

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Асанов А., Чоюбеков С.М.

**ВОЛЬТЕРРАНЫН БИРИНЧИ ТИПТЕГИ БАШТАПКЫ
ШАРТЫ МЕНЕН БЕРИЛГЕН СЫЗЫКТУУ КЛАССИКАЛЫК ЭМЕС
ТЕҢДЕМЕСИНИН ЧЕЧИМИН РЕГУЛЯРИЗАЦИЯЛОО**

Асанов А., Чоюбеков С.М.

**РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЕ НЕКЛАССИЧЕСКИХ
ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА
ПЕРВОГО РОДА С НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЯМ**

A. Asanov, S. Choybekov

**REGULARIZATION SOLUTION OF NON-CLASSIC LINEAR
INTEGRAL EQUATIONS OF FIRST KINDER VOLTERRA
WITH INITIAL CONDITIONS**

УДК: 517.983

Интегралдык теңдемелер интегро-дифференциалдык теңдемелер бөлүмүнө негизги ролду ойнойт. Анын жардамында заманбап технологиялар өнүгүүдө. Аларга физика, радиотехника, компьютердик технологияларды ж.б. кирет. Акыркы жылдарда интегралдык теңдемелердин үстүнөн бир топ математиктер изилдөөлөрдү жүргүзүшүүдө. Учурдун компьютердик технологиялары менен ар түрдүү сандык чечимдерди реализациялоо жана татаал процесстерди моделиштирүү мүмкүнчүлүгү түзүлүүдө. Бул сыяктуу көптөгөн маселелер интегралдык теңдемелерге келтирилет. Анда биринчи планга маселелердин чечимдерин сапаттуу изилдөө коюлат. Ошентсе да, чеге боюнча интегралдануучу эки өзгөрүлмөлүү классикалык эмес теңдемелер азыркы мезгилге чейин өтө аз изилденген. Бул анын резольвентасын тургузуунун татаалдыгы менен, ошондой эле кайсы бир моделдик учурларын эске албаганда жалпы типтеги аналитикалык көрүнүшү жазылбаганы менен түшүндүрүлөт. Ошого чечимди ушундай изилдөөлөр актуалдуу деп эсептелинет.

Негизги сөздөр: Дирихле, Гроноулла, интеграл, теңдеме, өсүүчү, үзгүлтүксүз, шарт, өзгөрүлмөлөр, усул.

Интегральные уравнения играют в важную роль в разделе интегро-дифференциального уравнения. При помощи них развиваются современные науки и технологии. К ним относятся физика, радиотехника, компьютерные технологии и т.д. В течение последних лет над интегральными уравнениями работают многие математики. С помощью современных компьютерных технологий появляется возможность реализации разнообразных числовых теорий и моделирование сложных процессов. Таким же образом многие задачи приводятся к интегральным уравнениям. И в таком случае на первый план выдвигается качественное исследование решений задач. Однако, уравнения с двумя переменными пределами интегрирования, которые называют неклассическими, мало изучены. Это объясняется трудностями в построении резольвенты и в составлении соотношения для нее, т.к. еще не получено аналитическое представление в общем виде за исключением некоторых модельных случаев. Поэтому такие исследования решений являются актуальными.

Ключевые слова: Дирихле, Гроноулла, интеграл, уравнение, возрастающая, непрерывные, условия, переменные, метод.

Integral equations play an important role in the section of an integro-differential equation. Modern sciences and technologies are developing with the help of them. They include physics, radio engineering, computer technology, etc. In recent years, many mathematicians have been working on integral equations. With the help of modern computer technology, it becomes possible to implement a variety of numerical theories and simulate complex processes. In the same way, many problems are brought to integral equations. In this case, a qualitative study of problem solving comes to the fore. However, equations with two variable limits of integration, which are called non-classical, are poorly understood. This is due to difficulties in constructing a resolvent and in compiling a relation for it, because an analytical representation in general has not yet been obtained, with the exception of some model cases. Therefore, such research decisions are relevant.

Key words: Dirichlet, Gronoull, integral, equation, increasing, continuous, conditions, variables, method.

Введение. Интегральные уравнения первого рода являются основными в разделе интегро-дифференциальных уравнений. До этого времени над этой проблемой работали многие математики [1-5], [11],[12].

В этой работе рассматривается решение и регуляризация неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода. Поставлена задача и введена норма решения $u(t)$. Решается неклассическое интегральное уравнение Вольтерра первого рода. Далее оценивается решение интегрального уравнения Вольтерра первого рода. В итоге доказанным фактом формулируется теорема. Рассмотрен соответствующий пример, который полностью решён и оценён.

Постановка задачи:

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_{\alpha(t)}^t K(t,s)u(s)ds = f(t); \quad t \in [t_0; T] \quad (1)$$

$\alpha(t)$, $K(t,s)$ и $f(t)$ – заданные функции, где $\alpha(t) \in C^1[t_0; T]$, $\alpha(t_0) = \beta < t_0$, $f(t) \in C^1[t_0, T]$, $\alpha(t) \leq t_0$ при всех $t \in [t_0; T]$, $K(t,s)$ и $K'_t(t,s)$ – непрерывные функции в области $G = \{(t,s): \alpha(t) \leq s \leq t \leq T\}$, $\alpha(t)$ – возрастающая функция в $[t_0; T]$.

Для $u(t) \in C[t_0, T]$ введем норму

$$\|u(t)\|_c = \sup_{t \in [t_0, T]} |u(t)|$$

Предположим выполнение следующих условий:

а) $K(t,s)$ и $K'_t(t,s)$ – непрерывные функции в области G , $K(t,t) \geq \alpha > 0$ при всех $t \in [t_0; T]$;

б) $\alpha(t)$, $\alpha'(t)$, $f(t)$, $f'(t) \in C[t_0; T]$, $\alpha(t_0) = \beta < t_0$, $\alpha(T) = t_0$, $\alpha(t) \leq t$, при всех $t \in [t_0; T]$, где $\alpha(t)$ – возрастающая функция в $[t_0; T]$.

Пусть

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in [\beta; t_0] \quad (2)$$

где $\varphi(t)$ – известная непрерывная функция в $[\beta; t_0]$.

Решение:

Пусть $t \in [t_0; T]$. Тогда дифференцируя интегральное уравнение (1) имеем [5], [6], [7], [8] [9] и [10]:

$$K(t,t)u(t) - K(t,\alpha(t))u(\alpha(t))\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^t K'_t(t,s)u(s)ds = f'(t), \quad t \in [t_0; T]$$

отсюда получим [10]:

$$u(t) = \frac{K(t,\alpha(t))}{K(t,t)}u(\alpha(t))\alpha'(t) - \int_{\alpha(t)}^t \frac{K'_t(t,s)}{K(t,t)}u(s)ds + \frac{f'(t)}{K(t,t)}; \quad t \in [t_0; T] \quad (3)$$

Учитывая условия а), б) и (2) интегральное уравнение (3) запишем в виде:

$$u(t) = - \int_{t_0}^t \frac{K'_t(t,s)}{K(t,t)}u(s)ds + P(t), \quad t \in [t_0; T] \quad (4)$$

где

$$P(t) = \frac{K(t,\alpha(t))}{K(t,t)}\varphi(\alpha(t))\alpha'(t) - \int_{\alpha(t)}^{t_0} \frac{K'_t(t,s)}{K(t,t)}\varphi(s)ds + \frac{f'(t)}{K(t,t)}, \quad t \in [t_0; T] \quad (5)$$

Полагая $t = t_0$ и учитывая (2) и (5) из (1) и (4) получим:

$$\int_{\alpha(t_0)}^{t_0} K(t_0,s)\varphi(s)ds = f(t_0); \quad (6)$$

$$\varphi(t_0) = \frac{K(t_0,\alpha(t_0))}{K(t_0,t_0)}\varphi(\alpha(t_0))\alpha'(t_0) - \int_{\beta}^{t_0} \frac{K'_t(t_0,s)}{K(t_0,t_0)}\varphi(s)ds + \frac{f'(t_0)}{K(t_0,t_0)}, \quad (7)$$

Рассмотрим следующее интегральное уравнение

$$\varepsilon v(t, \varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^t K(t, s)v(s, \varepsilon)ds = f(t) + \varepsilon\varphi(t_0), \quad (8)$$

с условием

$$v(t, \varepsilon) = \varphi(t), \quad t \in [\beta; t_0] \quad (9)$$

где $0 < \varepsilon$ – некоторый малый параметр.

В интегральном уравнении (8) сделаем подстановку:

$$v(t, \varepsilon) = u(t) + \xi(t, \varepsilon), \quad t \in [\beta; T] \quad (10)$$

подставив (10) в (8) имеем:

$$\varepsilon u(t) + \varepsilon \xi(t, \varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^t K(t, s)u(s)ds + \int_{\alpha(t)}^t K(t, s)\xi(s, \varepsilon)ds = f(t) + \varepsilon\varphi(t_0), \quad (11)$$

В силу (1) из (11) получим:

$$\varepsilon \xi(t, \varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^t K(t, s)\xi(s, \varepsilon)ds = \varepsilon[\varphi(t_0) - u(t)]. \quad (12)$$

Учитывая (10), условию (9) и (2) имеем:

$$\varepsilon \xi(t, \varepsilon) = 0; \quad t \in [\beta, t_0]. \quad (13)$$

Из (12) разделив интеграл получим:

$$\varepsilon \xi(t, \varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^{t_0} K(t, s)\xi(s, \varepsilon)ds + \int_{t_0}^t K(t, s)\xi(s, \varepsilon)ds = \varepsilon[\varphi(t_0) - u(t)]. \quad (14)$$

В силу (13) имеем:

$$\int_{\alpha(t)}^{t_0} K(t, s)\xi(s, \varepsilon)ds = 0, \quad t \in [\beta; T] \quad (15)$$

и отметим, что

$$\varphi(t_0) = u(t_0);$$

Тогда в силу (15) из (14) получим:

$$\varepsilon \xi(t, \varepsilon) + \int_{t_0}^t K(t, s)\xi(s, \varepsilon)ds = \varepsilon[\varphi(t_0) - u(t)] \quad (16)$$

Дифференцируя уравнение (16) имеем:

$$\varepsilon \xi'(t, \varepsilon) + K(t, t)\xi(t, \varepsilon) + \int_{t_0}^t K'_t(t, s)\xi(s, \varepsilon)ds = -\varepsilon u'(t) \quad (17)$$

с начальным условием

$$\xi(t_0, \varepsilon) = 0 \quad (18)$$

Уравнение (17) линейное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка

$$\xi'(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} K(t, t)\xi(t, \varepsilon) = -u'(t) - \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t K'_t(t, s)\xi(s, \varepsilon)ds \quad (19)$$

с условием (18). Задача Коши (18)–(19) эквивалентны следующему интегральному уравнению.

$$\xi(t, \varepsilon) = - \int_{t_0}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} \left(u'(s) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s K'_s(s, \tau)\xi(\tau, \varepsilon) d\tau \right) ds \quad (20)$$

Теперь воспользуемся формулой Дирихле [8] и из (20) имеем:

$$\xi(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^t H(t, \tau, \varepsilon)\xi(\tau, \varepsilon) d\tau + F(t, \varepsilon) \quad (21)$$

где

$$H(t, \tau, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} K'_s(s, \tau) ds \quad (22)$$

$$F(t, \varepsilon) = - \int_{t_0}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\tau} u'(s) ds \quad (23)$$

Пусть

$$M_0 = \sup_{(t,s) \in G} |K'_t(t,s)| < \infty$$

$$u_0 = \|u'(t)\|_c = \sup_{t \in [t_0; T]} |u'(t)| < \infty$$

Тогда из (22) и (23) имеем оценку:

$$|H(t, \tau, \varepsilon)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t M_0 e^{-\frac{1}{\varepsilon} \alpha(t-s)} ds = \frac{M_0}{\alpha \varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \alpha(t-s)} \Big|_{s=t_0}^{s=t} \leq \frac{M_0}{\alpha}; \quad (t, \tau) \in G \quad (24)$$

$$|F(t, \varepsilon)| \leq \int_{t_0}^t u_0 e^{-\frac{1}{\varepsilon} \alpha(t-s)} ds \leq u_0 \frac{\varepsilon}{\alpha}; \quad t \in [\beta; T] \quad (25)$$

Далее в силу (24) и (25) из (21) имеем:

$$|\xi(t, \varepsilon)| \leq \int_{t_0}^t \frac{M_0}{\alpha} |\xi(\tau, \varepsilon)| d\tau + \frac{u_0 \varepsilon}{\alpha}; \quad t \in [\beta; T] \quad (26)$$

С помощью леммы Гронвулла-Беллмана [9] из (26) получаем:

$$|\xi(t, \varepsilon)| \leq \frac{u_0 \varepsilon}{\alpha} e^{\int_{t_0}^t \frac{M_0}{\alpha} ds}, \quad t \in [t_0; T]$$

т.е.

$$\|\xi(t, \varepsilon)\|_c \leq \frac{u_0}{\alpha} e^{\frac{M_0}{\alpha}(T-t_0)} \varepsilon \quad (27)$$

последний стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\xi(t, \varepsilon)| \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u_0}{\alpha} e^{\frac{M_0}{\alpha}(T-t_0)} \varepsilon = 0$$

Доказанным фактом выше можно сформулировать следующую теорему.

Теорема: Пусть выполняются условия а), в) и функция $u(t) \in C^1[t_0, T]$ является решением интегрального уравнения (1) с условием (2). Тогда решения интегрального уравнения (8) с условием (9) сходятся решению $u(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. справедлива следующая оценка

$$\|v(t, \varepsilon) - u(t)\|_c \leq M_1 \varepsilon$$

где

$$M_1 = \frac{u_0}{\alpha} e^{\frac{M_0}{\alpha}(T-t_0)},$$

$$M_0 = \sup_{(t,s) \in G} |K'_t(t,s)|$$

$$u_0 = \|u'(t)\|_c = \sup_{t \in [t_0; T]} |u'(t)|,$$

Пример: Рассмотрим следующее интегральное уравнение:

$$\int_{t-1}^t e^{t-s} u(s) ds = e^t; \quad t \in [0; 1] \quad (28)$$

с условием

$$u(t) = e^t, \quad t \in [-1; 0] \quad (29)$$

Здесь $\alpha(t) = t - 1$, $t_0 = 0$, $\beta = -1$, $T = 1$, $K(t, s) = e^{t-s}$, $\alpha'(t) = 1$, $f(t) = e^t$. Кроме того предположим, что при $t \in [-1; 0]$ $u(t) = e^t$, $\varphi(t) = e^t$, $t \in [-1; 0]$. В этом случае $K(t, \alpha(t)) = e$, $K'_t(t, s) = e^{t-s}$, $K(t, t) = 1$, при $(t, s) \in G = \{(t, s): t - 1 \leq s \leq t \leq 2\}$.

Проверим условия (6) и (7):

$$\int_{-1}^0 e^{-s} e^s ds = \int_{-1}^0 ds = s \Big|_{-1}^0 = 1$$

$$\varphi(0) = e e^{-1} - \int_{-1}^0 e^{-s} e^s ds + 1 = 1 - \int_{-1}^0 ds + 1 = 2 - s \Big|_{-1}^0 = 1$$

Решение интегрального уравнения (28) с условием (29) эквивалентно к следующему интегральному уравнению:

$$u(t) = P(t) - \int_0^t e^{t-s} u(s) ds, \quad t \in [0; 1] \quad (30)$$

где

$$P(t) = e e^{t-1} - \int_{t-1}^0 e^{t-s} e^s ds + e^t = 2e^t - e^t s|_{t-1}^0 = 2e^t + e^t(t-1) \\ P(t) = e^t(t+1) \quad t \in [0; 1] \quad (31)$$

Тогда решение интегрального уравнения (12) записывается в виде:

$$u(t) = e^t(t+1) - \int_0^t e^s(s+1) ds = \left| \begin{array}{l} u = s+1 \\ du = ds \end{array} \right|_{v=e^s}^{dv=e^s ds} = \\ = e^t(t+1) - [e^s(s+1)]_0^t + e^s|_0^t = \\ = e^t(t+1) - e^t(t+1) + 1 + e^t - 1 = e^t$$

т.е. окончательно получим решение

$$u(t) = e^t \quad (32)$$

Теперь оценим решение уравнения (28)

Тогда в силу (15) из (14) получим [4-7]:

$$\varepsilon \xi(t, \varepsilon) + \int_{t_0}^t e^{t-s} \xi(s, \varepsilon) ds = \varepsilon[1 - u(t)] \quad (33)$$

Дифференцируя уравнение (33) имеем:

$$\varepsilon \xi'(t, \varepsilon) + \xi(t, \varepsilon) + \int_{t_0}^t e^{t-s} \xi(s, \varepsilon) ds = -\varepsilon u'(t) \quad (34)$$

последнее уравнение перепишем в следующем виде:

$$\xi'(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \xi(t, \varepsilon) = -u(t) - \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t e^{t-s} \xi(s, \varepsilon) ds \quad (35)$$

уравнения (35) как и (19) линейное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка с начальным условием

$$\xi(t_0, \varepsilon) = 0 \quad (36)$$

напишем эквивалентное уравнение задача Коши (35) и (36)

$$\xi(t, \varepsilon) = - \int_{t_0}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)} \left(u'(s) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^s e^{t-s} \xi(\tau, \varepsilon) d\tau \right) ds \quad (37)$$

теперь в силу (21) имеем:

$$\xi(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^t H(t, \tau, \varepsilon) \xi(\tau, \varepsilon) d\tau + F(t, \varepsilon) \quad (38)$$

где

$$H(t, \tau, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)} e^{s-\tau} ds = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t e^{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}s - \tau - \frac{1}{\varepsilon}t} ds = \\ = \left\{ -\frac{1}{\varepsilon+1} e^{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}s - \tau - \frac{1}{\varepsilon}t} \right\}_{\tau}^t = -\frac{1}{\varepsilon+1} \left(e^{t-\tau} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)} \right) \quad (39)$$

$$F(t, \varepsilon) = - \int_{t_0}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)} u'(s) ds \quad (40)$$

$$|H(t, \tau, \varepsilon)| \leq \frac{1}{\varepsilon+1} \left| e^{t-\tau} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)} \right| < M_0 \quad (41)$$

$$|F(t, \varepsilon)| \leq \int_{t_0}^t u_0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}\alpha(t-s)} ds \leq \frac{u_0 \varepsilon}{\alpha}; \quad (42)$$

$$M_0 = \sup_{(t,s) \in G} |e^{t-s}| < \infty$$

$$u_0 = \|u'(t)\|_c = \sup_{t \in [t_0, T]} |u'(t)| < \infty$$

$$|\xi(t, \varepsilon)| \leq \int_{t_0}^t M_0 |\xi(\tau, \varepsilon)| d\tau + \frac{u_0 \varepsilon}{\alpha} \quad (43)$$

В силу доказанным выше получаем:

$$\|\xi(t, \varepsilon)\| \leq \frac{u_0 \varepsilon}{\alpha} e^{\int_{t_0}^T M_0 ds} = \frac{u_0}{\alpha} e^{M_0(T-t_0)} \varepsilon$$

последний стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\xi(t, \varepsilon)| \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u_0}{\alpha} e^{\frac{M_0}{\alpha}(T-t_0)} \varepsilon = 0$$

Что требовано – доказано.

Заключение: Поставленная задача полностью разрешена, т.е. неклассическое интегральное уравнение Вольтерра первого рода с помощью производной решено и выявлена регуляризация. Доказанным фактом сформулирована теорема. Применён соответствующий пример, который полностью раскрывает решение и оценку.

Литература:

1. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач [Текст] / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. - М.: Наука, 1979. - 288 с.
2. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: [Текст]: Теория и численные методы / А.С. Апарцин. - Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1999. - 193 с
3. Апарцин А.С. Применения интегральных уравнений Вольтерра для моделирования стратегий технического перевооружения электроэнергетики [Текст] / А.С. Апарцин, И.В. Караулова, Е.В. Маркова, В.В. Труфанов. Электричество, 2005. - №10. - С. 69-75.
4. Иманалиев М.И. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра I-рода [Текст]: Исс. по инт-дифф. уравнением. / М.И. Иманалиев, А. Асанов. - Фрунзе: Илим 1988. - Вып. 21. - С. 3-38.
5. Асанов А. О решении неклассического интегрального уравнения первого рода в пространстве непрерывных функции [Текст] / А. Асанов, Т.О. Бекешов, С.М. Чоюбеков. - Ош: Вестник ОшГУ, №3. - Выпуск 3. - С. 48-54. - 2012.
6. Асанов А. Об одном классе неклассического интегрального уравнения Вольтерра I рода [Текст] / А.Асанов, Т.О. Бекешов, С.М. Чоюбеков. - Ош: Вестник ОшГУ, № 3. - Выпуск 5. - Серии естественных наук. - С. 83-88. - 2014.
7. Асанов А. Выбор параметра регуляризации интегральных уравнений Вольтерра I рода с переменными пределами интеграла [Текст] / А. Асанов, С.М. Чоюбеков. - Бишкек: «Известия ВУЗов Кыргызстана», №1. - С. 6-10. - 2018.
8. Чоюбеков С.М. Регуляризация решения неклассического интегрального уравнения со условиями Липшица [Текст]: Международный научный журнал/ С.М. Чоюбеков– Казань: «Молодой ученый» № 8 (112) С. 34-38, Россия, 2016;
9. Асанов А. Регуляризация решения нелинейных уравнений Вольтерра I рода с условиями Липшица [Текст]/ А. Асанов, С.М. Чоюбеков. - Кемерово: В XXIII выпуске журнала «Точная наука» выпуск, №23. - С. 6-11. - 2018.
10. Асанов А. О решении линейных неклассических интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст]/ А. Асанов, С.М. Чоюбеков. - Бишкек: «Наука новые технологии и инновации Кыргызстана», №1. - С. 3-8. - 2020.
11. http://scask.ru/f_book_sm_math2.php?id=83 Научная библиотека. Предисловие к девятнадцатому изданию. §8. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра. 82. Формула Дирихле.
12. <https://ru.wikipedia.org/wiki/> Лемма Гронуолла - Беллмана