DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 6, 2020

Стамалиева К.А.

ТУУНДУНУН ЖАРДАМЫ МЕНЕН ТЕҢДЕМЕЛЕРДИ ЧЫГАРУУ ЖАНА БАРАБАРСЫЗДЫКТАРДЫ ДАЛИЛДӨӨ ЫКМАЛАРЫ

Стамалиева К.А.

СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВ НЕРАВЕНСТВ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

K.A. Stamalieva

METHODS FOR SOLVING EQUATIONS AND EVIDENCE OF INEQUALITIES USING A DERIVATIVE

УДК: 517

Бул макалада математикалык анализдеги негизги түшүнүктөрдүн бири болгон туунду түшүнүгүн кээ бир алгебралык, тригонометриялык теңдемелерди чыгаруудагы жана барабарсыздыктарды далилдөөдөгү ролун көрсөтүү менен туундуну теңдемелерди чыгарууда, анын тамырларынын санын аныктоодо, теңдештиктерди жана барабарсыздыктарды далилдөөдө, удаалаштыктардын суммасын табуудагы колдонулуштары каралган. Мисалы, туундунун жардамы менен кээ бир стандарттык эмес мисалдардагы барабарсыздыктардын, теңдештиктердин далилдөөлөрү көрсөтүлдү, ошондой эле туюнтмаларды жөнөкөйлөтүүдө эң оңой жана тез жолу - бул туундунун колдонулушу деп баса белгиленди. Туундуну колдонууда функциялардын монотондуулугу, үзгүлтүксүздүгү, экстремум чекиттеринин жашоо шарттары жана аларга тиешелүү теоремалар каралган. Макалада каралган мисалдар окуучулардын кругозорун кеңейтен жана туундуну окуп үйрөнүүгө кызыгуу туудурат деген ишеним бар.

Негизги сөздөр: *туунду, туундунун маанилүүлүгү, дифференциалдык эсептөөлөр, теоремалар, теңдеменин тамыры, монотондуулук, үзгүлтүксүздүк, экстремум чекиттери, теңдештиктер, удаалаштыктын суммасы.*

В этой статье показывая основную роль производной, являющейся основным понятием математического анализа, при решении некоторых алгебраических, тригонометрических уравнений и при доказательств неравенств, были рассмотрены применения производной при решении уравнений, при определении количества корней уравнения, при доказательстве тождеств и неравенств, при нахождении суммы последовательностей. Например, показаны применения производной при доказательстве неравенств, тождеств в нестандартных задачах, а также подчеркнуто, что применение производной - это самый быстрый и легкий путь упрощения выражений. При применении производной были рассмотрены монотонность, непрерывность функций, условия существования точек экстремумов, а также соответствующие им теоремы. Надеемся, что рассмотренные примеры в статье расширят общий кругозор учащихся и появится у них интерес к изучению производной.

Ключевые слова: *производная, значимость производной, дифференциальные исчисления, теоремы, корни уравнения, монотонность, непрерывность, точки экстремума, тождества, сумма последовательности.*

In this article, showing the main role of the derivative, which is the main concept of mathematical analysis, in solving some algebraic, trigonometric equations and in proving inequalities, we examined the applications of the derivative in solving equations, in determining the number of roots of an equation, in proving identities and inequalities, for finding the sum of the sequences. For example, the use of the derivative in the proof of inequalities, identities in non-standard problems is shown, and it is also emphasized that the use of the derivative is the fastest and easiest way to simplify expressions. When applying the derivative, monotonicity, continuity of functions, conditions for the existence of points of extrema, and also the corresponding theorems were considered. We hope that the considered examples in the article will expand the general horizons of students and they will have an interest in studying the derivative.

Key words: *derivative, practical significance of the derivative, differential calculus, theorems, roots of the equation, monotonicity, continuity, extremum points, intervals of increase and decrease, identities, sum of a sequence, system of equations.*

Бул баяндаманын негизги максаты: теңдемелерди чыгарууда, туюнтмаларды жөнөкөйлөтүүдө жана барабарсыздыктарды далилдөөдө туундунун ордун көрсөтүү жана окуучулардын туунду түшүнүгүнө болгон кызыгууларын арттыруу. Көп эле учурда мугалимдер туундуну кайсы жерде колдонууга болот жана анын кандай пайдасы бар деген суроолорго туш болот. Ушул суроого жооп катары жана окуучулардын кругозорлорун

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

кеңейтүү максатында бир нече мисалдардын негизинде туундунун колдонулушун кароону туура көрдүк.

Орто мектептерде туунду түшүнүгү өтө кыйынчылык менен берилгендиктен, практикалык жактан окуучуларды кызыктыруу максатында туундунун колдонулушун кароо маселеси туулат. Туундунун практикалык маанилүүлүгүн ачуу аркылуу ар бир билим алуучунун теориялык билимдеринин практикалык колдонуу жөндөмдүүлүктөрүн калыптандырууга болот. Туундунун жардамы менен теңдеме канча тамырга ээ экендигин аныктоого жана теңдемени, теңдемелер системаларды чыгарууга болот. Бул учурда функцияны монотондуулукка изилдөөсү, анын экстремалдык маанилерин, үзгүлтүксүздүк аралыктарын табуу маселеси эң негизги ролду ойнойт.

Туундунун колдонуу жолдорун билгенде гана окуучулар анын жардамы менен маселелерди стандарттык түрдө чыгарууда кыйналышкан учурларда колдоно алышат. Алгебралык жана тригонометриялык туюнтмаларды жөнөкөйлөтүүнү, теңдештиктерди жана барабарсыздыктарды далилдөөнү, теңдемелерди чыгаруу жолдорун жеңилдетүү максатында туундуну колдонуу эң ыңгайлуу экендигин бир нече мисалдардын негизинде көрсөтүүгө аракеттенебиз. Анда эмесе төмөнкү мисалдарды карайлы:

Барабарсыздыктарды далилдөө. Ал эми барабарсыздыктарды далилдөөдө же сандарды салыштырууда жалпы функционалдык барабарсыздыктарга өтүү ыңгайлуу болот.

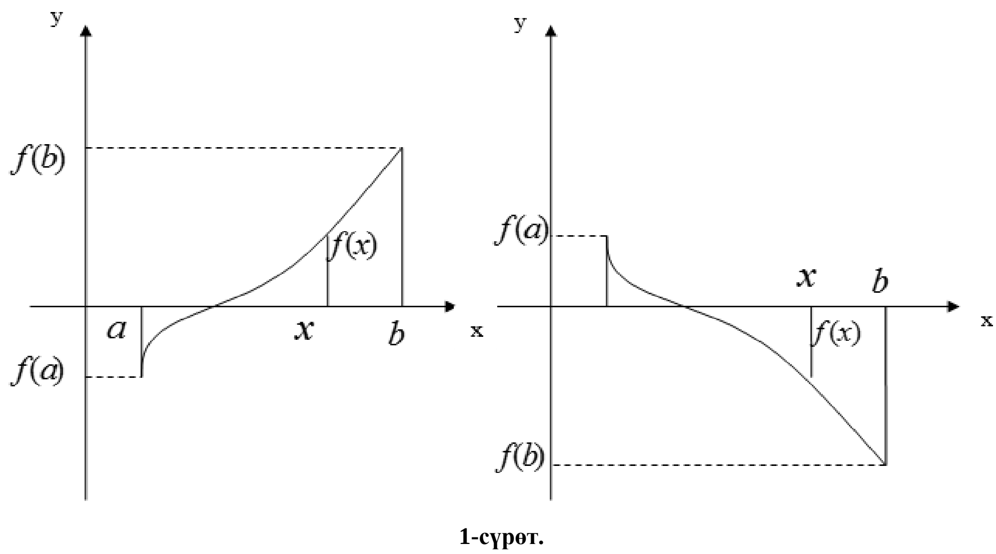
Барабарсыздыктарды далилдөөдө төмөнкү теоремаларды колдонобуз:

1-теорема. Эгерде $(a;b)$ аралыгында f жана g функциялары a чекитинде үзгүлтүксүз болуп, $f'(x) < g'(x)$ жана $f(a) \le g(a)$ барабарсыздыктары аткарылса, анда $(a;b)$ аралыгында $f(x) < g(x)$ барабарсыздыгы аткарылат.

2-теорема. $f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесиндисинде аныкталсын жана дифференцирленсин. Эгерде бул кесиндиде $f'(x) \ge 0$ $(f'(x) \le 0)$ шарт аткарылса, анда $f(x)$ функция берилген кесиндиде өсүүчү (кемүүчү) болот жана $[a;b]$ кесиндисиндеги каалаган *x* үчүн төмөнкү барабарсыздыктар орун алат:

$$f(a) \le f(x) \le f(b) \quad (f(a) \ge f(x) \ge f(b)),$$

$[a;b]$, мында $f'(x) = 0$ чектүү сан.



1-сүрөт.

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Бул теореманы колдонуп, төмөнкү барабарсыздыктарды далилдейбиз:

1-мисал. Барабарсыздыкты далилдегиле.

$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Төмөнкү функцияны карайлы: $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ $x = 0$ барабар болгондо функция аныкталбагандыктан, биз $\varphi(x)$ функцияны $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ аралыгында карайбыз. Мында $\varphi(x)$ дифференцирленет. $\varphi'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{x - tg\,x}{x^2}\cos x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Бирок $0 < x < \frac{\pi}{2}$ болгондо $x < tg\,x$ болот. Бул барабарсыздыкты $f(x)$ функциянын берилген аралыгында монотондуу экендигин колдонуу менен далилдесек болот. Демек, берилген аралыкта функциянын туундусу терс. $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $\varphi'(x) < 0$, анда $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ берилген аралыгында кемийт.

Демек, $\varphi(x) > \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ барабарсыздыгы $0 < x < \frac{\pi}{2}$ үчүн орун алат. $\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}$, $\sin x > \frac{2}{\pi}$.

Мындан $x = 0$ жана $x = \frac{\pi}{2}$ болгондо барабарсыздык орун аларын көрө алабыз. $\varphi(x) \geq \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$.

Башкача айтканда $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Бул барабарсыздыкты графикалык жол менен да далилдесек болот [2, 49-б].

3-теорема. a жана b сандары үчүн $e \leq a < b$ шарттары аткарылсын. Анда төмөнкү барабарсыздык орун алат: $a^b > b^a$

Далилдөөсү: $f(x) = x - a\log_a x$, $x \in [a; b]$ аралыгында аныкталган функцияны карайлы. Бул функция $[a; b]$ кесиндисинде аныкталган, дифференцирленген жана туундусу төмөнкүгө барабар болот:

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$f'(x)=1-\frac{a}{x\ln a}$. $x \geq a$ чоң жана $a \geq e$ болгондуктан ($\ln a \geq 1$ болот), демек $\frac{a}{x\ln a} \leq 1$. Анда $f'(x)=1-\frac{a}{x\ln a} \geq 0$. Мындан жогорку теореманын негизинде $f(x)=x-a\log_a x$ функция $[a;b]$ кесиндисинде өсүүчү функция болот.

$f(x)$ функция $[a;b]$ кесиндисинде өсүүчү болгондуктан, өсүүчү функциянын касиетин колдонуу менен $f(a)<f(b)$ экенин алабыз.

$f(a)=a-a\log_a a=a-a=0$. $f(b)=b-a\log_a b=b-\log_a b^a$. Мындан $0<b-\log_a b^a$ же $b>\log_a b^a$. Бул барабарсыздыкты потенцирлөө менен, төмөнкүнү алабыз: $a^b>b^a$. Теорема далилденди.

Бул теоременын негизинен төмөнкү жыйынтыкты ала алабыз: эки даражанын ичинен көрсөткүүчү чоң даража чоң болот.

Туюнтмаларды жөнөкөйлөтүү. Кээ бир учурларда туундунун колдонулушу алгебралык жана тригонометриялык туюнтмаларды жөнөкөйлөтүүнү жеңилдетет.

2-мисал. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

$$(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3.(1)$$

Чыгарылышы: берилген туюнтманы $f(a)$, функция менен белгилеп алабыз:

$$f'(a)=3((a+b+c)^2-(a+b-c)^2-(b+c-a)^2-(c+a-b)^2)=$$
$$3(2(a+b)2c+2(a-b)(-2c))=24bc;$$

$$f(a)=24abc+c.\ c=f(0)=(b+c)^3-(b-c)^3-(b+c)^3-(c-b)^3=0.$$

Демек, (1) туюнтма $24abc$ ге барабар болот [3, 31 – б.].

Теңдештиктерди далилдөө.

4-теорема. $[a;b]$ **кесиндисинде** $f(x)$ функция берилсин. Берилген кесиндиде функция турактуу болушу үчүн $[a;b]$ кесиндисинин ар бир чекитинде функциянын туундусунун $f'(x)$ жашашы жана анын $[a;b]$ кесиндисинин ар бир чекитинде нөлгө барабар болушу зарыл жана жетиштүү.

Бул теореманы колдонуу менен $f(x)=c_0$ түрүндөгү теңдештиктерди кандайдыр бир X аралыгында далилдөөгө болот. Ал үчүн функция $f(x)=c$ (c – константа) экендигин көрсөтүү

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

жетиштүү жана кандайдыр бир ушул аралыктагы x_0 үчүн $f(x_0)=c_0$ аткарылышын көрсөтүү зарыл. Бир мисал карайлы:

3- мисал. Теңдештикти далилдегиле:

$$arctg\ x + arcctg\ x = \frac{\pi}{2},\quad x \in (-\infty;\infty)$$

Бул теңдештикти далилдөө үчүн төмөнкү функцияны карайбыз:

$f(x) = arctg\ x + arcctg\ x,\quad x \in (-\infty;\infty)$. Бул функция $(-\infty;\infty)$ аралыгында дифференцирленет. Функциянын $f'(x)$ туундусун таап $(-\infty;\infty)$ аралыгында нөлгө барабар экендигин $f'(x)=0$ көрсөтөбүз. $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$

Демек, жогорудагы теореманын негизинде $f(x)=c$ (c – константа).

Турактуу c табуу үчүн $f(x)$ функциянын маанисин $x_0=0$ чекитинде табабыз. Анда: $f(x_0)=arctg\ 0 + arcctg\ 0 = \frac{\pi}{2}$. Мындан $c=\frac{\pi}{2}$. Демек. $arctg\ x + arcctg\ x = \frac{\pi}{2}$, бардык $x \in (-\infty;\infty)$. Теңдештик далилденди.

5-теорема. $f(x)$ функция $(a;b)$ аралыгында үзгүлтүксүз болсун жана $(a;b)$ аралыганан $f'(x)<0$ барабарсыздыгы аткарылгандай $(a;c)$ аралыгында жана $f'(x)>0$ барабарсыздыгы аткарылгандай $(c;b)$ аралыгында жаткан *c* чекити табылсын. Анда $(a;b)$ аралыгындагы каалаган *x* *үчүн* $x=c$ барабар болгондо гана $f(x)\geq f(c)$, барабарсыздыгы аткарылат.

4-мисал. Теңдештикти далилдегиле:

$$\sin^4(x)+\frac{1}{2}\cos(2x)=\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{3}{8} \qquad (2)$$

Далилдөөсү: төмөнкү функцияны карайлы:

$f(x)=\sin^4(x)+\frac{1}{2}\cos(2x)-\frac{1}{8}\cos(4x)=\frac{3}{8}$. $f(x)=\frac{3}{8}$. барабар экендигин далилдейбиз.

Белгилеп алган функциянын туундусун табабыз:

$$f'(x)=4\sin^3(x)\cos(x)-\sin(2x)+\frac{1}{2}\sin(4x)=$$

$$4\sin^3(x)\cos(x)-2\sin(x)\cos(x)+\sin(2x)\cos(2x)=2\sin(x)\cos(x)(2\sin^2(x)-1)+$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$$+2\sin(x)\cos(x)\cos(2x)=2\sin(x)\cos(x)(\sin^2(x)+\sin^2(x)-1)+2\sin(x)\cos(x)\cos(2x)=$$
$$=2\sin(x)\cos(x)(-\cos(2x))+2\sin(x)\cos(x)\cos(2x)\equiv 0.$$

Демек, $f(x)\equiv c=const=2\sin(x)\cos(x)$ $x=0$ $c=f(0)=\frac{3}{8}$, демек теңдештик далилденди.

Удаалаштыктардын суммасын табуу.

5-мисал. Сумманы тапкыла: $S_n(x)=x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots+nx^n, x\neq 1$

Чыгарылышы: берилген сумманы төмөнкү түргө келтиребиз:

$x\left(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}\right)$, бул кандайдыр бир функциянын туундусу экендиги көрүнүп турат:

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}=\left(x+x^2+x^3+\ldots+x^n\right)^{/}.$$

Алынган сумма геометриялык прогрессияны берет. Анын суммасы белгилүү формула боюнча төмөнкүгө барабар болот:

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=\left(\frac{x(1-x^n)}{1-x}\right)^{/}$$

$$\left(\frac{x(1-x^n)}{1-x}\right)^{/}=\left(\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\right)^{/}=\frac{(1-(n+1)x^n)(1-x)+(x-x^{n+1})}{(1-x)^2}=$$
$$=\frac{1-nx^n-x^n-x+nx^{n+1}+x^{n+1}+x-x^{n+1}}{(1-x)^2}=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

Демек, берилген сумма: $S_n(x)=\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$ [4].

Теңдемелерди чыгаруу.

1-касиет. Эгерде f функция кандайдыр бир аралыкта өссө же кемисе, анда ал аралыкта $f(x)=0$ теңдеме бирден көп эмес тамырга ээ болот.

Бул касиет функциянын өсүү жана кемүү аныктамасынан келип чыгат. $f(x)=0$ теңдеменин тамыры $y=f(x)$ функциянын графиги менен ох огу менен кесилиш чекитине барабар.

2-касиет. Эгерде f функциясы [a,b] кесиндисинде аныкталып, үзгүлтүксүз болуп жана анын учтарында ар кандай белгидеги маанилерине барабар болсо, анда а жана b арасынан f(c)=0 барабар болгондой кандайдыр бир с чекити табылат.

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 6, 2020

6-мисал. Теңдемелер системасын чыгаргыла: $\begin{cases} x^2y+2y^2x+y^3=9 \\ x^3y-y^4=7 \end{cases}$

Чыгарылышы:

Система төмөнкү системага эквиваленттүү: $\begin{cases} y(x+y)^2=9 \\ y(x^3-y^3)=7 \end{cases}$

Биринчи теңдемеден $y>0$ экендиги, ал эми экинчи теңдемеден $x>y>0$ экендиги келип чыгат.

Биринчи теңдемеден х ти у аркылуу туюнтабыз: $\sqrt{y}(x+y)=3$, $x=\dfrac{3}{\sqrt{y}}-y$. Анда $y\left(\left(\dfrac{3}{\sqrt{y-y}}\right)^3-y^3\right)=7$ барабар болот. $t=\sqrt{y}$ деп белгилеп алып, төмөнкү теңдемени алабыз: $t^2\left(\left(\dfrac{3}{t}-t^2\right)^3-t^6\right)=7$ же $(3-t^3)^3-t^9-7t=0$. $f(t)=(3-t^3)^3-t^9-7t$ функциянын туундусун табабыз: $f'(t)=-9t^2(3-t^3)^2-9t^8-7$. Функциянын туундусу t нын бардык маанилеринде терс болот, ошондуктан ал кемийт. Демек, $f(t)=0$ теңдеме бир тамырга ээ. $t=1$ теңдеменин тамыры болот. Анда, $x=2, y=1$ системанын жалгыз чыгарылышы [1].

7 – мисал. $\dfrac{t^2-t+1}{t^2+t+1}=t$ теңдеме $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$ берилген интервалында жаткан жалгыз гана тамырга ээ болорун далилдегиле.

Чыгарылышы:

Теңдемени теңдеш өзгөртүүлөрдү жүргүзүү менен төмөнкү түргө келтиребиз: $f(t)=0$, мында $f(t)=t^3+2t-1$. Функциянын туундусу $f'(t)=3t^2+2>0$ бардык $t\in R$ чоң болгондуктан, ал өсүүчү функция болот. 1-касиеттин негизинде теңдеме бирден көп эмес тамырга ээ болот. Функция үзгүлтүксүз, андан башка $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{8}{27}<0$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{8}>0$. 2-касиеттин негизинде теңдеме $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$ интервалында бир тамырга ээ болот.

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 6, 2020

Орто мектептерде жана жогорку окуу жайларда “Туунду жана аны колдонуу” темасын үйрөнүүдө жогоруда каралган мисалдар жардам берерине ишенебиз.

Адабияттар:

1. Агаханов С.А., Амиралиев А.Д., Гаджиагаев Ш.С., Рагимханова Г.С. Применение производной при доказательстве тождеств и нераверств // Современные проблемы науки и образования. - 2014. - №6.
2. Балк М.Б. Применение производной к выяснению истинности неравенств. / Журнал «Математика в школе», №6. - 1975. - С. 47-53.
3. Петров В.А., Чертков В.С. Применение производной в практической деятельности. / Журнал «Математика в школе», №6. - 1980. - С. 30-32.
4. Интернет маалыматтар:
5. https://ru.wikipedia.org/wiki, http://dic.academic.ru/, http://urokmatem.ru