DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 7, 2021

Садыкова Г.К.

ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН ЧЕЧИМИН ТУРГУЗУУ

Садыкова Г.К.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

G.K. Sadykova

CONSTRUCTION OF A SOLUTION FOR A SYSTEM OF NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PRIVATE DERIVATIVES

УДК: 517.968

Моделдештирүүнүн жардамында кээ бир физикалык маселелерди дифференциалдык, интегро-дифференциалдык тендемелери жана мындай теңдемелердин системасы үчүн баштапкы маселелерине келтирүүго болот. Кошумча аргумент кийиирүүметодун колдонуу жекече туундулуу дифференциалдык тендемелердин жаны класстагы маселелерин изилдөөгө мүмкүнчүлүк берет. Бул методдун негизинде кошумча аргумент кийирүү жолу менен баштапкы чектик маселенин чечимин табууга мүмкүн болгон интегралдык тендемелердин системасына келтирилет. Бул макалада жекече туундулуу сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык тендемелер системасынын жеке учурунун чечимин кошумча аргумент киргизүү усулу менен тургузуу каралган.

Негизги сөздөр: *интегро-дифференциалдык, теңдемелер системасы, сызыктуу эмес, жекече туундулар, биринчи тартиптеги, кошумча аргумент кийирүү усулу, жалгыз чечим.*

При помощи моделирования некоторые физические задачи можно свести к начальным задачам для дифференциальных, интегро-дифференциальных уравнений и систем таких уравнений в частных производных. Внедрение метода дополнительного аргумента позволяет исследовать новые классы задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Основу данного метода составляет то, что исходная начальная задача способом введения дополнительной переменной переходит к системе интегральных уравнений, наиболее приемлемой для доказательства существования решений. В этой статье рассмотрено применение метода дополнительного аргумента для построения решения системы нелинейных интегро- дифференциальных уравнений в частных производных для конкретного случая.

Ключевые слова: *интегро-дифференциальное, система уравнений, нелинейное, частные производные, первого порядка, метод дополнительного аргумента, единственное решение.*

Using simulation some physical problems can be reduced to initial problems for differential and integro-differential equations. Various methods have been developed to prove the existence of solutions to such problems, as well as to study the properties of the above problems. The introduction of the additional argument method allows us to explore new classes of problems for partial differential equations. This method is based on the fact that the initial boundary value problem passes to the system of integral equations that is most suitable for proving the existence of solutions by introducing an additional variable. The construction of proof statements when finding a solution is carried out by a strict method of writing operators in function spaces using the principle of compressive maps for operators of a delayed type. Identification of variables in the solution of such a system ultimately allows to solve the original problem. In this work, there is considered the application of the additional argument method for constructing a solution of a system of nonlinear integro-differential partial differential equations for a specific case with the same nonlinear factor. There is used the method of successive approximations to solve integral equations. The only solution to the system has been built. A solution for a specific case is shown.

Key words*: Integro - differential, system of equations, nonlinear, partial derivatives, first order, method of additional argument, unique solution.*

Решение некоторой системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных (СНИ-ДУ в ЧП) может быть построено с использованием метода дополнительного аргумента (МДА). Это отмечает особенность этого метода. В МДА составляется система интегральных уравнений в частных производных (СИУ в ЧП), эквивалентная исходной системе, к которой применяется принцип сжатых отображений. Для задач СИУ применение этого метода удобно для получения конкретных решений.

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Рассмотрим конкретную СНИ-ДУ в ЧП и найдем ее решение МДА:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + u_2(t,x)\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x} = u_2(t,x) + \int\limits_0^1\int\limits_0^1 u_1(s,\xi)d\xi ds + f(t) \\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = g(t,x,u_1(t,x)). \end{cases} \quad (1)$$

$$u_1(0,x) = x, \quad u_2(0,x) = \varphi(x), \ x \in R, \quad (2)$$

$$(t,x) \in Q_1(T),$$

$$Q_m(T) = \{(t_1,t_2,t_3,..,t_m,x) \mid 0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le ... \le t_m \le T, x \in R\}.$$

Функции, приведенные в задаче (1) - (2), достаточно гладкие, т.е.

$$\varphi(x) \in \overline{C}(R), \quad g(t,x,u_1) \in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T) \times R),$$

где

$\bar{C}^{(k)}(\Omega)$ – пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных (соответственно вместе со всеми своими производными до порядка k включительно) на Ω.

Задачи построения решения СНУ в ЧП рассмотрены в работах А.Ж. Аширбаевой, Ж.И. Мамбетова, Г.К.Садыковой [1-4]. В этих работах построено решение СНУ в ЧП с одинаковым нелинейным сомножителем МДА.

В данной работе проводится построение решения СНИ-ДУ в ЧП с неодинаковым сомножителем.

Сначала находим решение первого уравнения системы (1) МДА.

В результате использования метода, как правило:

$$u_1(t,x) = x - \int\limits_0^t u_2(\nu, q(\nu,t,x))d\nu + \\ + \int\limits_0^t u_2(\nu, q(\nu,t,x))d\nu + Ct + \int\limits_0^t f(s)ds, \quad (3)$$

где $q(s.t.x)$ -решение интегрального уравнения:

$$q(s,t,x) = x - \int\limits_s^t u_2(\nu, q(\nu,t,x))d\nu,$$

Из (3) имеем

$$u_1(t,x) = x + Ct + \int\limits_0^t f(s)ds, \quad (4)$$

где

$$C = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 u_1(s,\xi)d\xi ds.$$

Интегрируя обе части уравнения (4) от 0 до 1 по t и x, получаем:

$$C = \frac{1}{2}(1+C) + b, \quad (5)$$

$$b = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^s f(\nu)d\nu d\xi ds.$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Из (5) определим:

$C = 1 + 2b.$

Подставляя найденное значение С в (4) получаем:

$$u_1(t,x) = x + (1+2b)t + \int_0^t f(s)ds. = x + F(t),$$

$$F(t) = (1+2b)t + \int_0^t f(s)ds.$$

Положив эту функцию во второе уравнение системы (1), получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + (x + F(t)\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = g(t,x,x+F(t)). \qquad (6)$$

Применяем теперь МДА для задачи (6)-(2):

$$u_2(t,x) = \varphi(p(0,t,x)) + \int_0^t g(s, p(s,t,x), p(s,t,x) + F(s))ds,$$

где p(s,t,x)-решение следующего интегрального уравнения, для которого можно применять метод последовательных приближений

$$p(s,t,x) = x - \int_s^t F(\nu)d\nu - \int_s^t p(\nu,t,x)d\nu, \qquad (7)$$

$(s,t,x) \in Q_2(T).$

Уравнение (7) имеет единственное решение, удовлетворяющее дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial p\ (s,t,x)}{\partial t} + (x + F(t))\frac{\partial p(s,t,x)}{\partial x} = 0, \quad p(s,s,x) = x.$$

Итак, решение поставленной задачи имеет вид:

$$u_1(t,x) = x + F(t),$$

$$u_2(t,x) = \varphi(p(0,t,x)) + \int_0^t g(s, p(s,t,x), p(s,t,x) + F(s))ds.$$

В частности, если система (1) имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + u_2(t,x)\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x} = u_2(t,x) \\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = g(t,x,u_1(t,x)). \end{cases} \qquad (8)$$

то решение интегрального уравнения (7) принимает вид:

$$p(s,t,x) = xe^{-(t-s)}. \qquad (9)$$

В самом деле (9) является решением уравнения (7):

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$$xe^{-(t-s)} = x - \int_s^t xe^{-(t-v)} dv = x - xe^{-(t-v)}\Big|_s^t = x - x + xe^{-(t-s)} = xe^{-(t-s)}.$$

Из (9) имеем:

$$\frac{\partial p\ (s,t,x)}{\partial t} + x\frac{\partial p(s,t,x)}{\partial x} = 0, \quad p(s,s,x) = x.$$

Тогда решение задачи (8)-(2) имеет вид:

$$u_1(t,x) = x,$$

$$u_2(t,x) = \varphi(xe^{-t}) + \int_0^t g(s, xe^{-(t-s)}, xe^{-(t-s)})ds. \tag{10}$$

Проверим, что решение (10) удовлетворяет системе (8):

$$\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + u_2(t,x)\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x} = u_2(t,x) = u_2(t,x)$$

Теперь проверим второе уравнение системы:

$$\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = -\varphi'(xe^{-t})xe^{-t} + g(t,x,x+t) +$$

$$+\int_0^t [-g'_x xe^{-(t-s)} - g'_u xe^{-(t-s)}]ds +$$

$$+x\left[\varphi'(e^{-t})e^{-t} + \int_0^t [g'_x e^{-(t-s)} + g'_u)e^{-(t-s)}]ds\right] = g(t,x,x+t) = g(t,x,x+t).$$

Особенность МДА состоит в том, что с его помощью можно построить решение некоторой СНИДУ в ЧП. Этот метод может быть в дальнейшем применен к новым типам систем.

Литература:

1. Мамбетов Ж.И. Построение решений системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с вырожденным ядром [Текст] / Ж.И. Мамбетов // Вестник ОшГУ. – Ош, 2017. – № 4. -С. 113–116.
2. Аширбаева А.Ж., Мамбетов Ж.И. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными//Международный научно-исследоват. журнал. 2018. - № 3(69). - С. 6-10.
3. Mambetov Zh. Method of additional argument for system of non-linear partial differential equations of the first order [Текст]/ Ashirbaeva A., MambetovZh. // Abstracts of VI Congress of the Turkic World Mathe-matical Society, October 2-5, 2017 Astana, Kazakhstan/ Ed. by Acad. B.T. Zhumagulov. – P. 37.
4. Аширбаева А.Ж., Садыкова Г.К. Развитие метода дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. - Бишкек, 2019. - № 12. - С. 35-40.
5. Садыкова Г.К. Исследование решения одной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. / Известия ВУЗов Кыргызстана. 2019. №. 11. С. 15-19