

*Одиназода Сафаргул Атабек***СЕЙРЕК КЕЗДЕШҮҮЧҮ ЖАНА ЖОГОЛУП БАРА ЖАТКАН
ЖАНЫБАРЛАРДЫН ТҮРЛӨРҮНҮН САНЫН БААЛООНУН
МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛИН ИШТЕП ЧЫГУУ***Одиназода Сафаргул Атабек***РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ
ЧИСЛЕННОСТИ РЕДКИХ И НАХОДЯЩИЕСЯ
ПОД УГРОЗОЙ ИСЧЕЗНОВЕНИЯ ВИДОВ ЖИВОТНЫХ***Odinazoda Safargul Atabek***DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL
FOR ASSESSING THE NUMBER OF RARE
AND ENDANGERED SPECIES OF**

УДК: 519.85-519-7

Экологиялык тутумдардын көптөгөн жер-жерлердеги байкоолору калктын саны, айрыкча сейрек кездешүүчү жана жоголуп бара жаткан жаныбарлардын түрлөрүнүн саны жылдан-жылга өзгөрүп турарын көрсөттү. Албетте, эгер ушул термелүүлөр учурунда кандайдыр бир мезгилде көбөйүүнүн ордуна, кескин азайышын байкаса, анда калыбына келүүнүн ордуна сейрек кездешүүчү жана жоголуп бара жаткан жаныбарлардын түрлөрү кескин азайып кетсе, анда ал калыбына келбейт, бирок жөнөкөй болот өлүү. Бул мындай түрлөрдүн популяциясы планетанын алдында жок болуп кетишине алып келет. Сейрек кездешүүчү жана жоголуп бара жаткан жаныбарлардын түрлөрүнүн популяциясынын олку-солку болушунун себебин жоюу үчүн талаа байкоолору гана эмес, ошондой эле популяциянын санынын өзгөрүшүнүн себебин жок кылуу концепциясына жардам бере турган математикалык жана компьютердик моделдерин куруу керек. Жумуш Тажикстан Республикасынын экологиялык тутумунда сейрек кездешүүчү жана жоголуп бара жаткан жаныбарлардын түрлөрүнүн абалын баалоонун математикалык моделдерин жана изилдөө методикаларын иштеп чыгууга арналган. Ошол эле учурда, баалуу же сейрек кездешүүчү жана жоголуп бара жаткан жаныбарлардын түрлөрү үчүн алардын санынын эң натыйжалуу термелүүсү аныкталат жана башка популяциялардын санынын өзгөрүшүнүн чектери ушул процесстин чечилишин эске алуу менен аныкталат - сейрек кездешүүчү жана жоголуп бара жаткан жаныбарлардын түрлөрүнүн санын коргоо.

Негизги сөздөр: математикалык модель, баалоо, саны, популяциясы, флуктуация аралыгы, жаныбарлар, түрлөр, сейрек кездешүүчүлөр, трофикалык деңгээл.

Многочисленные натурные наблюдения за экологическими системами показывают, что численность популяции, особенно численность редких и находящихся под угрозой исчезновения видов животных колеблется из года в год. Несомненно, если в эти колебания вместо увеличения в какой-то момент времени мы наблюдаем резкое сокращение, то численность редких и находящихся под угрозой исчезновения видов животных вместо восстановления резко сократится, то она уже не восстановится, а просто вымрет. Это приводит к тому, что популяция таких видов просто исчезнет с лица планеты. Для устранения причины колебания численности популяции редких и находящихся под угрозой исчезновения видов животных нужны не только натурные наблюдения, но и построения математических и компьютерных моделей, которые могли бы помочь в понимании устранения причины колебания численности популяции. Работа посвящена разработке математической модели и методов исследования оценки численности состояния редких и находящихся под угрозой исчезновения видов животных экологических систем Республики Таджикистан. При этом для ценных или редких и находящихся под угрозой исчезновения видов животных задаются наиболее эффективные диапазоны колебания их численности, а границы колебания численности остальных популяций определяются с учетом решения данного процесса – охраны численности редких и находящихся под угрозой исчезновения видов животных.

Ключевые слова: математическая модель, оценка, количество, популяция, диапазон флуктуаций, животные, виды, редкие, трофические уровни.

Numerous field observations of ecological systems show that the size of the population, especially the size of the state of rare and endangered species of animals, fluctuates from year to year. Undoubtedly, if during these fluctuations, instead of increasing at some point in time, we observe a sharp decrease, then the number of rare and endangered species of animals will sharply decrease instead of recovery, then it will not recover, but simply die out. This leads to the fact that the population of such species will simply disappear

from the face of the planet. To eliminate the cause of fluctuations in the population of rare and endangered species of animals, not only field observations are needed, but also the construction of mathematical and computer models that could help in eliminating the cause of fluctuations in the population. The article is devoted to the development of mathematical models and research methods for assessing the abundance of rare and endangered species of animals in the ecological systems of the Republic of Tajikistan. At the same time, for valuable or rare and endangered species of animals, the most effective ranges of fluctuations in their numbers are set, and the boundaries of fluctuations in the number of other populations are determined taking into account the solution of this problem - the protection of the number of rare and endangered species of animals.

Key words: mathematical model, estimate, quantity, population, range of fluctuations, animals, species, rare, trophic levels.

Пусть задан любой диапазон колебания численности редких и находящиеся под угрозой исчезновения видов животных, а для других видов экологической системы находятся границы диапазона колебания их численности, так чтобы численность популяции редких и находящиеся под угрозой исчезновения видов животных находились в данных диапазонах [1]- [12].

Рассмотрим следующую математическую модель экологической системы с трофическими уровнями из восьми компонентов [5]- [10]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_0}{dt} = Q + F_0(N_0, N_1), \\ \frac{dN_1}{dt} = N_1 \cdot F_1(N_0, \tilde{N}_2, \tilde{N}_4, \tilde{N}_6, \tilde{N}_7), \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2 \cdot F_2(N_1, \tilde{N}_3, \tilde{N}_4), \\ \frac{dN_3}{dt} = N_3 \cdot F_3(N_2, N_4, N_7, \varepsilon N_3), \\ \frac{dN_4}{dt} = N_4 \cdot F_4(N_1, N_2, N_5, N_6, N_7, \tilde{N}_3, \varepsilon N_4), \\ \frac{dN_5}{dt} = N_5 \cdot (N_4, N_7, N_8, \varepsilon N_5), \\ \frac{dN_6}{dt} = N_6 \cdot F_6(N_1, \tilde{N}_4, \tilde{N}_8, \varepsilon N_6), \\ \frac{dN_7}{dt} = N_7 \cdot F_7(N_1, \tilde{N}_3, \tilde{N}_4, \tilde{N}_5), \\ \frac{dN_8}{dt} = N_8 \cdot F_8(N_6, \tilde{N}_5), \\ N_i(0) = N_i^0, \quad i = \overline{0,8}, \quad 0 < t \leq t. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь Q – скорость ресурса, которая поступает извне, N_0 – биомасса ресурса, N_1 – биомасса растений, N_2 – биомасса или численность травоядных животных, N_3 – биомасса или численность хищников, N_4 – биомасса или численность птиц, N_5 – биомасса или численность пресмыкающихся, N_6 – биомасса насекомых, N_7 – биомасса грызунов, N_8 – биомасса земноводных, ε – самолимитирование.

Предположим, что $F_i = F_i(\cdot)$, $i = \overline{0,8}$ относительная скорость для трофического уровня, причем

$$\frac{\partial F_i}{\partial N_i} \leq 0; \quad \frac{\partial F_i}{\partial N_j} \leq 0, \text{ при } i \leq j; \quad \frac{\partial F_i}{\partial N_j} \geq 0, \text{ при } i > j. \quad (2)$$

Ситуацию колебаний популяции, включенную в модель экологической системы, описываем с помощью закона Вольтера [11].

$$\begin{cases}
F_0 = -\alpha_0 N_0 N_1 \\
F_1 = -m_1 + k_0 \alpha_0 N_0 - \alpha_2 N_2 - \alpha_4 N_4 - \alpha_6 N_6 - \alpha_7 N_7 \\
F_2 = -m_2 + k_1 \alpha_1 N_1 - \alpha_3 N_3 - \alpha_4 N_4 \\
F_3 = -m_3 + k_2 \alpha_2 N_2 + k_4 \alpha_4 N_4 + k_7 \alpha_7 N_7 \\
F_4 = -m_4 + k_1 \alpha_1 N_1 + k_2 \alpha_2 N_2 + k_5 \alpha_5 N_5 + k_6 \alpha_6 N_6 + k_7 \alpha_7 N_7 - \alpha_3 N_3 - \varepsilon N_4 \\
F_5 = -m_5 + k_4 \alpha_4 N_4 + k_6 \alpha_6 N_6 + k_7 \alpha_7 N_7 + k_8 \alpha_8 N_8 - \varepsilon_5 N_5 \\
F_6 = -m_6 + k_1 \alpha_1 N_1 - \alpha_4 N_4 - \alpha_5 N_5 - \alpha_8 N_8 - \varepsilon_6 N_6 \\
F_7 = -m_7 + k_1 \alpha_1 N_1 - \alpha_3 N_3 - \alpha_4 N_4 - \alpha_5 N_5 \\
F_8 = -m_8 + k_6 \alpha_6 N_6 - \alpha_5 N_5
\end{cases} \quad (3)$$

где $F_i(\cdot)$ – трофические функции, $\alpha_i > 0$ – трофический уровень $i = \overline{0,8}$; $m_i > 0$ – естественная смертность $i = \overline{1,8}$; $k_i > 0$ – доли ресурса $i = \overline{1,8}$; $\varepsilon > 0$ – самолимитирование. Средняя биомасса численностей за промежуток времени τ определяется по следующей формуле [12]:

$$N_i^\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau N_i(t) dt, \quad N_i^\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \tilde{N}_i(t) dt, \quad i = \overline{2,5}, \quad \tilde{N}_i(\tau) = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} N_i(a, t) da, \quad \tau > 0. \quad (4)$$

Задача оценки численности редких и находящиеся под угрозой исчезновения видов животных в нестационарном (непрерывном) случае формулируется следующим образом [5]–[6].

Пусть заданы $N_i^{\min}, N_i^{\max}$, определим значения $N_j^{\min}, N_j^{\max}$, $j = 1, 2, 3$ в задаче охраны:

$$N_i^{\min} \leq N_i \leq N_i^{\max}.$$

Отсюда уместно неравенство:

$$N_j^{\min} \leq N_j \leq N_j^{\max}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Предположим, $N_{i_0}^{\min}, N_{i_0}^{\max}$ – диапазон колебания i_0 – вида системы и отсюда:

$$N_{i_0}^{\min} \leq N_{i_0}^\tau \leq N_{i_0}^{\max}, \quad i_0 \in \{1, 2, 3\}. \quad (6)$$

При $\forall j \neq i_0$ и выполнении условий (5) в задачах оценки численности мы должны находим $N_j^{\min}, N_j^{\max}$: $N_j^{\min} \leq N_j^\tau \leq N_j^{\max}$, $j = 1, 2, 3$.

Теорема. Пусть задано неравенство:

$$c_1 = m_3 - k_2 \alpha_2 N_2^{\min} < 0, \quad \text{отсюда} \quad N_2^{\min} > \frac{m_3}{k_2 \alpha_2}, \quad \text{тогда}$$

$$d_1 = \frac{-m_3 + k_2 \alpha_2 N_2^{\min}}{\varepsilon N_3(0)} - 1 \neq 0, \quad d_2 = \frac{-m_3 + k_2 \alpha_2 N_2^{\max}}{\varepsilon N_3(0)} - 1 \neq 0.$$

Отсюда

$$\frac{-m_3 + k_2 N_2^{\min}}{\varepsilon} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t N_3(\tau) d\tau \leq \frac{-m_3 + k_2 \alpha_2 N_2^{\max}}{\varepsilon}. \quad (7)$$

Из системы (1) в случае (2) получим

$$N_3(t) = \frac{N_3(0)}{e^{-\int_0^t [-m_3 + k_2 \alpha_2 N_2(\xi)] d\xi} + \varepsilon N_3(0) \int_0^t e^{-\int_0^\xi [-m_3 + k_2 \alpha_2 N_2(n)] dn} d\xi}. \quad (8)$$

Пусть $N_2^{\min}, N_2^{\max}$ при $0 \leq \tau < +\infty$, считаются заданными и выполняется неравенство

$$N_i^{\min} \leq \frac{1}{\tau} \int_0^\tau N_i(\xi) d\xi \leq N_i^{\max} \quad (9)$$

Отсюда

$$c_2 = m_3 - k_2 \alpha_2 N_2^{\max} < 0. \quad (10)$$

Оценку, которую мы получили в (10) вытекают из условий (8) и (9). При $0 \leq t < +\infty$, и соотносив (8) и (10) получим [6]:

$$\begin{aligned} N_3(t) &\leq \frac{N_3(0)}{e^{-\int_0^t [-m_3 + k_2 \alpha_2 N_2^{\max}] d\xi} + \varepsilon N_3(0) \int_0^t e^{-\int_0^\xi [-m_3 + k_2 \alpha_2 N_2^{\max}] dn} d\xi} = \\ &= \frac{N_3(0)}{e^{-[-m_3 + k_2 \alpha_2 N_2^{\max}]t} + \varepsilon N_3(0) \int_0^t e^{(-m_3 + k_2 \alpha_2 N_2^{\max})(\xi - t)} d\xi} = \\ &= \frac{N_3(0)}{e^{-[-m_3 + k_2 \alpha_2 N_2^{\max}]t} \left[1 + \varepsilon N_3(0) \int_0^t e^{(-m_3 + k_2 \alpha_2 N_2^{\max})\xi} d\xi \right]} = \\ &= \frac{N_3(0)}{e^{-(m_3 - k_2 \alpha_2 N_2^{\max})t} \left[1 + \frac{\varepsilon N_3(0)}{-m_3 + k_2 \alpha_2 N_2^{\max}} \left(e^{(-m_3 + k_2 \alpha_2 N_2^{\max})t} - 1 \right) \right]} = \\ &= \frac{N_3(0)}{e^{(m_3 - k_2 \alpha_2 N_2^{\max})t} + \frac{\varepsilon N_3(0)}{-m_3 + k_2 \alpha_2 N_2^{\max}} \left[1 - e^{(m_3 - k_2 \alpha_2 N_2^{\max})t} \right]}. \end{aligned} \quad (11)$$

Чтобы получить нижний предел, то есть оценку снизу, мы используем вычисления между соотношений (8) и (9) при условии $0 \leq t < +\infty$:

$$\begin{aligned}
 N_3(t) &\geq \frac{N_3(0)}{e^{-\int_0^t (-m_3 - k_2 \alpha_2 N_2^{\min}) d\xi} + \varepsilon N_3(0) \int_0^t e^{-\int_\xi^t (-m_3 + k_2 \alpha_2 N_2^{\max}) dn} d\xi} = \\
 &= \frac{N_3(0)}{e^{(m_3 - k_2 \alpha_2 N_2^{\min})t} + \frac{\varepsilon N_3(0)}{-m_3 + k_2 \alpha_2 N_2^{\min}} [1 - e^{(m_3 - k_2 \alpha_2 N_2^{\min})t}]} > 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

При условии теоремы когда $t \rightarrow \infty$ и при $t \in [0, \infty)$, разделив обе стороны неравенства на t , мы получим требуемую оценку [6]:

$$\begin{aligned}
 0 &< \frac{N_3(0)}{\frac{\varepsilon N_3(0)}{-m_3 + k_2 \alpha_2 N_2^{\min}} + \left[1 - \frac{\varepsilon N_3(0)}{-m_3 + k_2 \alpha_2 N_2^{\min}}\right] e^{(m_3 - k_2 \alpha_2 N_2^{\min})t}} \leq N_3(t) \leq \\
 &\leq \frac{N_3(0)}{\frac{\varepsilon N_3(0)}{-m_3 + k_2 \alpha_2 N_2^{\max}} + \left[1 - \frac{\varepsilon N_3(0)}{-m_3 + k_2 \alpha_2 N_2^{\max}}\right] e^{(m_3 - k_2 \alpha_2 N_2^{\max})t}}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Для определения диапазона колебаний численности редких и находящиеся под угрозой исчезновения видов биоразнообразия были проведены компьютерные вычисления с учетом времени и внешних параметров. Результаты экспериментов проиллюстрированы в нижеследующих рисунках.

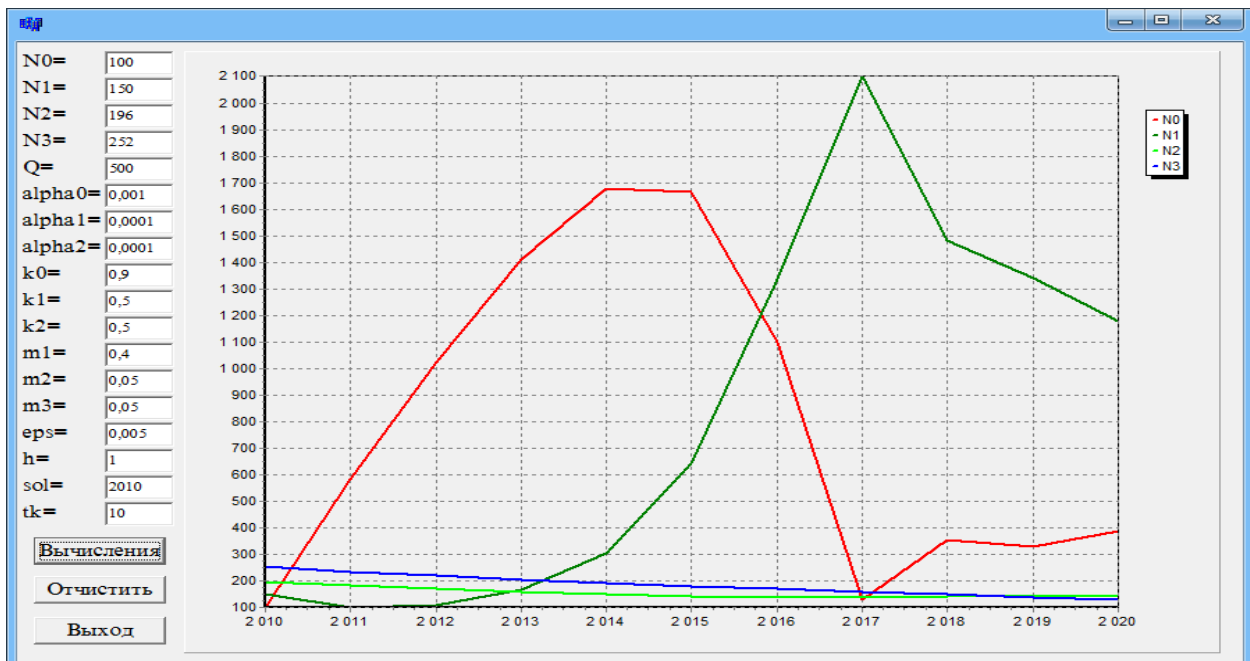


Рис. 1. Численность взаимодействующих популяций по типу «хищник-жертва».

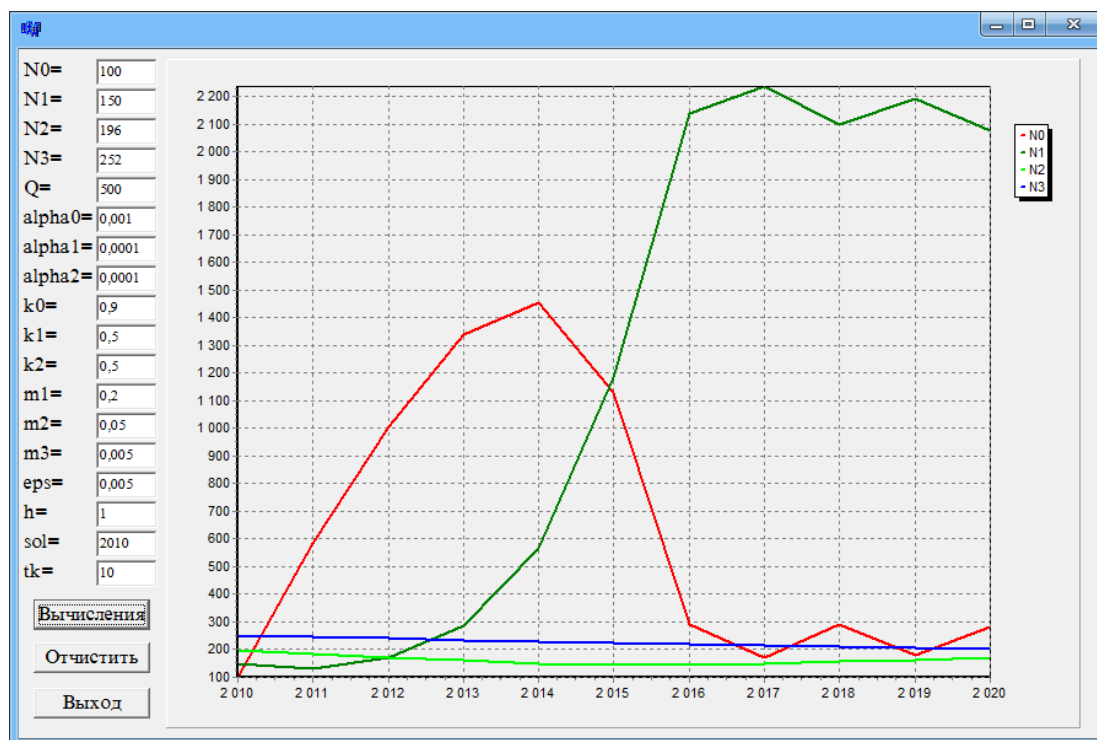


Рис. 2. Численность взаимодействующих популяций по типу «хищник-жертва» с параметрами температура, влажность и наличие пищи на рассматриваемый интервал времени.

Литература:

1. Юнусов М.К. Математические модели борьбы с вредителями агроценозов. Учеб. / Юнусов М.К. - Душанбе, 1991. - 146 с.
2. Юнусов М.К. Некоторые математические вопросы охраны популяций животных. // Докл. АН Тадж. ССР. - 1989. - Т.32, №2. - С. 87-92.
3. Юниси(ов) М.К. Математические модели защиты растений и охраны популяций животных. - Душанбе. - 1988. - 290 с.
4. Юниси(ов) М.К. Математический способ определения критических значений экосистем трех трофических уровней. // Журнал общей биологии. - 1982. - Т.43. - №6. - С. 836-841.
5. Одинаева С.А. Задача охраны редких видов экосистемы заповедника Дашти-Джум с учетом переменной скорости ресурса. // Вестник Таджикского национального университета (Спецвыпуск посвященный году образования и технических знаний), Душанбе-Сино, 2010. - С. 45-50.
6. Одинаева С.А. Математические модели оценки численности хищников экосистем (на примере заповедника «Дашти-Джум»). // Вестник Таджикского национального университета 1(65), Душанбе-Сино, 2011. - С. 7-19.
7. Одинаева С.А., Юниси М.К. О регуляризации неустойчивых структур экосистем региональных заповедников с учетом возрастного состава // Вестник ТНУ, 1/2 (196). - Душанбе, 2016. - С. 73-79.
8. Юниси М.К., Одинаева С.А., Ганиев Ч. Математические вопросы оценки популяционной численности. // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. - Душанбе. - 2012. - 1/3(85). - С. 3-19.
9. Одинаева С.А., Ганиев Ч.Т., Азимов С. Численные расчеты региональных заповедников. // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2014. № 1-3 (134). - С. 30-37.
10. Одинаева С.А., Ганиев Ч.Т., Юниси М.К. Анализ оценки численности хищников в экологических системах горных заповедников. // В сборнике: Роль информационно-коммуникационных технологий в инновационном развитии Республики Таджикистан. Материалы международной научно-практической конференции. 2017. - С. 277-282.
11. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. - М.: Наука, 1976. - 286 с.
12. Юнусов М.К. Математические модели охраняемых популяций. - М: ВЦ АН СССР, 1991. - 29 с.
13. Марасулов А.А., Рахманова Г.А. Влияние производственных отходов на состояние морфологии позвоночных животных. // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана №4. 2020. С. 46-48.