DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 2, 2020

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Каракеев Т.Т., Бугубаева Ж.Т.

ВОЛЬТЕРРАНЫН ҮЧҮНЧҮ ТҮРДӨГҮ ӨСПӨӨЧҮ ФУНКЦИЯЛУУ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕСИН РЕГУЛЯРИЗАЦИЯЛОО

Каракеев Т.Т., Бугубаева Ж.Т.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА С НЕВОЗРАСТАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ

T.T. Karakeev, Zh.T. Bugubaeva

REGULARIZATION OF VOLTERRA LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE THIRD KIND WITH THE NON - INCREASING FUNCTION

УДК: 517.9.

Макалада үзгүлтүксүз өспөөчү функцияга көбөйтүү оператору менен берилген Вольтерранын сызыктуу интегралдык теңдемеси каралат. Теңдеменин чыгарылышы жашайт жана ал үзгүлтүксүз функциялардын мейкиндигине тиешелүү деп божомолдонот. Берилген теңдеменин чыгарылышына эквиваленттүү болуп түзүлгөн интегралдык теңдеменин негизинде регуляризация методу иштелип чыкты. Регуляризацияланган теңдеменин чыгарылышынын берилген теңдеменин чыгарылышына шарда бир калыпта жыйналышы боюнча теорема далилденди. Вольтерранын үчүнчү түрдөгү интегралдык теңдемелеринин чыгарылыштарынын жалгыздыгын камсыз кылуучу шарттар белгиленди. Регуляризациянын түзүлгөн методу регуляризация теориясынын Лаврентьев тибиндеги белгилүү методдорун жалпылайт. Алынган натыйжаларды Вольтерранын үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык тендемелеринин сандык чыгарылыштарын түзүү үчүн колдонууга болот.

Негизги сөздөр: *теңдеме, интегралдык теңдеме, Вольтерранын теңдемеси, өспөөчү функция, регуляризациялоо, чыгарылыштын жалгыздыгы, кичине параметр,*

В статье рассматривается линейное интегральное уравнение Вольтерра третьего рода с оператором умножения на непрерывную невозрастающую функцию. Предполагается, решение уравнения существует и принадлежит пространству непрерывных функций. На основе построенного интегрального уравнения, которое эквивалентно в смысле разрешимости исходному уравнению разработан метод регуляризации. Доказана теорема о равномерной сходимости решения регуляризованного уравнения к точному решению исходного уравнения Вольтерра третьего рода в шаре. Установлены условия, обеспечивающие единственность решения интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в шаре. Построенный метод регуляризации обобщает известные методы Лаврентьевского типа теории регуляризации. Полученные результаты могут быть использованы для построения численного решения линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода.

Ключевые слова: *уравнение, интегральное уравнение, уравнение Вольтерра, невозрастающая функция, регуляризация, единственность решения, малый параметр.*

In article, the Volterra linear integral equation of the third kind with the functional of multiplication to continuous non-increasing function is considered. It is supposed, the equation solution exists and belongs to space of continuous functions. On the basis of the constructed integral equation which is equivalent in sense of resolvability to an input equation the regularization method is developed. The theorem about a solution uniform convergence of the regularized equations to the exact solution of Volterra input equation of the third kind in a full-sphere is proved. The conditions ensuring uniqueness of a solution of Volterra integral equations of the third kind in a full-sphere are established. The constructed method of a regularisation generalises known methods of Lavrentevsky type of the theory of a regularisation. The received outcomes can be used for construction of a numerical solution of Volterra linear integral equations of the third kind.

Key words: *equation, integral equation, Volterra equation, non-increasing function, regularization, uniqueness of the solution, small parameter.*

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Широкий класс прикладных задач в нестационарном случае изучаются путем приведения к интегральным уравнениям Вольтерра. В общем случае такие задачи могут быть исследованы с помощью интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [2, 5]. Объектом возникновения интегральных уравнений Вольтерра третьего рода являются обратные и нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных [2, 4, 5]. Вопросы регуляризируемости и единственности решения интегральных уравнений Вольтерра третьего рода изучены в работах [1, 2, 3, 6].

В данной работе излагается метод регуляризации, который обобщает методы, рассмотренные в [4, 6, 7].

Рассматривается интегральное уравнение Вольтерра третьего рода

$$p(x)u(x)+\int_0^x K(x,t)u(t)dt=g(x), \qquad (1)$$

в предположении, что его решение принадлежит пространству $C[0,b]$, а для заданных функций $p(x)$, $g(x)$, $K(x,t)$ выполняются условия:

а) $g(x)\in C\,[0,b]$, $\quad p(x)\in C^1[0,b]$, $\quad p(x)$ - невозрастающая функция,

$p(b)=0$, $\quad p(x)>0$, $\ \forall x\in[0,b]$;

б) $K(x,t)\in C(D)$, $\quad K(x,x)\ge 0$, $\quad D=\{(x,t)/0\le t\le x\le b\}$;

в) $G(x)\ge d_1$, $\quad G(x)=C_0p^2(x)+\big(1+C_1g(x)\big)K(x,x)$,

$\theta_1G(x)+p'(x)\ge 0$, $\quad 0<\theta_1<1$, $\quad 0<C_0,C_1,d_1=const.$

На уравнение (1) действуем оператором $I+C_0J+C_1T$, где I - единичный оператор, J и T - операторы Вольтерра вида [4]

$$(Jv)(x)=\int_0^x p(t)v(t)dt, \qquad (Tv)(x)=\int_0^x K(t,t)u(t)v(t)dt.$$

В результате получим уравнение

$$p(x)u(x)+\int_0^x G(t)u(t)dt=\int_0^x L(x,t)u(t)dt+$$

$$+C_1\int_0^x p_0(t)u^2(t)dt+C_1\int_0^x u(t)dt\int_t^x K_0(s,t)u(s)ds+f(x), \qquad (2)$$

где $L(x,t)=K(t,t)-K(x,t)-C_0\int_t^x p(s)K(s,t)ds$, $\quad p_0(x)=p(x)K(x,x)$,

$$K_0(x,t)=K(t,t)K(t,x), \qquad f(x)=g(x)+C_0\int_0^x p(t)g(t)dt.$$

Наряду с уравнением (2) рассмотрим уравнение с малым параметром ε из интервала (0,1) [1, 3]

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$$\left(\varepsilon+p(x)\right)u_\varepsilon(x)+\int_0^x G(t)\,u_\varepsilon(t)dt=\int_0^x L(x,t)\,u_\varepsilon(t)dt\ +$$
$$+C_1\int_0^x p_0(t)\,u_\varepsilon^2(t)dt+C_1\int_0^x u_\varepsilon(t)dt\int_t^x K_0(s,t)\,u_\varepsilon(s)ds+\varepsilon u(0)+f(x).\quad (3)$$

Посредством резольвенты ядра $(-G(t)/(\varepsilon+p(x)))$ уравнение (3) приведем к следующему виду

$$u_\varepsilon(x)=-\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x\frac{G(s)ds}{\varepsilon+p(s)}\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+p(t)}\left\{\int_0^t[L(t,s)-L(x,s)]\times\right.$$
$$\times\,u_\varepsilon(s)ds-\int_t^x L(x,s)\,u_\varepsilon(s)ds-C_1\int_t^x p_0(s)u_\varepsilon^2\,(s)ds-C_1\int_0^t u_\varepsilon(s)ds\,\times$$
$$\left.\times\int_t^x K_0(\nu,s)\,u_\varepsilon(\nu)d\nu-C_1\int_t^x u_\varepsilon(s)ds\int_s^x K_0(\nu,s)\,u_\varepsilon(\nu)d\nu+f(t)-f(x)\right\}dt\,+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon+p(x)}exp\left(-\int_0^x\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\left\{\int_0^x L(x,t)\,u_\varepsilon(t)dt+C_1\int_0^x p_0(t)\,u_\varepsilon^2(t)dt\,+\right.$$
$$\left.+C_1\int_0^x u_\varepsilon(t)dt\int_t^x K_0(s,t)\,u_\varepsilon(s)ds+\varepsilon u(0)+f(x)\right\}\equiv(Au_\varepsilon)(x).\qquad (4)$$

Введем обозначения

$\Omega[0,b]=\{\,u(x)\in C[0,b]\colon|u(x)-u_0|\le r_0,\qquad 0<u_0,\ r_0=const\}$,

$\|\cdot\|_{C[0,b]}=\max\limits_{x\in[0,b]}|\cdot|,\qquad P_1=\max\limits_{x\in[0,b]}|p(x)|,\qquad M_0=\max\limits_{x\in[0,b]}\left|\int_0^x|K(t,t)|dt\right|.$

Пусть $\bar u_\varepsilon(x),\ \ \tilde u_\varepsilon(x)\in\Omega[0,b]$. Оценим разность операторов $(A\bar u_\varepsilon)(x)-(A\tilde u_\varepsilon)(x)$. Тогда имеем

$$|(A\bar u_\varepsilon)(x)-(A\tilde u_\varepsilon)(x)|\le\left|\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+p(t)}\times\right.$$
$$\times\left\{\int_0^t[L(x,s)-L(t,s)]\left(\bar u_\varepsilon(s)-\tilde u_\varepsilon(s)\right)ds+\int_t^x L(x,s)\left(\bar u_\varepsilon(s)-\tilde u_\varepsilon(s)\right)ds\,+\right.$$
$$+C_1\left[\int_t^x p_0(s)(\bar u_\varepsilon^2(s)-\tilde u_\varepsilon^2(s))\,ds+\int_0^t(\bar u_\varepsilon(s)-\tilde u_\varepsilon(s))ds\int_t^x K_0(\nu,s)\,u_\varepsilon(\nu)d\nu\,+\right.$$
$$+\int_0^t u_\varepsilon(s)ds\int_t^x K_0(\nu,s)\,(\bar u_\varepsilon(\nu)-\tilde u_\varepsilon(\nu))d\nu+\int_t^x(\bar u_\varepsilon(s)-\tilde u_\varepsilon(s))ds\,\times$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 2, 2020

$$\times\int_s^x K_0(\nu,s)\,u_\varepsilon(\nu)d\nu+\int_t^x u_\varepsilon(s)ds\int_s^x K_0(\nu,s)\,(\bar u_\varepsilon(\nu)-\tilde u_\varepsilon(\nu))d\nu\Big]\Big\}dt\Bigg|+$$

$$+\left|\frac{1}{\varepsilon+p(x)}exp\left(-\int_0^x\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\left\{\int_0^x L(x,t)\,(\bar u_\varepsilon(t)-\tilde u_\varepsilon(t))dt+\right.\right.$$

$$+C_1\int_0^x p_0(t)(\bar u_\varepsilon^2(t)-\tilde u_\varepsilon^2(t))dt+\ C_1\int_0^x(\bar u_\varepsilon(t)-\tilde u_\varepsilon(t))dt\times$$

$$\left.\left.\times\int_t^x K_0(s,t)\,u_\varepsilon(s)ds+C_1\int_0^x u_\varepsilon(t)dt\int_t^x K_0(s,t)\,(\bar u_\varepsilon(s)-\tilde u_\varepsilon(s))ds\right\}\right|. \qquad (5)$$

Получим следующие оценки

1) $$\left|\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+p(t)}\left\{\int_0^t[L(x,s)-L(t,s)]\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times[\bar u_\varepsilon(s)-\tilde u_\varepsilon(s)]ds+\int_t^x L(x,s)[\bar u_\varepsilon(s)-\tilde u_\varepsilon(s)]ds\right\}dt\right|\le$$

$$\le\left(2L_kbd_1^{-1}\theta_2^{-2}+C_0b(L_kb^2+2M_0)(1+\theta_2^{-1})\right)\|\bar u_\varepsilon(x)-\tilde u_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]},$$

где $0<L_K$- коэффициент Липшица ядра $K(x,t)$ по первому аргументу, $\theta_2=1-\theta_1$;

2) $$\left|\frac{1}{\varepsilon+p(x)}exp\left(-\int_0^x\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\int_0^x L(x,t)\,[\bar u_\varepsilon(t)-\tilde u_\varepsilon(t)]dt\right|\le$$

$$\le(L_kbd_1^{-1}(1+C_0P_1b/2)+C_0P_1b)(\theta_2e)^{-1}\|\bar u_\varepsilon(x)-\tilde u_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]};$$

3) $$\left|\frac{C_1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x\frac{G(s)ds}{\varepsilon+p(s)}\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+p(t)}\int_t^x p_0(s)[\bar u_\varepsilon^2(s)-\tilde u_\varepsilon^2(s)]\,dsdt\right|\le$$

$$\le 2C_1M_0r(1+\theta_2^{-1})\|\bar u_\varepsilon(x)-\tilde u_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]},\qquad \text{где}\quad r=|r_0+u_0|;$$

4) $$\left|\frac{C_1}{\varepsilon+p(x)}exp\left(-\int_0^x\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\int_0^x p_0(t)\big(\bar u_\varepsilon^2(t)-\tilde u_\varepsilon^2(t)\big)dt\right|\le$$

$$\le\frac{2C_1P_1r}{\theta_2e}\|\bar u_\varepsilon(x)-\tilde u_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]};$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

5) $$\left|\frac{C_1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+p(t)}\left\{\int_0^t[\bar{u}_\varepsilon(s)-\tilde{u}_\varepsilon(s)]ds\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\int_t^x K_0(s,v)\,u_\varepsilon(v)dv+\int_t^x[\bar{u}_\varepsilon(s)-\tilde{u}_\varepsilon(s)]ds\int_s^x K_0(s,v)\,u_\varepsilon(v)dv\right\}dt\right|\le$$
$$\le C_1 r\theta_2^{-2}(L_k b^2+2M_0)\|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]};$$

6) $$\left|\frac{C_1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+p(t)}\left\{\int_0^t \tilde{u}_\varepsilon(s)ds\int_t^x K_0(v,s)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times[\bar{u}_\varepsilon(v)-\tilde{u}_\varepsilon(v)]dv+\int_t^x \tilde{u}_\varepsilon(s)ds\int_s^x K_0(v,s)\,[\bar{u}_\varepsilon(v)-\tilde{u}_\varepsilon(v)]dv\right\}dt\right|\le$$
$$\le C_1 r\theta_2^{-2}(L_k b^2+2M_0)\|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]};$$

7) $$\left|\frac{C_1}{\varepsilon+p(x)}exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\left\{\int_0^x[\bar{u}_\varepsilon(t)-\tilde{u}_\varepsilon(t)]dt\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\int_t^x K_0(s,t)u_\varepsilon(s)ds+\int_0^x u_\varepsilon(t)dt\int_t^x K_0(s,t)\,[\bar{u}_\varepsilon(s)-\tilde{u}_\varepsilon(s)]ds\right\}\right|\le$$
$$\le C_1 r(L_k b^2+2M_0)(\theta_2 e)^{-1}\|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}.$$

В итоге, из (5) вытекает следующее неравенство
$$\|(A\bar{u}_\varepsilon)(x)-(A\tilde{u}_\varepsilon)(x)\|_{C[0,b]}\le q\|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]},$$
где $q=2L_k b d_1^{-1}\theta_2^{-2}+C_0 b(L_k b^2+2M_0)(1+\theta_2^{-1})+$
$$+2C_1 r\left(M_0(1+\theta_2^{-1})+\theta_2^{-2}(L_k b^2+2M_0)\right)+$$
$$+\left(L_k b d_1^{-1}(1+C_0P_1 b/2)+C_0P_1 b+C_1 r(2P_1+L_k b^2+2M_0)\right)(\theta_2 e)^{-1}.$$

Пусть оператор $(H_\varepsilon u)(x)$ задан в виде
$$\varepsilon(H_\varepsilon u)(x)\equiv\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+p(t)}[u(x)-u(t)]\,dt-$$
$$-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x)}exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)[u(x)-u(0)].$$

Имеет место [7, с. 47].

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Лемма. При выполнении условий *а) - в)* и $u(x) \in C[0,b]$ справедлива оценка

$$\|\varepsilon(H_\varepsilon u)(x)\|_{C[0,b]} \leq \left(3\varepsilon + 4d_2\varepsilon^{1-\beta}\right)\|u(x)\|_{C[0,b]} + d_3\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right),$$

где $d_2 = 1/(\theta_2^2 d_1 e), \quad d_3 = 1 + \theta_2^{-1},$

$$\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right) = \sup_{|x-t|\leq\varepsilon^\beta} |u(x) - u(t)|, \quad 1/2 \leq \beta < 1.$$

Теорема. Пусть выполняются условия *а) - в)*, $q < 1$ и уравнение (1) имеет решение $u(x) \in \Omega[0,b]$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ решение уравнения (4) равномерно сходится к решению уравнения (1), причем

$$\|u_\varepsilon(x) - u(x)\|_{C[0,b]} \leq \left(\left(3\varepsilon + 4d_2\varepsilon^{1-\beta}\right)\|u(x)\|_{C[0,b]} + d_3\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)\right)/(1-q).$$

Доказательство. Прибавим в обе части уравнения (3) величину $\varepsilon u(x)$, приведем это уравнение к виду

$$u(x) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon + p(t)}\left\{\int_0^t L(t,s)u(s)ds -\right.$$
$$-\int_0^x L(x,s)\,u(s)ds - C_1\int_t^x p_0(s)\,u^2(s)ds + C_1\int_0^t u(s)ds\int_s^t K_0(v,s)\,u(v)dv -$$
$$\left.-C_1\int_0^x u(s)ds\int_s^x K_0(v,s)\,u(v)dv + \varepsilon[u(t) - u(x)] + f(t) - f(x)\right\}dt +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon + p(x)}exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)ds}{\varepsilon + p(s)}\right)\left\{\int_0^x L(x,t)\,u(t)dt + C_1\int_0^x p_0(t)\,u^2(t)dt +\right.$$
$$\left.+C_1\int_0^x u(t)dt\int_t^x K_0(s,t)\,u(s)ds - \varepsilon u(x) + f(x)\right\}. \tag{6}$$

Положим $\eta_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - u(x)$. Из разности (4) и (6) и получим следующее уравнение

$$\eta_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon + p(t)} \times$$
$$\times\left\{\int_0^t L(t,s)\eta_\varepsilon(s)ds - \int_0^x L(x,s)\eta_\varepsilon(s)ds - C_1\int_t^x p_0(s)[u_\varepsilon(s) + u(s)] \times\right.$$
$$\times\,\eta_\varepsilon(s)ds + C_1\int_0^t \eta_\varepsilon(s)ds\int_s^t K_0(v,s)\,u(v)dv - C_1\int_0^x \eta_\varepsilon(s)ds \times$$
$$\times\int_s^x K_0(v,s)\,u(v)dv + C_1\int_0^t u(s)ds\int_s^t K_0(v,s)\,\eta_\varepsilon(v)dv -$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$$\times C_1 \int_0^x u(s)ds \int_s^x K_0(\nu,s)\,\eta_\varepsilon(\nu)d\nu + \varepsilon[u(t)-u(x)]\Bigg\} dt +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon+p(x)} exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\left\{\int_0^x L(x,t)\,\eta_\varepsilon(t)dt +\right.$$

$$+C_1 \int_0^x p_0(t)[u_\varepsilon(t)+u(t)]\eta_\varepsilon(t)dt + C_1 \int_0^x \eta_\varepsilon(t)dt \int_t^x K_0(s,t)\,u_\varepsilon(s)ds +$$

$$\left. +C_1 \int_0^x u(t)dt \int_t^x K_0(s,t)\,\eta_\varepsilon(s)ds - \varepsilon[u(x)-u(0)]\right\}.$$

Имеют место следующие оценки

$$\left|\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+p(t)}\times\right.$$

$$\left.\times\left\{\int_0^t [L(x,s)-L(t,s)]\eta_\varepsilon(s)ds + \int_t^x L(x,s)\eta_\varepsilon(s)ds\right\}dt\right| \le$$

$$\le \left(2L_k b d_1^{-1}\theta_2^{-2} + C_0 b(L_k b^2 + 2M_0)(1+\theta_2^{-1})\right)\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]};$$

$$\left|\frac{1}{\varepsilon+p(x)} exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\int_0^x L(x,t)\,\eta_\varepsilon(t)dt\right| \le$$

$$\le (L_k b d_1^{-1}(1+C_0P_1b/2) + C_0P_1b)(\theta_2 e)^{-1}\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]};$$

$$\left|\frac{C_1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+p(t)}\right. \le$$

$$\left.\int_t^x p_0(s)[u_\varepsilon(s)+u(s)]\,\eta_\varepsilon(s)ds\,dt\right| \le 2C_1M_0r(1+\theta_2^{-1})\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]};$$

$$\left|\frac{C_1}{\varepsilon+p(x)} exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\int_0^x p_0(t)\,[u_\varepsilon(t)+u(t)]\eta_\varepsilon(t)dt\right| \le$$

$$\le 2C_1P_1r(\theta_2 e)^{-1}\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]};$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 2, 2020

$$\left|\frac{C_1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)ds}{\varepsilon+p(s)}\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+p(t)}\left\{\int_0^t \eta_\varepsilon(s)ds\int_t^x K_0(s,v)u_\varepsilon(v)dv+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_t^x \eta_\varepsilon(s)ds\int_s^x K_0(s,v)\,u_\varepsilon(v)dv\right\}dt\right| \le C_1 r\theta_2^{-2}(L_k b^2+2M_0)\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]};$$

$$\left|\frac{C_1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)ds}{\varepsilon+p(s)}\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+p(t)}\left\{\int_0^t u(s)ds\int_t^x K_0(v,s)\,\eta_\varepsilon(v)dv+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_t^x u(s)ds\int_s^x K_0(v,s)\,\eta_\varepsilon(v)dv\right\}dt\right| \le C_1 r\theta_2^{-2}(L_k b^2+2M_0)\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]};$$

$$\left|\frac{C_1}{\varepsilon+p(x)}exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\left\{\int_0^x \eta_\varepsilon(t)dt\int_t^x K_0(s,t)\,u(s)ds+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^x u(t)dt\int_t^x K_0(s,t)\,\eta_\varepsilon(s)ds\right\}\right| \le C_1 r(L_k b^2+2M_0)(\theta_2 e)^{-1}\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}.$$

Тогда

$$\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} \le q\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]} + \left(3\varepsilon+4d_2\varepsilon^{1-\beta}\right)\|u(x)\|_{C[0,b]} + d_3\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right).$$

Поскольку $\eta_\varepsilon(x)=u_\varepsilon(x)-u(x)$ и при $\varepsilon\to 0$, $\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}\to 0$, то при $\varepsilon\to 0$ функция $u_\varepsilon(x)\to u(x)$ равномерно. Теорема доказана.

Следствие. При выполнении условий теоремы решение уравнения (1) единственно в $\Omega[0,b]$.

Литература:

1. Асанов А., Ободоева Г. Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода / - Фрунзе: Илим, 1994. - Вып. 25. - С. 65-74.
2. Глушак А.В., Каракеев Т.Т. Регуляризация интегральных уравнений Вольтерра третьего рода и обратных задач для уравнения Эйлера - Дарбу / Вестник ВГУ. - Воронеж, 2005. - Серия физика, математика. - №2. - С. 124-127.
3. Каракеев Т. Т. Регуляризация нелокальной граничной задачи для псевдопараболических уравнений/ Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2003. - Вып.32. - С. 179-183.
4. Каракеев Т.Т., Бугубаева Ж.Т. Эквивалентные преобразования и регуляризация линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода / Вестник КНУ им. Ж.Баласагына. - Бишкек, 2012. - С. 29-33.
5. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода / ЖВМ и МФ. - 1979. - Т.19, №4. - С. 970-989.
6. Нахушев А.М. Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра третьего рода / Дифференциальные уравнения. - 1974. - Т. 10, №1. - С. 100-111.
7. Омуров Т.Д., Каракеев Т.Т. Регуляризация и численные методы решения обратных и нелокальных краевых задач. - Бишкек: Илим, 2006. - 164 с.
8. Омуров Т.Д. Методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода. - Бишкек: Илим, 2003. - 162 с.