DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 10, 2020

ФИЗИКА ИЛИМДЕРИ

ФИЗИЧЕСКИЕ НАУКИ

PHYSICAL SCIENCES

Абдылдаев М.Ю., Керимов У.Т., Кольбаева Б.Б.

ОКТО ТОСКООЛ БОЛГОН ЭКИ ТЕГИЗДИКТИН ОРТОСУНДАГЫ БОШТУКТАН СУЮКТУКТУН АГЫП ЧЫГЫШЫ

Абдылдаев М.Ю., Керимов У.Т., Кольбаева Б.Б.

ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ЩЕЛИ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ ИМЕЮЩЕЙ НА ОСИ ПРЕПЯТСТВИЕ

M.Yu. Abdyldaev, U.T. Kerimov, B.B. Kolbaeva

THE OUTFLOW OF LIQUID FROM A GAP BETWEEN TWO PLANES HAVING AN OBSTACLE ON THE AXIS

УДК: 532.5

Симметрия огунда тоскоолдуктары бар уячадан идеалдуу, кысылгыс жана салмаксыз суюктуктун чыгуусунун тегиздик маселеси изилденген. Маселеде Н.Е. Жуговскийдин ыкмасы менен чечилет. Гидродинамиканын классикалык маселелеринин бири болгон "Эки тегиздиктин ортосундагы ажырымдан суюктуктун ачык чыгуусу" маселесин жалпыланган. Маселе параметрдин түр менен жалпы чыгарылышка ээ болот. Параметрдик чоңдуктарга сандык маанилерди берүү жолу менен тоскоолдуктун формаларын, ошондой эле анын ачык чыгуучу тешиктен кандай аралыкта экендигин табууга болот. Ушул жагдайга карата кысылуу коэффицентин билүүгө болот. Сыгылуу коэффиценттин түрлөрүнө карата агып чыккан суюктуктун ылдамдыгы өзгөрөт. Гидротрубинанын калакчаларына тийген суюктугунун массасына таасир этет. Калакчалардын тез же акырын окто айланышы пайда болуучу электр энергиясына чоң таасир этет.

Негизги сөздөр: *оюк, идеалдуу суюктук, жардамчы параметрлер, салмаксыздык, кысылбоо, симметрия, огу, учактары, ылдамдыгы, ыңгайлуулугу.*

Исследована задача о плоскости происхождения идеальной несжимаемой и невесомой жидкости из щели с препятствиями на оси симметрии. Задача решена методом Н.Е. Жуговского. Обобщена одна из классических задач гидродинамики «Истечение из щели между двумя плоскостями». Проблема имеет общий вывод с типом параметра. Присваивая числовые значения параметрическим значениям, можно определить формы препятствия, а также его расстояние от открытого ствола. В этом случае можно узнать коэффициент сжатия. В зависимости от типа степени сжатия изменяется скорость текущей жидкости. Влияет на массу жидкости, которая касается лопастей гидротурбины. Быстрое или медленное вращение лопастей имеет большое влияние на вырабатываемое электричество.

Ключевые слова: *щель, идеальной жидкости, вспомогательные параметры, невесомость, не сжимаемость, симметрия, ось, струй, скорость, комфортность.*

The problem of the plane of origin of an ideal incompressible and weightless fluid from a gap with obstacles on the axis of symmetry is investigated. The problem is solved by the method of N.E. Zhugovsky. One of the classical problems of hydrodynamics "Outflow from a gap between two planes" is generalized. The problem has a common conclusion with the parameter type. By assigning numerical values to parametric values, you can determine the shape of the obstacle, as well as its distance from the open hole. In this case, you can find out the compression ratio. The speed of the flowing fluid changes depending on the type of compression ratio. Affects the mass of fluid that touches the turbine blades. Fast or slow rotation of the blades has a large effect on the electricity generated.

Key words: *slit, ideal fluid, auxiliary parameters, weightlessness, non-compressibility, symmetry, axis, jets, speed, comfort.*

Исследуется плоская задача об истечении идеальной, несжимаемой и невесомой жидкости из щели, образованной двумя бесконечными плоскостями, расположенными под некоторым углом, на оси симметрии которого имеется препятствие в виде ромбы $'NMKM'$ (рис. 1). Данная задача является естественным обобщением известной задачи гидродинамики «Истечение из щели между двумя плоскостями» [1].

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Подобные задачи исследованы в некоторых работах Абдылдаева М.Ю. [2;4].
Задача решается методом Н. Е. Жуговского [1]:

$$\omega = ln\zeta = -\ln\frac{dw}{V_0 dZ} = -\ln\frac{U}{U_0} + i\theta \qquad (1)$$

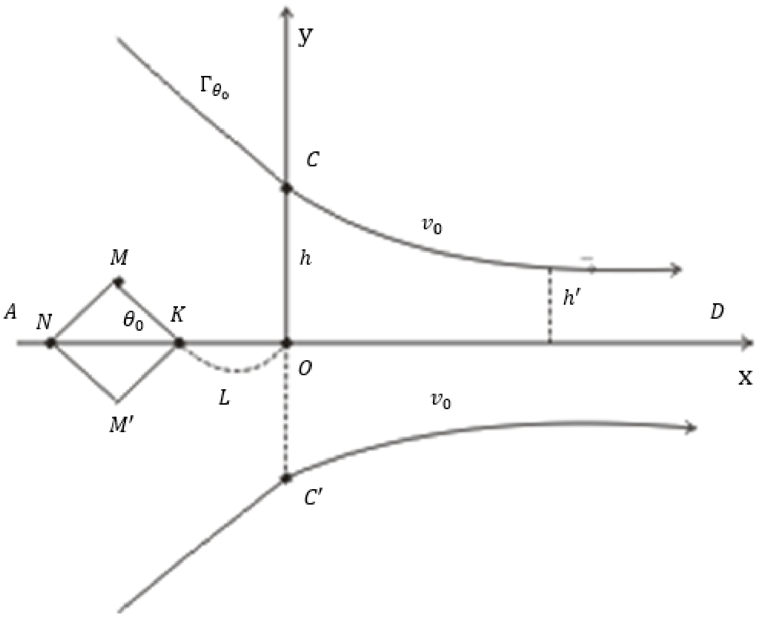

Рис. 1. Картинка течение в физической плоскости $z = x + iy$

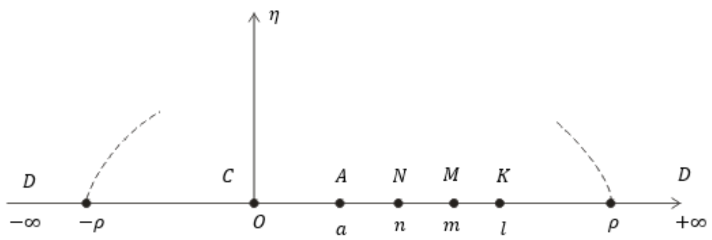

Рис. 2. Параметрическая плоскость $t = \xi + i\eta$

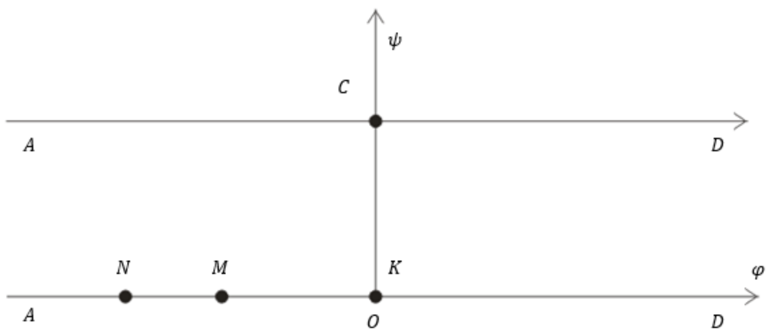

Рис. 3. Область изменение комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Для решение задачи отобразим верхнюю половину области течения $J_m Z \geq 0$ и соответствующие ей области изменения функций $dw/(v_0 dz)$ и w на верхнюю полуплоскости параметрического переменного $t(Jmt \geq 0)$ (рис. 2). Пусть на одной граничной линии тока $ANMKD$ функция тока $\psi = 0$, а на другой граничной лини тока ACD $\psi = q$. При движении вдоль линии тока потенциал скорости φ, очевидно, меняется от -∞ до +∞. На поверхности струй СД абсолютная величина скорости равно v_0. Таким образом, областью изменения w является полоса (рис3) шириной q, где расход жидкости. Отображение этой полосы на верхнюю полуплоскость переменного $t(Jmt \geq 0)$ осуществляется по формуле Кристоффеля-Шварца [1]:

$$w(t) = \frac{q}{\pi} ln \frac{t-a}{1-a} \tag{2}$$

Для установления правильности формулы (2) достаточно, проверить выполнение граничных условий. В промежутке ДСА($-\infty$<t<0; 0<t<a) имеем:

$$J_m w(t) = J_m \frac{q}{\pi} ln \frac{t+a}{1-a} = q;\ J_m w(t) = J_m \left[\frac{q}{\pi} ln \frac{a-t}{1-a}\right] = q.$$

На линях AN, NM, MK, KD:

$$J_m w(t) = J_m \frac{q}{\pi} ln \frac{t-a}{1-a} = 0.$$

На верхней полуплоскости $t(Jmt \geq 0)$ функция w аналитична.

Перейдем к определению комплексной скорости d$w/(v_0 dZ)$.

Для нахождения отображения области изменения ω, то есть для нахождения $\omega(t)$, введем вспомогательную функцию $F(t)$:

$$F(t) = \frac{\omega(t)}{\sqrt{t}} = -\frac{ln\, ^{v}/_{v_0}}{\sqrt{t}} + i\frac{\theta}{\sqrt{t}}$$

Для нашего случая: на участках AN(a<t<n) и КД(1< t <+∞)

$J_m \frac{w(t)}{\sqrt{t}} = 0$ $(\theta = 0)$, на участке ДС(-∞<t<0), t<0, следовательно $J_m \frac{w(t)}{\sqrt{t}}$ меняется на$R_e \frac{w(t)}{\sqrt{t}}$, где $v = v_0$, следовательно на этом участке $J_m \frac{F(t)}{\sqrt{t}} = 0$, на $NM(n < t < m)$ $J_m \frac{F(t)}{\sqrt{\xi}} = \theta_0$.

На линях CA(0<t<a) и MK(m<t<1) $J_m \frac{F(t)}{\sqrt{t}} = \frac{-\theta_0}{\sqrt{\xi}}$,

Функция F(t) определяется с помощью известного решения задачи об определении функции комплексного переменного в верхней полуплоскости по её заданной мнимой части [3]:

$$F(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_m F(\xi) d\xi}{\xi - t}. \tag{3}$$

Зная F(t) можно легко определить и

$$\omega\,(t) = F(t) \cdot \sqrt{t}\,. \tag{4}$$

Таким образом: для функции $\frac{\omega(t)}{\sqrt{t}}$ имеем:

$$\frac{\omega\,(t)}{\sqrt{t}} = -\frac{\theta_0}{\pi}\int_0^a \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}\,(\xi - t)} - \frac{\theta_0}{\pi}\int_m^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}\,(\xi - t)} + \frac{\theta_0}{\pi}\int_n^m \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}\,(\xi - t)}$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

После интегрировании получим:

$$\omega\,(t) = \frac{\theta_0}{\pi} ln \frac{\sqrt{t}+\sqrt{a}}{\sqrt{t-\sqrt{a}}} \cdot \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} * \left(\frac{\sqrt{m}-\sqrt{t}}{\sqrt{m}+\sqrt{t}}\right)^2 \frac{\sqrt{n}+\sqrt{t}}{\sqrt{n}-\sqrt{t}}. \tag{5}$$

Откуда

$$\zeta(t) = \left\{\frac{\sqrt{t}+\sqrt{a}}{\sqrt{t-\sqrt{a}}} \cdot \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \cdot \left(\frac{\sqrt{m}-\sqrt{t}}{\sqrt{m}+\sqrt{t}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{n}+\sqrt{t}}{\sqrt{n}-\sqrt{t}}\right\}^{\theta_0/\pi} \tag{6}$$

$$\xi^*(t) = \frac{dw}{v_{0dz}} = \left\{\frac{\sqrt{t}-\sqrt{a}}{\sqrt{t}+\sqrt{a}} \cdot \frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} \cdot \left(\frac{\sqrt{m}+\sqrt{t}}{\sqrt{m}-\sqrt{t}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{n}-\sqrt{t}}{\sqrt{n}+\sqrt{t}}\right\}^{\theta_0/\pi}. \tag{7}$$

При этом в формуле (7) обеспечено нужное соответствие характерных точек границы:

$$\zeta_C^*(0) = \left\{\begin{matrix} v = v_0 \\ \theta = -\theta_0 \end{matrix}\right\}, \zeta_A^*(a) = \{v = 0\}, \zeta_N^*(n) = \{v = 0\}, \quad \overset{*}{\zeta}_M(m)$$

$$\overset{*}{\zeta}_M(m) = \{v = \infty\}, \zeta_K^*(1) = \{v = 0\}, \zeta_D^*(+\infty) = \left\{\begin{matrix} v = v_0 \\ \theta = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Из формулы (7) и ${dw}/{dt} = \frac{q}{\pi} \cdot \frac{1}{t-a}$. получим:

$$Z(t) = \frac{q}{\pi v_0} \int_0^t \frac{1}{\zeta^*(t)} \cdot \frac{dt}{t-a} + ih$$

$$Z(t) = \frac{q}{\pi v_0} \cdot \int_0^t \left\{\frac{\sqrt{t}+\sqrt{a}}{\sqrt{t-\sqrt{a}}} \cdot \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \cdot \left(\frac{\sqrt{m}-\sqrt{t}}{\sqrt{m}+\sqrt{t}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{n}+\sqrt{t}}{\sqrt{n}-\sqrt{t}}\right\}^{\theta_0/\pi} \frac{dt}{t-a} + ih\,. \tag{8}$$

Формулы (2), (7) и (8) дают общее решение задачи в параметрической форме.

Так как $|NM| = |MK|, (l_1 = l_2)$

то $$\int_n^m \zeta(t) \frac{dt}{t-a} = \int_m^1 \zeta(t) \frac{dt}{t-a}. \tag{9}$$

Уравнение (9) устанавливает зависимости между параметрами a, n и m.

Полученные формулы позволяют найти наиболее интересную для данной задачи величину – коэффициент сжатия струи равный отношению ширины струи в бесконечности (h') к ширине отверстия в стенке ОС(h) (рис1).

Из рисунка 1 видно, что $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OC}$.

Для определения $L = |KO|$ и $h = |OC|$ рассмотрим изменение *Z(t)* от точки *К* до точки *C* (рис. 1).

$$L + ih = \frac{h'}{\pi}\left\{\int_1^0 \zeta(t) \cdot \frac{dt}{t-a}\right\}, \text{где } h' = \frac{q}{v_0}. \tag{10}$$

Преобразуем выражение (10) так, чтобы в него входили интегралы по отрезкам действительной оси t.

$$L + ih = \frac{h'}{\pi}\left\{\int_1^{p} \zeta(t) \frac{dt}{t-a} + \int_{\Gamma_\rho} \zeta(t) \frac{dt}{t-a} + \int_{-p}^{0} \zeta(t) \frac{dt}{t-a}\right\} \tag{11}$$

Здесь Γ_ρ полуокружность радиуса ρ с центром в начале координат (рис. 1).

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 10, 2020

Введем обозначения:

$$J_1=\int_1^p \zeta(t)\frac{dt}{t-a};\ J_2=\int_{\Gamma_\rho}\zeta(t)\frac{dt}{t-a};J_3=\int_{-p}^0\zeta(t)\frac{dt}{t-a} \quad (12)$$

При ρ→∞ интеграл J_2. принимает значение $J_2 = i\pi$.

В формуле J_3 при $-t=\tau$, $(\tau \geq 0)$ модуль $|\zeta(\tau)|=1$, а аргумент определяется следующим образом:

$$J_3=-\int_0^\rho e^{iA^*(\tau)}\frac{d\tau}{\tau+a}=-\int_0^\rho\{cosA^*+isinA^*\}\frac{d\tau}{\tau+a}.$$

$$A^*(\tau)=\frac{\theta_0}{\pi}\left\{\pi+2arctg\sqrt{\tau/a}+2arctg\sqrt{\tau}-4arctg\sqrt{\tau/m}+2arctg\sqrt{\tau/n}\right\}. \quad (13)$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} ReJ_3&=-\int_0^\rho cos[-A^*(\tau)]\frac{d\tau}{\tau+a}\\ J_mJ_3&=\int_0^\rho \sin[-A^*(\tau)]\frac{d\tau}{\tau+a}\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Первый интеграл при $\rho\to\infty$ существует, ограничен и действителен. Подставляя в выражение (11) значения интегралов J_1, J_2, J_3, для L и h имеем:

$$L=Re\int_1^0\frac{dz}{dt}dt=\frac{h'}{\pi}\left\{\int_1^p\zeta(t)\frac{dt}{t+a}-\int_0^\rho cos[-A^*(\tau)]\frac{d\tau}{\tau+a}\right\} \quad (15)$$

$$h=J_m\int_1^0\frac{dz}{dt}dt=h'\left\{1+\frac{1}{\pi}\int_0^\rho \sin[-A^*(\tau)]\frac{d\tau}{\tau+a}\right\} \quad (16)$$

Коэффициент сжатия струн для данной задачи находим из (16):

$$К_0=\frac{2h'}{2h}=\frac{\pi}{\pi+\int_0^\infty Sin[-A^*(\tau)]\bullet\frac{d\tau}{\tau+a}} \quad (17)$$

Рассмотрим частные случаи:

I. Пусть $a=n=m=1$, то есть отсутствует припятствие. Формула (17) в предельном течении совпадает с формулой коэффициента сжатия струн в задаче «Истечение из щели между двумя плоскостями» [1]:

$$К_0=\frac{\pi}{\pi+\int_0^\pi ctg\frac{\sigma}{2}\bullet sin\eta\sigma\bullet d\sigma} \quad (18)$$

Действительно, при $a=n=m=1$ формула (17) принимает вид:

$$К_0=\frac{\pi}{\pi+\int_0^\infty SinB_0{}^*\frac{d\tau}{\tau+1}} \quad (19)$$

где B^*=$2\eta\left(\pi/2+arctg\sqrt{\tau}\right),(\theta_0=\eta\pi)$.

Обозначим $\pi/2+arctg\sqrt{\tau}=\frac{\sigma}{2}$, откуда

$$\tau=1/tg^2\,\sigma/2=ctg^2\,\sigma/2;\ d\tau=-ctg\frac{\sigma}{2}\left[sin^2\,\sigma/2\right]^{-1}d\sigma.$$

Подставляя значения τ и $d\tau$ в интеграл в формулу (19), получаем

$$\int_0^\infty SinB_0{}^*\frac{d\tau}{\tau+1}=\int_0^\pi ctg\frac{\sigma}{2}\sin\mu\sigma d\sigma$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Следовательно, имеем формулу (18).

II. Пусть $a = n = m = 1, \theta_0 = -\pi/2, \left(\eta = -\frac{1}{2}\right)$.

При этом имеем задачи «Истечение струн из отверстия в плоскости» [1].

$$A^*(\tau) = \left(\pi/2 + arctg\sqrt{\tau}\right).$$
$$Sin[-A^*] = 1/\sqrt{1+\tau}.$$

$$К_0 = \frac{\pi}{\pi - \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+\tau}} \cdot \frac{d\tau}{1+\tau}} = -\frac{\pi}{\pi - \int_0^\infty \frac{d\tau}{(1+\tau)^{3/2}}}$$

Интеграл равен $\int_0^\infty \frac{d\tau}{(1+\tau)^{3/2}} = 2$.

Таким образом, коэффициент сжатия в этом случая будет $К_0 = \frac{\pi}{\pi+2} \approx 0{,}61$.

III. При $a = n = m = 1$ и $\eta = -1$ $(\theta_0 = -\pi)$, получается Насадки Борда. Формула (17) в этом случае имеет значения: $К_0 = 0{,}5$.

Далее найдем уравнение свободной поверхности СД$(-\infty < t < 0)$. Интегрируя уравнение (8) вдоль этой линии, и отделив действительную и мнимую части , найдем уравнение линии тока СД в параметрическом виде. Вдоль этой линии тока СД t действительно и изменяется от ноля до $-\infty$, поэтому, представив в (8) $-t = \tau$ $(\tau \geq 0)$ получим:

$$x(\tau) = \frac{h'}{\pi}\int_0^\tau cos[A^*(\tau)]\frac{d\tau}{\tau+a}; y(\tau) = h + \frac{h'}{\pi}\int_0^\tau sin[A^*(\tau)]\frac{d\tau}{\tau+a}. \quad (20)$$

Здесь аргумент $A^*(\tau)$ определяется по формуле(13).

Литература:

1. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. Гос. издат. физ.-мат. литературы. - Москва, 1961.
2. Абдылдаев М.Ю. «Из течения из щели между двумя плоскостями при наличии пластины на оси щели. // Изд. АН УССР. Серия Технические науки, №6. - 1968.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории струи комплексного переменного. - Москва: «Наука», 1973.
4. Абдылдаев М.Ю. Плоские задачи теории струй идеальной жидкости. НАН Кыргызской Республики. Институт автоматики. - Бишкек: «Илим», 1999.