

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Асанов А., Камбарова А.Д.

**САН ОГУНДА ВОЛЬТЕРРАНЫН БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ
ЭКИ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИНИН
СИСТЕМАСЫНЫН ЧЫГАРЫЛЫШЫН
РЕГУЛЯРИЗАЦИЯЛОО ПАРАМЕТРИН ТАНДОО**

Асанов А., Камбарова А.Д.

**ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ
ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ДВУХ
ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА НА ОСИ**

A.Asanov, A.D. Kambarova

**THE CHOICE OF THE REGULARIZATION
PARAMETER THE SOLUTION OF A CLASS OF SYSTEMS
OF TWO LINEAR INTEGRAL VOLTERRA EQUATION
OF THE FIRST KIND ON THE AXIS**

УДК: 517 968

Бул макалада М.Иманалиев жана А.Асановдун сунушталган методу менен сан огунда Вольтерранын биринчи түрдөгү эки сызыктуу интегралдык теңдемелеринин системасынын чыгарылышын регуляризациялоо параметри тандалган. Вольтерранын биринчи түрдөгү эки сызыктуу интегралдык теңдемелеринин системасын чыгаруу үчүн М.М. Лаврентьев боюнча регуляризациялоочу оператор тургузулган жана теңдемелер системасынын чечимдери үчүн жалгыздык теоремасы далилденген. Сунушталган методдор жана анда алынган жыйынтыктар интегралдык теңдемелер теориясынын андан ары өнүгүүсүндө ийкемдүүлүк теориясында, физикада (суюктуктардын бетиндеги толкундардын теориясы, спектроскопиянын маселелери, кристаллография, акустика, плазманын диагностикасы ж.б.), геофизикада (гравиметриянын маселелери, сеймиканын кинематикалык маселелери), механикада (конструкциянын термелүүсү), материал таануу (илешкектин ийкемдүүлүгүн изилдөө, сойлоочулук ж.б.), башкаруу теориясында (жылуулук берүү жана термелүү процесси менен оптималдык башкаруу, оптималдык сызыктуу филтirlөөнүн маселелери) кеңири таралган. Интегралдык теңдемелердин колдонулуштары менен байланышкан, жаңы тармактар өнүгүүдө, айта кетсек биологиянын кээ бир бөлүмдөрү (эпидемиянын таралуусу жөнүндөгү маселе), иконика (бузулган сүрөттөрдү калыбына келтирүү), экономикалык илимдер (микро жана макроэкономиканын динамикалык моделдери, жумушчу орундарын бөлүштүрүүнү оптималдаштыруу маселелери).

Негизги сөздөр: регуляризациялоо, параметрин тандоо, чыгарылыш, система, сызыктуу, эки теңдеме, интегралдык, далилденген, теорема.

В данной работе методом предложенным М.Иманалиевым и А. Асановым выбран параметр регуляризации решения систем двух линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси. Для решения систем двух линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси построен регуляризирующий оператор по М.М. Лаврентьеву и доказана теорема единственности. Предложенные методы и полученные в ней результаты могут быть использованы при дальнейшем развитии теории интегральных уравнений в классах некорректных задач, для численного решения систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси, возникающих в физике (теория волн на поверхности жидкостей, задачи спектроскопии, кристаллографии, акустики, анализа и диагностики плазмы и т.д.), геофизике (задачи гравиметрии, кинематические задачи сейсмоки), механике (колебания конструкций), материаловедении (исследование вязкоупругости, ползучес-

ти и т. д.), теории управления (оптимальное управление процессами колебания и теплопередач, задача оптимальной линейной фильтрации). Развиваются новые направления, связанные с применением интегральных уравнений, в том числе некоторые разделы биологии (задача о распространении эпидемии), иконика (восстановление искаженного изображения), экономической науки (динамические модели микро- макроэкономики, задачи оптимизации распределения рабочих мест между отраслями).

Ключевые слова: регуляризация, выбор параметра, решение, система, линейное, два уравнения, интегральное, доказано, теорема.

In this work, by the method proposed by M.Imanaliev and A.Asanov, we selected the regularization parameter for solving systems of two linear Volterra integral equations of the first kind on the axis. To solve the systems of two linear Volterra integral equations of the first kind, a regularizing operator is constructed on the axis according to M.M. Lavrentiev proved the uniqueness theorem. The proposed methods and the results obtained in it can be used in the further development of the theory of integral equations in classes of ill-posed problems, for the numerical solution of systems of Volterra integral equations of the first kind on the axis arising in physics (theory of waves on the surface of liquids, problems of spectroscopy, crystallography, acoustics, plasma analysis and diagnostics, etc.), geophysics (gravimetry problems, kinematic seismic problems), mechanics (structural vibrations), materials science (viscoelasticity research, creep ie, etc.), control theory (optimal control of the processes of vibration and heat transfer, the problem of optimal linear filtration). New directions are being developed related to the application of integral equations, including some sections of biology (the problem of spreading the epidemic), iconics (restoration of a distorted image), economic science (dynamic models of microeconomics, tasks of optimizing the distribution of jobs between sectors).

Key words: regularization, parameter selection, solution, system, linear, two equations, integral, proved, theorem.

Тен учурда (1), (2) эки сызыктуу интегралдык теңдемелердин системасын карайлы

$$\int_{-\infty}^t K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in R = (-\infty, +\infty), \quad (1)$$

$$\varepsilon v(t, \varepsilon) + \int_{-\infty}^t K(t,s)v(s, \varepsilon)ds = f(t) + \varepsilon u_0, \quad t \in R, \quad (2)$$

Бул жерде $K(t,s) = K_{ij}(t,s)$ - берилген 2×2 ченемдүү матрицалык функция,

$f(t) = (f_1(t), f_2(t))^T$ - берилген эки ченемдүү вектор функция, $u(t) = (u_1(t), u_2(t))^T$ жана $v(t, \varepsilon) = (v_1(t, \varepsilon), v_2(t, \varepsilon))^T$ - белгисиз эки ченемдүү вектор функциялар, $0 < \varepsilon$ кичине параметр

$$K(t,s) = \begin{pmatrix} K_{11}(t,s) & K_{12}(t,s) \\ K_{21}(t,s) & K_{22}(t,s) \end{pmatrix}, \quad u_0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) \in R^2.$$

Интегралдык теңдемелерге окумуштуулар илимий иштеринде кенен токтолушкан. Атап айтканда, [1] жумушта Вольтерранын жылмакай ядролуу биринчи жана үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелери үчүн чечимдердин көп параметрлүү түркүмдөрүнүн жашашы далилденген, [2] жумушта Фредгольмдун биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелеринин чечимдери үчүн М. М.Лаврентьев боюнча регуляризациялоочу операторлор тургузулган, [3] жумушта теңдеме учун тескери маселе менен байланышкан Вольтеррдин биринчи турдогу интегралдык теңдемесинин жакындаштырылган чечими тургузулган. [4,5] жумушунда, жылмакай эмес матрицалык ядролуу Вольтеррдин биринчи түрдөгү сызыктуу жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелеринин системалары үчүн М.М. Лаврентьев боюнча регуляризациялоочу операторлор тургузулган жана жалгыздык теоремалары далилденген. [6] жумушта [4-5] та сунушталган методду модификациялоонун негизинде, Вольтеррдин биринчи түрдөгү эки сызыктуу интегралдык теңдемелеринин системаларынын чечимдери үчүн М.М. Лаврентьев боюнча регуляризациялоочу операторлор тургузулган жана жалгыздык теоремалары далилденген.

Белгилөөлөрдү киргизебиз:

$$1. u = (u_1, u_2)^T, \quad v = (v_1, v_2)^T \in R^2 \text{ векторлору үчүн скалярдык көбөйтүндүнү}$$

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

барабардыгы менен аныктайбыз жана норманы

$$\|u\| = (u_1^2 + u_2^2)^{1/2}$$

көрүнүшүндө жазабыз.

2. $A = (a_{ij})$ 2×2 матрицасы үчүн норманы

$$\|A\| = (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2)^{1/2}$$

түрүндө аныктайбыз.

3. $C_2(R)$ мейкиндиги аркылуу, R деги бардык үзгүлтүксүз функциялардын көптүгү болгон $C(R)$ дин элементтеринен турган бардык эки олчомдуу вектор функциялардын мейкиндигин туюнтабыз.

4. $C_{2,0}(R)$ аркылуу, R деги үзгүлтүксүз жана чектелген функциялардын көптүгү болгон $C_0(R)$ дин элементтеринен турган бардык эки олчомдуу вектор функциялардын сызыктуу мейкиндигин туюнтабыз.

$$u(t) \in C_{2,0}(R) \text{ үчүн}$$

$$\|u(t)\|_c = \sup_{t \in R} \|u(t)\|$$

нормасын табабыз

5. $C_{\varphi,2}^1(R)$ аркылуу $\lim_{t \rightarrow -\infty} \|u(t) - u_0\| = 0, u_0 \in R^2 \quad \|u(t) - u(s)\| \leq M|\varphi(t) - \varphi(s)|, \forall t, s \in R,$

Мында M - t жана s тен эмес, $u(t)$ коз каранды болгон он турактуу

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t \lambda(s) ds, t \in R, \text{ где } \lambda(t) \geq 0, \forall t \in R, \lambda(t) \in C(R). \text{ шартын канааттандыруучу}$$

$u(t) \in C_{2,0}(R)$ аркылуу бардык эки олчомдуу вектор функциялардын сызыктуу мейкиндигин туюнтабыз.

6. $C(G)$ аркылуу G да үзгүлтүксүз болгон, мында

$$G = \{(t, s) : -\infty < s \leq t < \infty\} \text{ бардык үзгүлтүксүз функциялардын мейкиндигин туюнтабыз.}$$

Айталы $\lambda_i(t) - \frac{1}{2} [K(t, t) + K^*(t, t)]$, матрицасынын өздүк маанилери болсун, мында $K^*(t, t)$ матрицасы $K(t, t)$, матрицасына түгөйлөш болгон матрица болсун

$$\lambda_{1,2}(t) = \frac{1}{2} [K_{11}(t, t) + K_{22}(t, t)] \pm \sqrt{[K_{11}(t, t) - K_{22}(t, t)]^2 + [K_{12}(t, t) + K_{21}(t, t)]^2},$$

$$\lambda(t) = \min_{i=1,2} \lambda_i(t) = \lambda_2(t) \quad (3)$$

Төмөндөгү шарттар орундалсын дейли

$$a) \quad K(t, s) = (K_{ij}(t, s)), i, j = 1, 2, K_{ij}(t, s) \in C(G),$$

$$\text{фиксирленген } t \in R \text{ үчүн } \|K(t, s)\|, K(s, s) \in L_1(-\infty; t) \text{ жана } K_{ij}(t, t) \in C(R),$$

бул жерде $G = (t, s) : -\infty < s \leq t < \infty$;

$$b) \quad K_{11}(t, t) + K_{22}(t, t) \geq 0, \|K(t, t)\| \leq N_0 \lambda(t), \text{ жана}$$

$K_{11}(t, t) K_{22}(t, t) \geq \frac{1}{4} [K_{12}(t, t) + K_{21}(t, t)]^2, \forall t \in R$, мында $0 < N_0$ – турактуу

с) $t > \tau$ болгон учурда, каалагандай $(t, s), (\tau, s) \in G$ үчүн

$\|K(t, s) - K(\tau, s)\| \leq l(s) \left[\int_{\tau}^t \lambda(s) ds \right], l(t) \in C(R) \cap L_1(R)$. баалоосу анык.

Бизге [10] жумушта далилденген лемма 1-3 жана теорема 1 керек болот.

Лемма 1. Айталы а), б) шарттары аткарылсын жана $X(t, s, \varepsilon)$ -

$$\frac{dx}{dt} = -K(t, t)x(t), t \in R,$$

системасы үчүн Кошинин матрицалык функциясы болсун, б.а

$$\frac{dX(t, s, \varepsilon)}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon} K(t, t)X(t, s, \varepsilon), X(t, t, \varepsilon) = I_2, \quad (4)$$

$I_2 - 2 \times 2$ – ченемдүү бирдик матрица. Анда $\|X(t, s, \varepsilon)\| \leq \exp \left[-\int_s^t \frac{1}{\varepsilon} \lambda(\tau) d\tau \right], (t, s) \in G$. (5)
баалоосу туура.

Лемма 2. Айталы а), б) жана $u(t) \in C_{\varphi, 2}^1(R)$, шарттары орун алсын

$$F(t, \varepsilon) = X(t, -\infty, \varepsilon)[u(-\infty) - u(t)] + \int_{-\infty}^t R(t, \tau, \varepsilon)[u(t) - u(\tau)] d\tau, \varepsilon > 0, \quad (6)$$

$$R(t, s, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} X(t, s, \varepsilon) K(s, s), (t, s) \in G, \quad (7)$$

$\left[-\frac{1}{\varepsilon} K(s, s) \right]$, матрицалык ядросунун резольвентасын түзсүн

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t \lambda(s) ds, t \in R, \lambda(t) > 0$$

дээрлик бардык $t \in R$, $\|K(t, t)\| \leq N_0 \lambda(t)$ жана дээрлик бардык $t \in R$, $N_0 > 0$. үчүн

Анда

$$\|F(t, \varepsilon)\|_c \leq C_1 \varepsilon, \quad (8)$$

$$C_1 = M(e^{-1} + N_0),$$

$$M = \sup_{t, s \in R, t \neq s} \frac{\|u(t) - u(s)\|}{|\varphi(t) - \varphi(s)|^\gamma}$$

баалоосу туура.

Лемма 3. Айталы а), б), с) $\|K(t, t)\| \leq N_0 \lambda(t), \forall t \in R$, шарттары аткарылсын жана

$$H(t, s, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} X(t, s, \varepsilon)[K(t, s) - K(s, s)] + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t R(t, \tau, \varepsilon)[K(t, s) - K(\tau, s)] ds,$$

$(t, s) \in G, R(t, s, \varepsilon)$ лемма 2 де аныкталган болсун.

Анда

$$\|H(t, s, \varepsilon)\| \leq (e^{-1} + N_0) l(s), (t, s) \in G, \varepsilon > 0$$

баалоосу туура.

Теорема1. Айталы а), б), с), $\|K(t, t)\| \leq N_0 \lambda(t)$ шарттары орун алсын, бардык $t \in R$ учун (1) система $u(t) \in C_{\varphi, 2}^1(R)$ чечимине ээ. Анда (2) системанын $v(t, \varepsilon)$ чечими $\varepsilon \rightarrow 0$ учурда $C_{2,0}(R)$ нормасы боюнча $u(t)$ га жыйналат.

Мына ошондуктан

$$\|v(t, \varepsilon) - u(t)\|_C \leq C_2 \varepsilon, \quad (9)$$

$$C_2 = C_1 \exp \left\{ (e^{-1} + N_0) \int_{-\infty}^{\infty} l(s) ds \right\},$$

баалоосу туура, C_1 лемма 2 боюнча аныкталган.

Жыйынтык. Эгерде а), б), с), $\|K(t, t)\| \leq N_0 \lambda(t)$, $t \in R$ шарттары аткарылса жана дээрлик бардык, $t \in (-\infty, T]$, үчүн $\lambda(t) > 0$ болгон учурда $T \in R$ жашаса, анда $C_{\varphi, 2}^1(R)$ мейкиндигинде (1) системанын чечими жалгыз.

Андан ары

$$\|f(t) - f_{\delta}(t)\|_C \leq \delta, \|u_0 - u_{0\delta}(t)\| \leq C_0 \sqrt{\delta}, \quad (10)$$

барабарсыздыгы орун алсын деп аламыз мында δ жана C_1 - он турактуулар, $f_{\delta}(t) \in C_{2,0}(R)$, $u_{0\delta} \in R^2$.

Төмөндөгү системаны карайлы

$$\varepsilon v_{\delta}(t, \varepsilon) + \int_{-\infty}^t K(t, s) v_{\delta}(s, \varepsilon) ds = f_{\delta}(t) + \varepsilon u_{0\delta}, t \in R, \quad (11)$$

мында $v_{\delta}(t, \varepsilon)$ -изилденүүчү вектор-функция. (2) ден, (5) ти кемитүү менен

$$\varepsilon \xi_{\delta}(t, \varepsilon) + \int_{-\infty}^t K(t, s) \xi_{\delta}(s, \varepsilon) ds = f(t) - f_{\delta}(t) + \varepsilon [u_0 - u_{0\delta}],$$

алабыз, мында

$$\xi_{\delta}(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon) - v_{\delta}(t, \varepsilon), t \in R. \quad (12)$$

Акыркы теңдемеден

$$\begin{aligned} \xi_{\delta}(t, \varepsilon) = & -\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t K(s, s) \xi_{\delta}(s, \varepsilon) ds - \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t [K(t, s) - K(s, s)] \xi_{\delta}(s, \varepsilon) ds \\ & + \frac{1}{\varepsilon} [f(t) - f_{\delta}(t)] + u_0 - u_{0\delta}. \end{aligned}$$

ээ болобуз.

Мында лемма 2 де аныкталган $R(t, s, \varepsilon)$ резольвентасын пайдаланып жана лемма 3 түн негизинде

$$\xi_{\delta}(t, \varepsilon) = \int_{-\infty}^t H(t, s, \varepsilon) \xi_{\delta}(s, \varepsilon) ds + g(t, \varepsilon), t \in R, \quad (13)$$

алабыз, мында $H(t, s, \varepsilon)$ лемма 3 то аныкталган,

$$g(t, \varepsilon) = [u_0 - u_{0\delta}] + \frac{1}{\varepsilon} [f(t) - f_{\delta}(t)] - \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t X(t, s, \varepsilon) K(s, s) \left[\frac{1}{\varepsilon} (f(s) - f_{\delta}(s)) + (u_0 - u_{0\delta}) \right] ds. \quad (14)$$

лемма 1-3 төрдөгү а),б),с) шарттарын эске алсак, (8) ден

$$\|g(t, \varepsilon)\|_C \leq C_0 \sqrt{\delta} + \frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda(\tau) d\tau} N_0 \lambda(s) \left(\frac{\delta}{\varepsilon} + C_0 \sqrt{\delta} \right) ds \leq (N_0 + 1) \left(C_0 \sqrt{\delta} + \frac{\delta}{\varepsilon} \right). \quad (15)$$

келип чыгат.

Лемма 3 жана (15) барабарсыздыктын негизинде (13) ден

$$\|\xi(t, \varepsilon)\| \leq \int_{-\infty}^t (e^{-1} + N_0) l(s) \|\xi(s, \varepsilon)\| ds + c_1 \varepsilon^\gamma, \quad t \in R,$$

ээ болобуз.

Бул жерде Гронуолла-Беллмандын барабарсыздыгын колдонуп

$$\|v(t, \varepsilon) - v_\delta(t, \varepsilon)\|_C \leq C_3 \left(C_0 \sqrt{\delta} + \frac{\delta}{\varepsilon} \right), \quad (16)$$

алабыз

мында $C_3 = e^{(e^{-1} + N_0) \int_{-\infty}^{\infty} l(s) ds} (N_0 + 1)$.

$$\|u(t) - v_\delta(t, \varepsilon)\|_C \leq \|u(t) - v(t, \varepsilon)\|_C + \|v(t, \varepsilon) - v_\delta(t, \varepsilon)\|_C. \quad (17)$$

экени түшүнүктүү.

Теорема 1 дин жана (3.2.16) баалоонун негизинде, (3.2.17) ден

$$\|u(t) - v_\delta(t, \varepsilon)\|_C \leq C_2 \varepsilon + C_3 \left(C_0 \sqrt{\delta} + \frac{\delta}{\varepsilon} \right).$$

ээ болобуз.

Андан ары $\varepsilon = \sqrt{\delta}$ параметрин тандап алып

$$\|u(t) - v_\delta(t, \sqrt{\delta})\|_C \leq C_4 \sqrt{\delta}, \quad (18)$$

алабыз, мында $C_4 = C_2 + C_0 C_3 + C_3$.

Ушул эле сыяктуу, төмөндөгүдөй теорема далилденет.

Теорема 2. Айталы теорема 1 дин шарттары аткарылсын. Анда (5) системанын $v_\delta(t, \varepsilon)$ чечими $\varepsilon = \sqrt{\delta} \rightarrow 0$ умтулган кезде $C_n(R)$ нормасы боюнча (1) системанын чечимине жыйналат. Мына ошондуктан (12) баалоосу туура.

Адабияттар:

1. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода // Журнал «Вычислительная математика и математическая физика». - 1979. - Т.19. - №4. - С. 970-988.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.Р. Некорректные задачи математической физики и анализ. - М: Наука, 1980. - С. 286.
3. Денисов А.М. О приближенном решении уравнения Вольтерра первого рода, связанного с одной обратной задачей для уравнения теплопроводности // Журнал Вестник Московского университета. - Сер.15 Вычислительная математика и кибернетика. - 1980. - №3. - С.49-52.
4. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Доклад АН СССР. - 1989. - Т. 309. - №5. - С. 1052-1055.
5. Asanov A. Regularization, uniqueness and existence of Solutions of Volterra equations of the first kind, VSP, Utrecht, The Netherlands, 1998.
6. Асанов А., Камбарова А.Д. Регуляризация решения одного класса систем двух линейных, интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси // Постулат. - 2019. - №2. - С. 1-7.