$.

Численное интегрирование (40) осуществляется с помощью рекуррентного соотношения

$$l_i^{(j+1)} = l_i^{(j)} - \omega \left[\frac{\partial \Psi(l_i)}{\partial l_i} \right]_{l=l^{(j)}} \cdot \Delta \sigma. \quad (41)$$

Заметим, что в уравнении (39) производные $\frac{\partial \rho}{\partial \tilde{q}_{1k}}$ определяются быстрыми составляющими функции $\varphi(t, \bar{p}, \tilde{q}, \mu)$, поэтому в данном случае будем рассматривать следующие сингулярно-возмущенные дифференциальные уравнения относительно неизвестных параметров $\bar{p}_{1i}$ и $\tilde{q}_{1k}$:

$$\frac{d\bar{p}_{1i}}{d\sigma} = -\omega \frac{\partial \rho}{\partial \bar{p}_{1i}}, \quad \mu \frac{d\tilde{q}_{1k}}{d\sigma} = -\omega \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{q}_{1k}}, \quad (42)$$

где частные производные $\frac{\partial \rho}{\partial \bar{p}_{1i}}, \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{q}_{1k}}$ определяются соотношениями из (38) и (39).

Для численного интегрирования (42) можно предложить следующий процесс последовательного приближения.

При $\mu = 0$ из (42) получаем систему

$$\frac{d\bar{p}_{1i}^0}{d\sigma} = -\omega \frac{\partial \rho(\bar{p}_1)}{\partial \bar{p}_{1i}}. \quad (43)$$

Численное интегрирование уравнения (43), производиться пользуясь соотношением (41). Определив все $\bar{p}_{1i}^0$ ($i = \overline{1, n-1}$) из (43), подставляя их в уравнение

$$\mu \frac{d\tilde{q}_{1k}}{d\sigma} = -\omega \frac{\partial \rho(\bar{p}_1^0, \tilde{q}_1)}{\partial \tilde{q}_{1k}}, \quad k = \overline{1, m}; \quad \bar{p}_1^0 = (\bar{p}_{11}^0, \bar{p}_{12}^0, \dots, \bar{p}_{1n-1}^0) \quad (44)$$

и совершая замену $\lambda = \frac{t-t_1}{\mu}$ в правой части (44), получим

$$\frac{d\tilde{q}_{1k}}{d\sigma} = -\omega \int_{\lambda_0}^{t_0} \left[\theta_k(v) - \mu \frac{b_n^0(\beta_k^0)'}{(\alpha_n^0)'} \right] \text{sign} \tilde{\varphi}(v) dv, \quad (45)$$

где $\tilde{\varphi}(v) = \tilde{\varphi}(v\mu + t_1, \bar{p}_1^0, \tilde{q}_1, \mu) = \tilde{\varphi}(t_1, \bar{p}_1^0, \tilde{q}_1, \mu)v\mu + \dots \approx$

$$\approx \sum_{i=1}^{n-1} \left[b_i^0 - \frac{(\alpha_i^0)'}{(\alpha_n^0)'} b_n^0 \right] \bar{p}_{1i}^0 + \frac{1}{(\alpha_n^0)'} b_n^0 + \sum_{k=1}^m \left[\theta_k(v) - \mu \frac{b_n^0(\beta_k^0)'}{(\alpha_n^0)'} \right] \tilde{q}_{1k},$$

здесь b_i^0 – компоненты вектора B_0 .

Теперь пользуясь снова соотношениями (41), можно численно интегрировать уравнения (45). После необходимых вычислений будут известны параметры $\tilde{q}_{1k}$ ($k = \overline{1, m}$).

3. Заключение.

Построенный приближенный алгоритм задачи могут применяться при конструировании устройства оптимальных быстродействий. вышеперечисленных объектов управления, которой являются сингулярно-возмущенные системы дифференциальных уравнений.

Литература.

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М: Наука. 1961. – 391 с.
2. Геращенко Е. И., Геращенко С.М. Метод разделение движений и оптимизация нелинейных систем – М: Наука, 1975. - 296 с.
3. Гичев Т.Р., Дончев А.Л. Сходимость решение линейной сингулярно возмущенной задачи быстродействия //Прикл. мат. и мех., 1979, 43, №3. – С. 466 – 474.
4. Есипова В.А. Асимптотическое решение линейной задачи оптимального быстродействия //В сб. «Дифференц. уравнения и их прил.» Вып. 2. Днепропетровск, Днепропетр. ун-т, 1973. – С. 50 – 59.
5. Калинин А.И. Алгоритм асимптотического решения сингулярно возмущенной линейной задачи оптимального быстродействия //Прикл матем. и мех., 1989, т. 53. Вып 5. – С. 880 – 889.
6. Collins W.D. Singular perturbations of linear time-optimal control problems //Recent Math. Develop. In control. London – New York, Academic, 1973. – Р. 123 – 136. (РЖМат, 1975, 3Б536).
7. Halanay A., Mirica St. The time optimal feedback control for singularly perturbed linear systems //Rev. roum. math. pures et appl., 1979, 24, No. 4. – Р. 585 – 596. (РЖМат, 1979, 12Б594).
8. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Разделение движений сингулярно-возмущенной управляемой системе //Исслед. по интегро-дифф. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. Вып. 36. – С.136 –141.
9. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. О переходных матрицах медленных и быстрых подсистем управляемой системы с малым параметром /Труды межд. научной конференции посв. 70 летию акад. М.И. Иманалиева //Вестник КГНУ им. Ж. Баласагына. Серия 3. Естест.-тех. науки. - Вып.6, Бишкек, 2001. – С. 235 – 239.
10. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Управление с минимальной энергией в сингулярно-возмущенной системе с постоянными коэффициентами //Вестник Казахского Национального университета им. Аль-Фараби. – Алматы, 2005. - №3 (46). – С. 9 – 15.
11. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Решение задачи аналитического конструирования регулятора для стационарной сингулярно-возмущенной системы методом разделения движений //Исслед по интегро-дифф. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып 35. – С. 212 – 216.
12. Аширбаев Б.Ы. Оператор Грама в теории сингулярно-возмущенных уравнений и в задачах оптимального управления //Автореф. дисс.к.ф.-м.н. – Бишкек, 2008. – 21 с. - /<https://docplayer.com/75106753-Nacionalnaya-akademiya-nauk-kyrgyzskoy-respubliki-institut-matematiki-ashirbaev-beyshembek-ybyshevich.html>
13. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Асимптотическое решение сингулярно-возмущенной задачи оптимального управления с минимальной энергией //Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2020. – № 3 – С. 89-97. - /<https://applied-research.ru/article/view?id=13041>
14. Стрыгин В.В., Соболев В.А. Разделение движений методом интегральных многообразий. – М: Наука, 1988. – 256 с.
15. Красовский Н.Н. Теория управления движениям. – М: Наука, 1968. – 476 с.
16. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы., Алгоритм решения линейного матричного неоднородного разностного уравнения с малым шагом. // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. - Бишкек, 2017. - № 7. - С. 38-41.