МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Аблабеков Б.С., Касымалиева А.А.

**БУССИНЕСКА-ЛЯВАНЫН ТЕНДЕМЕСИ
 ҮЧҮН ЭКИНЧИ ТҮРДӨГҮ ЧЕКТИК МАСЕЛЕ**

Аблабеков Б.С., Касымалиева А.А.

**ВТОРАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ
 УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА-ЛЯВА**

B.S. Ablabekov, A.A. Kasymalieva

**SECOND BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE
 BOUSSINESQ – LOVE EQUATION**

УДК: 517.95

Макалада Буссинеска-Ляванын тендемеси үчүн экинчи түрдөгү чектик маселесинин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө маселе изилденген. Макаланын негизги натыйжасы - айкын классикалык чыгарылышты алуу жана маселенин чыгарылышын негиздөө. Маселени изилдөө Фурье ыкмасы менен жүргүзүлүп, каралып жаткан маселенин айкын чыгарылышы алынды. Классикалык чыгарылыштын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө теорема далилденди. Далилдөө алынган априордук баалоолорго жана Фурье ыкмасына негизделет. Фурье методун бул маселеде негиздөө маселенин формалдуу чыгарылышын билдирүүчү катардын жана андан керектүү санда мүчөлөп дифференцирлөөдөн алынган катарлардын бир калыпта жыйналуусун далилдөөгө негизделген. Бул маселе коюу кыска тилкенин узунунан термелүүсү менен байланышкан процесстердин математикалык модели.

Негизги сөздөр: Буссинеска-Ляванын тендемеси, экинчи түрдөгү чектик маселе, классикалык чыгарылыш, Фурьенин ыкмасы.

В работе изучается вопрос о существовании и единственности решений второй начально-краевой задачи для линейного уравнения Буссинеска-Лява четвертого порядка. Основным результатом статьи является получение явного классического решения и в обосновании разрешимости поставленной задачи. Исследование задачи проводится методом Фурье и получено явное решение рассматриваемой задачи. Доказано существование единственного классического решения. Доказательство базируется на полученных в работе априорных оценках, методе Фурье. Обоснование метода Фурье в этой задаче опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, полученных его почленным дифференцированием нужное число раз. Эта задача является математической моделью процессов, связанных с продольными колебаниями толстого короткого стержня.

Ключевые слова: уравнение Буссинеска-Лява, вторая начально - краевая задача, классическое решение, метод Фурье

The paper studies the question of the existence and uniqueness of solutions to the second initial-boundary value problem for the linear Boussinesq-Love equation of the fourth order. The main result of the article is to obtain an explicit classical solution and to justify the solvability of the problem. The study of the problem is carried out by the Fourier method and an explicit solution of the problem under consideration is obtained. The existence of a unique classical solution is proved. The proof is based on the a priori estimates obtained in the work, the Fourier method. Justification of the Fourier method in this problem is based on the proof of the uniform convergence of the series representing the formal solution of the problem and the series obtained by its term-by-term differentiation the required number of times. This problem is a mathematical model of the processes associated with longitudinal vibrations of a thick short bar.

Key words: Boussinesq-Love equation, initial-boundary value problem, classic solution, method Fourier.

Введение. Уравнение

$$(\sigma^2 - \Delta)u_{tt} + \gamma_1(\Delta - \alpha_1)u_t + \gamma_2(\Delta - \alpha_{12})u = f(x,t), \quad n \geq 1 \quad (1)$$

описывают продольные колебания упругого стержня с учетом инерции и при внешней нагрузке, движение длинных волн, распространение волн на мелкой воде, волновые процессы в плазме и других

процессов [1-4]. В первом случае функция $f(x,t)$ задает плотность внешних сил, функция $u(x,t)$ характеризуют продольное смещение, параметры $\sigma, \gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_2$ характеризуют материал из которого изготовлен стержень.

Для уравнений с частными производными вида (1) имеется небольшое количество публикаций. Здесь укажем только некоторые результаты, связанные с уравнением Буссинеска-Лява

$$u_{tt} - \alpha u_{xxt} - \beta u_{xx} = F(x,t). \quad (2)$$

В связи с исследованием линейной задачи нестационарных внутренних волн в работе [5] изучены задачи Коши и начально-краевые задачи для уравнения вида (1) в одномерном и многомерном случаях. В связи с исследованием обратной задачи в работе [6] методом Галеркина изучена обобщенная разрешимость первой начально-краевой задачи для уравнения Буссинеска-Лява (1), а в работе [7] методом Фурье изучена однозначная разрешимость одной начально-краевой задачи для уравнения вида (1).

Разрешимость начально-краевых задач с различными нелокальными граничными условиями для уравнения вида (2) изучались в [8-11].

Линейные обратные задачи для уравнения Буссинеска-Лява рассмотрены в работах [12,13].

В данной работе исследуется вторая начально-краевая задачи для уравнения Буссинеска-Лява. Доказано существование единственного классического решения рассматриваемой задачи.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим в области $D_T = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ уравнение Буссинеска-Лява (2) и поставим для него начально-краевую задачу: найти функцию $u(x,t) \in C^{(2,2)}(D_T) \cap C(\bar{D}_T)$, удовлетворяющую уравнению (2) начальным условиям

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

и краевым условиям

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где $F(x,t), u_0(x), u_1(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$ известные достаточно гладкие функции, $\alpha > 0, \beta > 0$ заданные действительные числа. $(x,t) \in D_T$.

Исследование задачи проведем в трех этапах. На первом этапе рассмотрим случай, когда уравнения и граничные условия однородны, т.е. $F(x,t) = 0, \mu_1(t) = 0, \mu_2(t) = 0$. На втором этапе построим решение задачи для неоднородного уравнения с однородными начальными и граничными условиями. На третьем этапе покажем построения решения задачи (2)-(4).

1. Метод Фурье однородной задачи для уравнения Буссинеска-Лява.

Рассмотрим задачу

$$u_{tt} - \alpha u_{xxt} - \beta u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in D_T, \quad (5)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (6)$$

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7)$$

Докажем теорему о существовании и единственности решения задачи (5) - (7).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u_0(x) \in C^{(3)}([0,l])$, $u_1(x) \in C^{(3)}([0,l])$ и $u_0'(0) = u_0'(l) = 0$, $u_0''(0) = u_0''(l) = 0$, $u_1'(0) = u_1'(l) = 0$, то существует единственное классическое решение задачи (5) - (7). Это решение определяется рядом

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (u_{0k} \cos \mu_k t + u_{1k} \sin \mu_k t) \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (8)$$

где

$$\mu_k = \frac{\sqrt{\beta k \pi}}{\sqrt{l^2 + \alpha(k\pi)^2}}, \quad u_{0k} = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(\xi) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi, \quad u_{1k} = \frac{2}{l} \frac{1}{\mu_k} \int_0^l u_1(\xi) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi.$$

Доказательство. В соответствии методом Фурье, частные решения уравнения (5), не равные нулю в области D_T , ищем в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t), \quad (9)$$

удовлетворяющие однородным граничным условиям (7). Подставляя значения $u(x,t)$ из (9) в (5) и разделяя переменные, получим

$$\frac{T''(t)}{\alpha T''(t) + \beta T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \quad (10)$$

Отсюда, предполагая, что $\alpha T''(t) + \beta T(t) \neq 0$, получим

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (11)$$

$$T''(t) + \frac{\beta\lambda}{1 + \alpha\lambda} T(t) = 0. \quad (12)$$

Решение (9) должно удовлетворять граничным условиям (7), поэтому из (9) находим

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (13)$$

Для $X(x)$ получили задачу Штурма-Лиувилля (11), (13). Ее собственные значения и собственные функции будут иметь вид:

$$\lambda_0 = 0, \quad X_0(x) = 1, \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2, \quad X_k(x) = \cos \frac{k\pi}{l} x, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

и образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(0, l)$.

Для каждого λ_k из (12) находим

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t,$$

$$T_k(t) = A_k \cos \mu_k t + B_k \sin \mu_k t.$$

Таким образом, все функции

$$u_0(x, t) = A_0 + B_0 t, \quad u_k(x, t) = (A_k \cos \mu_k t + B_k \sin \mu_k t) \cos \frac{k\pi}{l} x$$

удовлетворяют уравнению (5) и граничным условиям (7).

Тогда согласно обобщенному принципу суперпозиции, решение задачи (5), (7) запишем в виде

$$u(x, t) = A_0 + B_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \mu_k t + B_k \sin \mu_k t) \cos \frac{k\pi}{l} x. \quad (14)$$

Из начального условия (5), имеем

$$A_0 = \frac{u_{00}}{2} = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) dx, \quad A_k = u_{0k} = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx, \quad (15)$$

$$B_0 = \frac{u_{10}}{2} = \frac{2}{l} \int_0^l u_1(x) dx, \quad B_k = \mu_k u_{1k} = \frac{2}{l} \int_0^l u_1(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx. \quad (16)$$

Интегрируя по частям три раза интегралы в (15), (16) и учитывая условий, наложенных на функций $u_0(x)$, $u_1(x)$, получим

$$u_{0k} = -\frac{2}{l} \left(\frac{l}{k\pi} \right)^3 \int_0^l u_0'''(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx = -\left(\frac{l}{\pi} \right)^3 \frac{\varphi_k}{k^3}, \quad (17)$$

$$u_{1k} = -\frac{2}{l} \frac{1}{\mu_k} \left(\frac{l}{k\pi} \right)^3 \int_0^l u_1'''(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx = -\frac{1}{\mu_k} \left(\frac{l}{\pi} \right)^3 \frac{\psi_k}{k^3}, \quad (18)$$

где

$$\varphi_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_0'''(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx, \quad \psi_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_1'''(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx.$$

Так как функции $u_0'''(x) \in C[0, l]$, $u_1'''(x) \in C[0, l]$, то в силу неравенства Бесселя следующие ряды сходятся:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 \leq \frac{2}{l} \int_0^l [u_0'''(x)]^2 dx < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2 \leq \frac{2}{l} \int_0^l [u_1'''(x)]^2 dx < \infty. \quad (19)$$

Подставив (17) и (18) в ряд (14), получим

$$u(x, t) = u_{00} + u_{10}t + \left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^3} \varphi_k \cos \mu_k t + \frac{\pi}{l\mu_k} \frac{1}{k^3} \psi_k \sin \mu_k t \right) \cos \frac{k\pi}{l} x. \quad (20)$$

Этот ряд при любом $(x, t) \in \bar{D}_T$ мажорируется сходящимся рядом

$$\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^3} |\varphi_k| + \frac{\pi}{l\mu_k} \frac{1}{k^3} |\psi_k| \right).$$

Тогда в силу теоремы Вейерштрасса ряд (14) сходится абсолютно и равномерно в области $\bar{D}_T$.

Следовательно, функция $u(x, t)$ непрерывна на $\bar{D}_T$ как сумма равномерно сходящегося ряда (14).

Покажем, что $u(x, t) \in C^{(2,2)}(\bar{D}_T)$, т.е. покажем существование производных

$u_{tt}(x, t), u_{xx}(x, t), u_{xxt}(x, t)$. Для этого нужно показать, что ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^4 u_k}{\partial t^2 \partial x^2}$ сходятся равномерно.

Формально из (20) почленным дифференцированием получаем ряды:

$$u_{xx}(x, t) = -\frac{l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \varphi_k \cos \mu_k t + \frac{\pi}{lk\mu_k} \psi_k \sin \mu_k t \right) \cos \frac{k\pi}{l} x, \quad (21)$$

$$u_{tt}(x, t) = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^3} \mu_k^2 \varphi_k \cos \mu_k t + \frac{\pi}{l} \frac{1}{k^3} \mu_k \psi_k \sin \mu_k t \right) \cos \frac{k\pi}{l} x, \quad (22)$$

$$u_{xxt}(x, t) = \frac{l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \mu_k^2 \varphi_k \cos \mu_k t + \frac{\pi}{l} \frac{\mu_k}{k} \psi_k \sin \mu_k t \right) \cos \frac{k\pi}{l} x. \quad (23)$$

Ряды (20)-(22) мажорируются следующими числовыми рядами:

$$|u_{xx}(x, t)| \leq \frac{l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} |\varphi_k| + \frac{\pi}{l\mu_k k} |\psi_k| \right), \quad (24)$$

$$|u_{tt}(x,t)| \leq \left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^3} \mu_k^2 |\varphi_k| + \frac{\pi}{l} \frac{1}{k^3} \mu_k |\psi_k| \right), \quad (25)$$

$$|u_{xxtt}(x,t)| \leq \frac{l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \mu_k^2 |\varphi_k| + \frac{\pi}{l} \frac{\mu_k}{k} |\psi_k| \right). \quad (26)$$

Сходимость рядов (24)-(26) следует из неравенства Бесселя и следующей оценки:

$$\frac{1}{k} |\varphi_k| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + \varphi_k^2 \right), \quad \frac{1}{\mu_k k} |\psi_k| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2 \mu_k^2} + \psi_k^2 \right), \quad \frac{\mu_k}{k} |\psi_k| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_k^2}{k^2} + \psi_k^2 \right).$$

Тогда в силу теоремы Вейерштрасса ряды (21)-(23) сходятся абсолютно и равномерно на $\bar{D}_T$. Следовательно, функции $u_{tt}(x,t), u_{xx}(x,t)$ и $u_{xxtt}(x,t)$ непрерывны в области $\bar{D}_T$. Подставляя (21)-(23) в уравнение (5) можно убедиться, что функция $u(x,t)$ определяемая рядом (8) является классическим решением задачи (5)-(7) в области D_T . Теорема 1 доказана.

2. Метод Фурье для неоднородного уравнения Буссинеска-Лява

Рассмотрим уравнение (1), удовлетворяющих однородным начальным условиям и однородным граничным условиям:

$$u_{tt} - \alpha u_{xxtt} - \beta u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in D_T, \quad (27)$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (28)$$

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (29)$$

Теорема 2. Пусть функция $F(x,t) \in C^{(2,0)}(\bar{\Omega}_T)$ и $F(0,t) = F(l,t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$. Тогда существует единственное классическое решение задачи (27) -(29). Это решение формулой

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau) F(\xi,\tau) d\xi d\tau, \quad (30)$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \alpha(k\pi/l)^2} \sin \mu_k t \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \frac{k\pi}{l} \xi. \quad (31)$$

Доказательство. Решение задачи (27) -(29) ищем в виде суммы ряда по собственным функциям задачи соответствующей задачи Штурма-Лиувилля

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (32)$$

Разложив функции $F(x, t)$ в ряд Фурье

$$F(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (33)$$

где

$$F_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(\xi, t) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi, \quad (34)$$

и подставляя (32), (33) в уравнение (27), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ T_k''(t) + \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 (\alpha T_k''(t) + \beta T_k(t)) - F_k(t) \right\} \sin \frac{k\pi}{l} x = 0. \quad (35)$$

Отсюда в силу полноты системы $\left\{ \sin \frac{k\pi}{l} x \right\}$ и из (35), для нахождения функции $T_k(t)$, получим следующую задачу Коши:

$$T_k''(t) + \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 (\alpha T_k''(t) + \beta T_k(t)) = F_k(t),$$

$$T_k(0) = T_k'(0) = 0. \quad (36)$$

Решение задачи (36) дается в виде

$$T_k(t) = \frac{1}{1 + \alpha(k\pi/l)^2} \int_0^t \sin \mu_k(t - \tau) F_k(\tau) d\tau.$$

Подставив выражения для $T_k(t)$ в (32), получим формальное решение задачи (27) -(29):

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t \frac{1}{1 + \alpha(k\pi/l)^2} \sin \mu_k(t - \tau) F_k(\tau) d\tau \right\} \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

Отсюда, изменив порядок суммирования и интегрирования, используя (34), приходим к формуле (30).

Так как

$$\frac{1}{1 + \alpha(k\pi/l)^2} < \frac{1}{\alpha(k\pi/l)^2},$$

то ряд (31) мажорируется абсолютно сходящимся числовым

рядом $\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha(k\pi/l)^2)^{-1}$, то с учетом условий наложенных на $F(x,t)$, вытекает сходимость рядов $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^4 w_k}{\partial t^2 \partial x^2}$.

Теорема 2 доказана.

3. Начально-краевая задача с неоднородными граничными условиями.

Пусть для функций $u_0(x), u_1(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$ выполнены следующие условия согласования:

$$u_0'(0) = \mu_1(0), u_0'(l) = \mu_2(0), u_1'(0) = \mu_1(0), u_1'(l) = \mu_2(0).$$

Не теряя общности в задаче (1)-(3) можно положить, что

$$\mu_1(t) = \mu_2(t) = 0, 0 \leq t \leq T.$$

В самом деле, предполагая $\mu_1(t) \in C^2([0, T])$, $\mu_2(t) \in C^2([0, T])$ и вместо $u(x,t)$ введем новую неизвестную функцию

$$u(x,t) = \mathcal{G}(x,t) + v(x,t), \tag{37}$$

где

$$v(x,t) = x\mu_1(t) + \frac{x^2}{2l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

Функция $v(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям (3):

$$v_x(0,t) = \mu_1(t), \quad v_x(l,t) = \mu_2(t). \tag{38}$$

Тогда функция $\mathcal{G}(x,t)$ удовлетворяет однородным граничным условиям:

$$\mathcal{G}(x,t)|_{x=0} = u(x,t)|_{x=0} - v(x,t)|_{x=0} = \mu_1(t) - \mu_1(t) = 0,$$

$$\mathcal{G}(x,t)|_{x=l} = u(x,t)|_{x=l} - v(x,t)|_{x=l} = \mu_2(t) - \mu_2(t) = 0.$$

Из соотношений (37),(38) и (1),(2), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{tt} - \alpha \mathcal{G}_{xxtt} - \beta \mathcal{G}_{xx} &= (u - v)_{tt} - \alpha(u - v)_{xxtt} - \beta(u - v)_{xx} = \\ &= F(x, t) - x\mu_1''(t) + \frac{(2\alpha - x^2)}{2l} [\mu_2''(t) - \mu_1''(t)] + \frac{\beta}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)] = \tilde{F}(x, t), \end{aligned}$$

$$\mathcal{G}(x, t)|_{t=0} = u(x, t)|_{t=0} - v(x, t)|_{t=0} = u_0(x) - \mu_1(0) - \frac{x^2}{2l} [\mu_2(0) - \mu_1(0)] = \mathcal{G}_0(x),$$

$$\mathcal{G}_t(x, t)|_{t=0} = u_t(x, t)|_{t=0} - v_t(x, t)|_{t=0} = u_1(x) - \mu_1'(0) - \frac{x^2}{2l} [\mu_2'(0) - \mu_1'(0)] = \mathcal{G}_1(x).$$

Таким образом, относительно, неизвестной функции $\mathcal{G}(x, t)$ получена задача

$$\mathcal{G}_{tt} - \alpha \mathcal{G}_{xxtt} - \beta \mathcal{G}_{xx} = \tilde{F}(x, t), \quad (x, t) \in D_T, \quad (39)$$

$$\mathcal{G}(x, 0) = \mathcal{G}_0(x), \quad \mathcal{G}_t(x, 0) = \mathcal{G}_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (40)$$

$$\mathcal{G}_x(0, t) = 0, \quad \mathcal{G}_x(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (41)$$

Если функции $\mathcal{G}_0(x)$, $\mathcal{G}_1(x)$, $\tilde{F}(x, t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и 2, то задача (39)-(41) имеет единственное классическое решение в классе функций $C^{(2,2)}(\bar{\Omega}_T)$.

Итак, справедлива

Теорема 3. Пусть $u_0(x) \in C^{(3)}([0, l])$, $u_1(x) \in C^{(3)}([0, l])$, $\mu_1(t) \in C^2([0, T])$, $\mu_2(t) \in C^2([0, T])$, $F(x, t) \in C^{(2,0)}(\bar{\Omega}_T)$, и $u_0'(0) = \mu_1(0)$, $u_0'(l) = \mu_2(0)$, $u_0''(0) = u_0''(l) = 0$, $u_1'(0) = \mu_1(0)$, $u_1'(l) = \mu_2(0)$, $u_1''(0) = u_1''(l) = 0$, $F(0, t) = F(l, t) = 0$, то существует единственное решение задачи (2) -(4).

Литература:

1. Ляв А. Математическая теория упругости/ пер. с англ. Б.В. Булгакова, В.Я. Натанзона. М.; Л.: ОНТИ, 1935. – 674 с.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. - М.: Мир, 1977.
3. Rao J. S., Advanced Theory of Vibration, N.Y., Wiley, 1992, 431 pp.
4. Kano T. A mathematical justification for Korteweg-de Vries equation and Boussinesq equation of water surface waves / T. Kano, T. Nashida // Osaka J. Math. - 1986. - Vol. 23 №2. - P. 389-413.
5. Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. - М.: Наука, 1990. - 344 с.
6. Аблабеков Б.С., Касымалиева А.А. О разрешимости решений первой начально-краевой задачи для уравнения Буссинеска-Лява // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, 2017, №2. - С. 3-8.
7. Аблабеков Б.С., Касымалиева А.А. О разрешимости одной начально-краевой задачи для уравнения Буссинеска-Лява // Евразийское Научное Объединение. - Москва: ЕНО 2018, №11 (45). - С.1-6.
8. Алсыкова А.А. Нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнения Буссинеска // Математические заметки СВФУ 2016. - Том 23. - №1. - С. 3-12.
9. Алсыкова А.А. О разрешимости пространство-нелокальных краевых задач для некоторых аналогов уравнения Буссинеска. // Математические заметки СВФУ 2014. - Т. 21. - №1. - С.3-10.

10. Жегалов В.И., Миронов А.Н., Уткина Е.А. Уравнения с доминирующей частной производной. - Казань, 2014.
 11. Уткина Е.А. О единственности решения задач с нормальными производными в граничных условиях для уравнения Буссинеска-Лява. // Изв. вузов. Матем., 2017, №7., 67-73.
 12. Аблабеков Б.С., Курманбаева А.К. О разрешимости линейной обратной задачи определения правой части в уравнении Буссинеска – Лява// Евразийское Научное Объединение. –Москва: ЕНО 2016, №8 (20), С.21-24.
 13. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для дифференциальных уравнений математической физики. - Бишкек, 1997. -184 с.
-