DOI:10.26104/NNTIK.2019.45

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 12, 2020

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

MATHEMATICAL SCIENCES

Асанов А., Чоюбеков С.М.

СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ВОЛЬТЕРРАНЫН БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ ТЕҢДЕМЕСИНИН ЛИПШИЦТИН ШАРТЫ МЕНЕН ЧЕЧИМИ

Асанов А., Чоюбеков С.М.

РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА С УСЛОВИЯМ ЛИПЩИЦА

A. Asanov, S.M. Choyubekov

SOLUTIONS OF NONLINEAR VOLTERR EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH LIPSCHITS CONDITIONS

УДК: 517.983

Интегралдык теңдемелер интегро-дифференциалдык теңдемелер бөлүмүнө негизги ролду ойнойт. Анын жардамында заманбап технологиялар өнүгүүдө. Аларга физика, радиотехника, компьютердик технологияларды ж.б. кирет. Акыркы жылдарда интергалдык теңдемелердин үстүнөн бир топ математиктер изилдөөлөрдү жүргүзүшүүдө. Учурдун компьютердик технологиялары менен ар түрдүү сандык чечимдерди реализациялоо жана татаал процесстерди моделдештирүү мүмкүнчүлүгү түзүлүүдө. Бул сыяктуу көптөгөн көптөгөн маселелер интегралдык тендемелерге келтирилет. Анда биринчи планга маселелердин чечимдерин сапаттуу изилдөө коюлат. Ошентсе да, предели боюнча интегралдануучу эки өзгөрүлмөлүү классикалык эмес теңдемелер азыркы мезгилге чейин өтө аз изилденген. Бул анын резольвентасын тургузуунун татаалдыгы менен о.э. кайсы бир моделдик учурларын эске албаганда жалпы типтеги аналитакалык көрүнүшү жазылбаганы менен түшүндүрүлөт. Ошого чечимди ушундай изилдөөлөр актуалдуу деп эсептелинет.

Негизги сөздөр: *Дирихле, Гроноулла, интеграл, тендеме, өсүүчү, үзгүлтүксүз, шарт, өзгөрүлмөлөр, усул.*

Интегральные уравнения играют в важную роль в разделе интегро-дифференциального уравнения. При помощи них развиваются современные науки и технологии. К ним относятся физика, радиотехника, компьютерные технологии и т.д. В течение последних лет над интегральными уравнениями работают многие математики. С помощью современных компьютерных технологий появляется возможность реализации разнообразных числовых теорий и моделирование сложных процессов. Таким же образом многие задачи приводятся к интегральным уравнениям. И в таком случае на первый план выдвигается качественное исследование решений задач. Однако, уравнения с двумя переменными пределами интегрирования, которые называют неклассическими, мало изучены. Это объясняется трудностями в построении резольвенты и в составлении соотношения для нее, т.к. еще не получено аналитическое представление в общем виде за исключением некоторых модельных случаев. Поэтому такие исследования решений являются актуальными.

Ключевые слова: *Дирихле, Гроноулла, интеграл, уравнение, возрастающая, непрерывные, условия, переменные, метод.*

Integral equations play an important role in the section of an integro-differential equation. Modern sciences and technologies are developing with the help of them. They include physics, radio engineering, computer technology, etc. In recent years, many mathematicians have been working on integral equations. With the help of modern computer technology, it becomes possible to implement a variety of numerical theories and simulate complex processes. In the same way, many problems are brought to integral equations. In this case, a qualitative study of problem solving comes to the fore. However, equations with two variable limits of integration, which are called non-classical, are poorly understood. This is due to difficulties in constructing a resolvent and in compiling a relation for it, because an analytical representation in general has not yet been obtained, with the exception of some model cases. Therefore, such research decisions are relevant.

Key words*: Dirichlet, Gronoull, integral, equation, increasing, continuous, conditions, variables, method.*

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45

Рассмотрим

$$\int_{\alpha(t)}^{t} K\big(t,s,u(s)\big)ds = f(t);\ \ t\epsilon[\,t_0\,;T] \qquad (1)$$

где $\alpha(t) \in C[t_0, t]$; $\alpha(t_0) = t_0$; $\alpha(t) \leq t$. $\alpha(t)$, $f(t)$ и $K\big(t,s,u(s)\big)$– заданные функции на отрезке $[t_0, t]$ и в области $G = \{(t,s):\ t_0 \leq t \leq T,\ \alpha(t) \leq s \leq t\}$; $\tau \leq t$, $\alpha(\tau) \leq \alpha(t)$ [1-3], [8-9].

$u(t)$– искомая функция на отрезке $[t_0, t]$

Пусть [6]

$$K\big(t,s,u(s)\big) = K_0(t,s)u(s) + K_1(t,s,u(s)) \qquad (2)$$

Тогда уравнение (1) можно представить

$$\int_{\alpha(t)}^{t} K_0(t,s)u(s)ds + \int_{\alpha(t}^{t} K_1\big(t,s,u(s)\big)ds = f(t);\ \ t\epsilon[\,t_0\,;T] \qquad (3)$$

Наряду с уравнением (2) рассмотрим

$$\varepsilon v(t,\varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^{t} K_0(t,s)v(s,\varepsilon)ds + \int_{\alpha(t)}^{t} K_1\big(t,s,v(s,\varepsilon)\big)ds = f(t) + \varepsilon u(t_0);\ \ t\epsilon[\,t_0\,;T] \qquad (4)$$

$0 < \varepsilon < 1$–некоторый малый параметр.

Его решение будем искать в виде

$$v(t,\varepsilon) = u(t) + \xi(t,\varepsilon); \qquad (5)$$

где $u(t)$– решение уравнения (2), а $\xi(t,\varepsilon)$– неизвестная функция

Подставляя (4) из (3) получим [4-5]

$$\varepsilon\xi(t,\varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^{t} K_0(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds = -\int_{\alpha(t)}^{t}[K_1\big(t,s,u(s)+\xi(s,\varepsilon)\big) -$$
$$-K_1\big(t,s,u(s)\big)]ds - \varepsilon[u(t) - u(t_0)];\ t\epsilon[\,t_0\,;T] \qquad (6)$$

В результате несложных преобразований последнее сведем к виду

$$\xi(t,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} K_0\,(s,s)\,\xi(s,\varepsilon)ds = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha(t)}^{t}[\,K_0(t,s) - K_0\,(s,s)]\xi(s,\varepsilon)ds +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\alpha(t)} K_0\,(s,s)\,\xi(s,\varepsilon)ds - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha(t)}^{t}[K_1\big(t,s,u(s)+\xi(s,\varepsilon)\big) -$$
$$-K_1\big(t,s,u(s)\big)]ds - [u(t) - u(t_0)];\ t\epsilon[\,t_0\,;T] \qquad (7)$$

Используя резольвенту $R(t,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}$ ядра $-\frac{1}{\varepsilon}K_0(s,s)$ и считая правую часть известным, решение (7) можно представить в следующем виде [6]

$$\xi(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha(t)}^{t}[\,K_0(t,s) - K_0(s,s)]\xi(s,\varepsilon)ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\alpha(t)} K_0(s,s)\,\xi(s,\varepsilon)ds -$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha(t)}^{t}[K_1\big(t,s,u(s)+\xi(s,\varepsilon)\big) - K_1\big(t,s,u(s)\big)]ds - [u(t) - u(t_0)]-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{\alpha(s)}^{s} K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}\,[K_0(t,\tau) - K_0\,(s,\tau)]\,\xi(\tau,\varepsilon)d\tau\,ds +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{\alpha(s)}^{s} K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}\,[K_0(t,\tau) - K_0(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau\,ds -$$
$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\alpha(s)} K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}\,K_0(\tau,\tau)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau\,ds +$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{\alpha(s)}^{s} K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}\,[K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-$$

$$-K_1(t,\tau,u(\tau))]d\tau\, ds-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{\alpha(s)}^{s} K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}\times$$

$$\times[K_1(t.\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(s,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))]d\tau\, ds+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{\alpha(s)}^{s} K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}\,[K_1(t,\tau,u(\tau))-K_1(s,\tau,u(\tau))]d\tau\, ds+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}[u(s)-u(t_0)]\,ds;\ \ t\epsilon[t_0;T] \tag{8}$$

Вычислим двойные интегралы, при этом воспользуемся формулой Дирихле и будем иметь ввиду, что $d_s\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau\right)=\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)ds,\ \alpha(t)\le t, \tau\in\alpha^{-1}(t)$. Тогда из (8) получится

$$\xi(t,\varepsilon)=\int_{t_0}^{\alpha(t)} H_0(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau+\int_{t_0}^{\alpha(t)} H_1(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau+$$

$$+\int_{\alpha(t)}^{t} H_2(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau+\int_{t_0}^{\alpha(t)} N_0(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon)\varepsilon)d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{\alpha(t)} N_1(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)d\tau+\int_{\alpha(t)}^{t} N_2(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)d\tau\ +U(t,\varepsilon);t\epsilon[t_0;T] \tag{9}$$

где

$$H_0(t,\tau,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}K_0(\alpha^{-1}(\tau),\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t K_0(s,s)ds} \tag{10}$$

$$H_1(t,\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(s,s)ds}[K_0(t,\tau)-K_0(\tau,\tau)]-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\tau^{\alpha^{-1}(\tau)} K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}\,[K_0(t,\tau)-K_0(s,\tau)]ds+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\tau^{\alpha^{-1}(\tau)} K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}\,[K_0(t,\tau)-K_0(\tau,\tau)]ds+ \tag{11}$$

$$H_2(t,\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(s,s)ds}[K_0(t,\tau)-K_0(\tau,\tau)]-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\tau^{t} K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}[K_0(t,\tau)-K_0(s,\tau)]\,ds; \tag{12}$$

$$N_0(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t K_0(s,s)ds}\times$$

$$\times[K_1(\alpha^{-1}(\tau),\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(\alpha^{-1}(\tau),\tau,u(\tau))]; \tag{13}$$

$$N_1(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t K_0(s,s)ds}[K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-$$

$$-K_1(t,\tau,u(\tau))-K_1(\alpha^{-1}(\tau),\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))+K_1(\alpha^{-1}(\tau),\tau,u(\tau))]+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(s,s)ds}[K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(t,\tau,u(\tau))-$$

$$-K_1(\tau,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))+K_1(\tau,\tau,u(\tau))]-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\tau^{\alpha^{-1}(\tau)} K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}\times$$

$$\times[K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(s,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(t,\tau,u(\tau))+K_1(s,\tau,u(\tau))]\,ds; \tag{14}$$

$$N_2(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(s,s)ds}[K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45

$$-[K_1(\tau,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(t,\tau,u(\tau))-K_1(\tau,\tau,u(\tau))]-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\tau^t K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}[K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-$$
$$-K_1(s,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(t,\tau,u(\tau))+K_1(s,\tau,u(\tau))]\,ds; \quad (15)$$

$$U(t,\varepsilon)=-[u(t)-u(t_0)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K_0(s,s)ds}-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}[u(t)-u(s)]ds; \quad (16)$$

Потребуем выполнение следующих условий:

1^0 $\alpha(t)\epsilon C^1\in[t_0,\tau]$, $\alpha'(t)>0$ при $t\epsilon[t_0;T]$;

2^0 При фиксированном $t\epsilon[t_0;T]$, $K(t,s)\epsilon L[\alpha(t);T]$ и $K(t,t)>0$ при почти всех $t\,\epsilon[t_0;T]$;

3^0 $\forall t;\tau\ (t>\tau)$ при всех (t,s) и $(\tau,s)\epsilon G$, $|K_0(t,\tau)-K_0(s,\tau)|\le L_0|t-s|$, $0<L_0-const$

4^0 при всех(t,τ,u_1)и$(t,\tau,u_2)\in[t_0;T]\times R$,

$|K_1(t,\tau,u_2)-K_1(s,\tau,u_2)-K_1(t,\tau,u_1)+K_1(s,\tau,u_1)|\le L_1|u_2-u_1||t_2-t_1|$, $0<L_1-const$, $K_1(t,t,0)\equiv 0$ при $t\epsilon[t_0;T]$

Обозначим $C_\varphi^\gamma[t_0;T]$ $(0<\gamma\le 1)$ – линейное пространство функций $u(t)$ определенных в $[t_0;T]$ и удовлетворяющих условию

$$|u(t)-u(\tau)|\le C|\varphi(t)-\varphi(\tau)|^\gamma \text{ где } \varphi(t)=\int_{t_0}^t K_0(s,s)ds;$$

$C<0$– некоторая постоянная, зависящая от $u(t)$, но не от t и τ. Ещё установлено, что оно является Банаховым пространством с нормой

$$\|u(t)\|=\sup_{t\in[t_0,T]}|u(t)|+\sup_{t\in[t_0,T]}\frac{|u(t)-u(\tau)|}{|\varphi(t)-\varphi(\tau)|^\gamma};$$

Далее, установим справедливость следующих утверждениям:

Некоторые утверждении берём как уже доказанным [6].

$$\int_{t_0}^{\alpha(t)}|H_0(t,\tau,\varepsilon)|d\tau\le\gamma_0>0;\ \gamma_0=\sup_{\tau\in[\alpha\{t\},T]}\frac{K_0(\alpha(\tau),\alpha(\tau))\alpha'(\tau)}{|K_0(\tau,\tau)|} \quad (17)$$

$$|H_1(t,\tau,\varepsilon)|\le\frac{L}{m}(2e^{-1}+1), \quad (18)$$

$$|H_2(t,\tau,\varepsilon)|\le\frac{L}{m}, \quad (19)$$

$$\left|\int_{t_0}^{\alpha(t)}N_0(\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)d\tau\right|\le\gamma_1\ \ \gamma_1=\sup_{t\in[t_0,T]}\frac{L_1(\alpha(\nu))\alpha'(\nu)}{K_0(\nu,\nu)} \quad (20)$$

Лемма 1. Пусть выполняются условия$1^0,2^0$ и4^0функции $N_1(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ и $N_2(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ определены соответственно формулами (13), (14) и (15). Тогда имеют места следующие неравенства

$$|N_1(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)|\le\frac{L_1}{\propto}\left(2e^{-1}+\frac{e^{-1}}{\propto}+\frac{1}{\propto}\right)|\xi(\tau,\varepsilon)|; \quad (21)$$

$$|N_2(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)|\le\frac{L_1}{\propto}\left(e^{-1}+\frac{M_0e^{-1}}{\propto}+\frac{M_0}{\propto}\right)|\xi(\tau,\varepsilon)|; \quad (22)$$

$$M_0=\sup_{t\in[t_0,T]}K_0(s,s)$$

Доказательство: Если переходить к оценке в (13), (14) и (15) соответственно с учетом условий леммы, заметив $Sup(qe^{-q})=1$ получаем требуемые оценки.

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45

$$|N_1(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)| \le \frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{\propto}{\varepsilon}\left(t-\alpha^{-1}(\tau)\right)}L_1\left(t-\alpha^{-1}(\tau)\right)|\xi(\tau,\varepsilon)| +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{\propto}{\varepsilon}(t-\tau)}L_1(t-\tau)|\xi(\tau,\varepsilon)| + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_\tau^{\alpha^{-1}(\tau)} e^{-\frac{\propto}{\varepsilon}(t-s)}L_1(t-s)ds|\xi(\tau,\varepsilon)| \le$$

$$\le \frac{L_1}{\propto}\{\frac{\propto(t-\alpha^{-1}(\nu))}{\varepsilon}e^{-\frac{\propto}{\varepsilon}\left(t-\alpha^{-1}(\nu)\right)} + \frac{\propto(t-\tau)}{\varepsilon}e^{-\frac{\propto}{\varepsilon}(t-\tau)}\}|\xi(\tau,\varepsilon)| +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}L_1|\xi(\tau,\varepsilon)|[(t-s)e^{-\frac{\propto}{\varepsilon}(t-s)}\Big]_{s=\tau}^{s=\alpha^{-1}(\tau)} + \frac{\varepsilon}{\propto}\int_\tau^{\alpha^{-1}(\tau)} e^{-\frac{\propto}{\varepsilon}(t-s)}ds] \le$$

$$\le \frac{2L_1e^{-1}}{\propto}|\xi(\tau,\varepsilon)| + \frac{1}{\varepsilon^2}L_1|\xi(\tau,\varepsilon)|\{\left(t-\alpha^{-1}(\tau)\right)e^{-\frac{\propto}{\varepsilon}\left(t-\alpha^{-1}(\tau)\right)} -$$

$$-\frac{\varepsilon}{\propto}e^{-\frac{\propto}{\varepsilon}(t-s)}\Big]_{s=\tau}^{s=\alpha^{-1}(\tau)} \le \frac{2L_1e^{-1}}{\propto}|\xi(\tau,\varepsilon)| + \frac{L_1}{\propto^2}|\xi(\tau,\varepsilon)|\frac{\left(t-\alpha^{-1}(\tau)\right)}{\varepsilon}e^{-\frac{\propto}{\varepsilon}\left(t-\alpha^{-1}(\tau)\right)} -$$

$$-\frac{L_1}{\propto^2} \le \frac{L_1}{\propto}\left(2e^{-1} + \frac{e^{-1}}{\propto} + \frac{1}{\propto}\right)|\xi(\tau,\varepsilon)|;$$

$$|N_2(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)| \le \frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{\propto}{\varepsilon}(t-\tau)}L_1(t-\tau)|\xi(\tau,\varepsilon)| + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_\tau^t M_0e^{-\frac{\propto}{\varepsilon}(t-s)}L_1(t-s)ds|\xi(\tau,\varepsilon)| \le$$

$$\le \frac{L_1}{\propto}\frac{\propto(t-\tau)}{\varepsilon}e^{-\frac{\propto}{\varepsilon}(t-\tau)}|\xi(\tau,\varepsilon)| + \frac{M_0L_1}{\varepsilon^2}\{(t-s)\frac{\varepsilon}{\propto}e^{-\frac{\propto}{\varepsilon}(t-s)}\Big]_{s=\tau}^{s=t} + \frac{\varepsilon}{\propto}\int_\tau^t e^{-\frac{\propto}{\varepsilon}(t-s)}ds\} \le$$

$$\le \frac{L_1e^{-1}}{\propto}|\xi(\tau,\varepsilon)| + \frac{M_0L_1}{\propto^2}\{\frac{\propto(t-\tau)}{\varepsilon}e^{-\frac{\propto}{\varepsilon}(t-\tau)} + 1\}|\xi(\tau,\varepsilon)| \le \frac{L_1}{\propto}\left(e^{-1} + \frac{M_0e^{-1}}{\propto} + \frac{M_0}{\propto}\right)|\xi(\tau,\varepsilon)|;$$

Лемма 2. Пусть $U(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}[u(t)-u(t_0)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K_0(s,s)ds} -$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}[u(t)-u(s)]\,ds;\ \varepsilon > 0$$

Тогда 1). Если $u(t) \in C[t_0;T], K_0(t,t) \in L_1[t_0;T]$, при почти всех $K_0(t,t) > m > 0$, $t\epsilon[t_0;T]$ и $\varphi(t) = \int_{t_0}^t K_0(s,s)\,ds$, $t\epsilon[t_0;T]$, то на $[t_0;T]$справедлива оценка

$$\|U(t,\varepsilon)\| \le 3\|u(t)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega_u(\varepsilon^\beta) = C_0(\varepsilon);\ 0 < \beta < 1 \qquad (23)$$

$\omega_u(\delta) = Sup\left|u\left(\varphi^{-1}(x)\right) - u\left(\varphi^{-1}(\nu)\right)\right|$; $\varphi^{-1}(x)$– обратная функция функции $\varphi(t)$;

2). Если $u(t) \in C_\varphi^\gamma[t_0;T], 0 < \gamma \le 1, K(t,t) \in L_1[t_0;T], K(t,t) \ge 0$ при $t\epsilon[t_0;T]$; $\varphi(t) = \int_{t_0}^t K(s,s)\,ds$; то

$$\|U(t,\varepsilon)\| \le M_0C_1\varepsilon^\gamma \qquad (24)$$

где $M_0 = Sup\frac{|u(t)-u(s)|}{|\varphi(t)-\varphi(s)|^\gamma}$; $C_1 = \gamma\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{\gamma-1}d\tau$;

И так сформулируем основные теоремы.

Теорема. Пусть выполняются условия $1^0 - 4^0$

1) Если уравнение (1) имеет решение в пространстве $C[t_0;T]$ непрерывных функций, то решение уравнения (2) при $\varepsilon \to 0$ сходится по норме $C[t_0;T]$ к решению $u(t)$ и справедлива оценка

$$\|v(t,\varepsilon) - u(t)\| \le \frac{\delta_1(\varepsilon)}{1-\beta};$$

где $\delta_1(\varepsilon) = C_0(\varepsilon)e^{(4+6e^{-1})L} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\beta = e^{L_5(T-t_0)}(\gamma_0 + \gamma_1)$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45

2) Если уравнение (1) имеет решение в пространстве $C_{\varphi}^{\gamma}[t_0;T]$, $0<\gamma\le 1$ то решение уравнения (2) при $\varepsilon\to 0$сходится по норме $C[t_0;T]$ к решению u(t) и справедлива оценка

$$\|v(t,\varepsilon)-u(t)\|\le\frac{\delta_2(\varepsilon)}{1-\beta_2};$$

где $\delta_2(\varepsilon)=M_0C_1\varepsilon^{\gamma}e^{(4+6e^{-1})L}\to 0$ при $\varepsilon\to 0, M_0=Sup\frac{|u(t)-u(s)|}{|\varphi(t)-\varphi(s)|^{\gamma}}; C_1=\gamma\int_0^{\infty}e^{-\tau}\tau^{\gamma-1}d\tau;$

Доказательство: В силу лемм 1-4 из (7) имеем

$$|\xi(t,\varepsilon)|=\int_{t_0}^{\alpha(t)}|H_0(t,\tau,\varepsilon)||\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau+\int_{t_0}^{\alpha(t)}|H_1(t,\tau,\varepsilon)||\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau+$$

$$+\int_{\alpha(t)}^{t}|H_2(t,\tau,\varepsilon)||\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau+\int_{t_0}^{\alpha(t)}|N_0(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon)\varepsilon)|d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{\alpha(t)}|N_1(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)|d\tau+\int_{\alpha(t)}^{t}|N_2(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)|d\tau+|U(t,\varepsilon)|;$$

$$|\xi(\tau,\varepsilon)|\le\gamma_0\|\xi(\tau,\varepsilon)\|_C+\int_{t_0}^{t}[|H_1(t,\tau,\varepsilon)|+|H_2(t,\tau,\varepsilon)|]|\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau+\gamma_1\|\xi(\tau,\varepsilon)\|_C+$$

$$+\int_{t_0}^{t}[|N_1(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)|+|N_2(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)|]|\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau+\|U(t,\varepsilon)\|_C$$

$$|\xi(\tau,\varepsilon)|\le\int_{t_0}^{t}[|H_1(t,\tau,\varepsilon)|+|H_2(t,\tau,\varepsilon)|+|N_1(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)|+$$

$$+|N_2(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)|]|\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau+(\gamma_0+\gamma_1)\|\xi(\tau,\varepsilon)\|_C+\|U(t,\varepsilon)\|_C$$

$$|\xi(\tau,\varepsilon)|\le e^{L_5(T-t_0)}\{(\gamma_0+\gamma_1)\|\xi(\tau,\varepsilon)\|_C+\|U(t,\varepsilon)\|_C\}$$

$$\|\xi(\tau,\varepsilon)\|_C\le e^{L_5(T-t_0)}\{(\gamma_0+\gamma_1)\|\xi(\tau,\varepsilon)\|_C+\|U(t,\varepsilon)\|_C\}$$

$$\|\xi(\tau,\varepsilon)\|_C\le e^{L_5(T-t_0)}(\gamma_0+\gamma_1)\|\xi(\tau,\varepsilon)\|_C+e^{L_5(T-t_0)}\|U(t,\varepsilon)\|_C$$

$$\|\xi(\tau,\varepsilon)\|_C\le\frac{e^{L_5(T-t_0)}}{1-\beta}\|U(t,\varepsilon)\|_C\quad t\epsilon[\,t_0\,;T]$$

$$\beta=e^{L_5(T-t_0)}(\gamma_0+\gamma_1)$$

$$L_5=|H_1(t,\tau,\varepsilon)|+|H_2(t,\tau,\varepsilon)|+|N_1(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)|+|N_2(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)|$$

Теорема 1 доказано.

Литература:

1. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: Теория и численные методы. - Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1999. - 193 стр.
2. Иманалиев М.И. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра I-рода [Текст]: Иссл. по инт-дифф. уравнениям. / М.И. Иманалиев, А.Асанов. - Фрунзе: Илим, 1988. - Вып. 21. - С. 3-38.
3. Асанов А. О решении неклассического интегрального уравнения первого рода в пространстве непрерывных функции [Текст]. / А.Асанов, Т.О. Бекешов, С.М. Чоюбеков. - Ош: Вестник ОшГУ, №3, 2012. - Выпуск 3. - С. 48-54,
4. Асанов А. Об одном классе неклассического интегрального уравнения Волтерра I рода [Текст]. / А.Асанов, Т.О. Бекешов, С.М. Чоюбеков. - Ош: Вестник ОшГУ №3, 2014.- Выпуск 5. 0 Серии естественных наук, -С. 83-88.
5. Асанов А. Выбор параметра регуляризации интегральных уравнений Вольтерра I рода с переменными пределами интеграла [Текст]/ А. Асанов, С.М. Чоюбеков. - Бишкек: «Известия вузов Кыргызстана», №1, 2018. - С. 6-10.
6. Чоюбеков С.М. Регуляризация решения неклассического интегрального уравнения со условиями Липшица [Текст]: Международный научный журнал. / С.М. Чоюбеков. - Казань: «Молодой ученый», №8 (112), 2016. - С. 34-38.
7. Асанов А. О решении линейных неклассических интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст]. / А.Асанов, С.М. Чоюбеков. Бишкек: «Наука новые технологии и инновации Кыргызстана», №1, 2020. - С. 3-8.
8. http://scask.ru/f_book_sm_math2.php?id=83. Научная библиотека. Предисловие к девятнадцатому изданию. §8. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра. 82. Формула Дирихле.
9. https://ru.wikipedia.org/wiki/ Лемма Гронуолла-Беллманаю