

Таалайбеков Н.Т.

**ҮЧ МҮНӨЗДӨӨЧҮСҮ БАР ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ҮЗҮЛҮҮГӨ
ЭЭ КОЭФФИЦИЕНТТҮҮ ГИПЕРБОЛИКАЛЫК ТЕНДЕМЕЛЕР
ҮЧҮН ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕЛЕРДИ ЖАЛПЫЛОО**

Таалайбеков Н.Т.

**ОБ ОБОБЩЕНИЯХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ТРЕХКРАТНЫМИ
ХАРАКТЕРИСТИКАМИ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

N.T. Taalaybekov

**ON GENERALIZATIONS BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR
FOURTH ORDER HYPERBOLIC EQUATIONS WITH THREE FOLD
CHARACTERISTICS WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS**

УДК: 517.95

Математикалык физиканын көпчүлүк маселелеринде, мисалы, газдардын динамикасын, дифракция процесстерин, көп катмарлуу жер алдындагы суулардын кыймылы, материалдын жогорку катмарынын бууланышына энергия агымынын таасир этишинин математикалык моделдерин тургузуп изилдөөдө келип зарылчылыктан төртүнчү тартиптеги үзүлүүгө ээ коэффициенттүү гиперболикалык теңдемелер үчүн чек аралык маселелерди чечүүгө, изилдөөгө келтирилет. Бул макалада үч мүнөздөөчүсү бар төртүнчү тартиптеги гиперболикалык теңдеме үчүн коэффициенттери биринчи роддогу үзүлүүлөргө ээ болгон чек аралык маселелерди жалпылап изилдөө каралган. Макаланын негизги максаты коэффициенттери биринчи роддогу үзүлүүлөргө ээ болгон чек аралык маселелердин коррективдүүлүгүн Риман функциясы усулунун жардамында далилдөөнү демонстрациялоо болуп саналат. Риман функциясы усулунун жардамында коюлган маселелер жалгыз гана чечими жашаган Вольтерра тибиндеги II роддогу интегралдар системасына келтирилген. Коюлган маселенин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы далилденген.

Негизги сөздөр: гиперболикалык теңдеме, үзүлүү, Риман функциясы, интегралдык теңдеме, Гурстун маселеси, Кошинин маселеси, чечимдин жашашы, чечимдин жагыдыгы, жалгашуу шарты, баштапкы шарт.

Многие задачи математической физики, возникающие при моделировании около звуковой и сверх звуковой газовой динамики, без моментной теории оболочек, диффузии многих процессов в химической и биологической кинетике и в других. Эти проблемы приводят к необходимости решения краевых задач для уравнения гиперболического типа с разрывными коэффициентами. В статье рассматриваются обобщение краевых задач для гиперболических уравнений четвертого порядка с разрывными коэффициентами. Основной целью статьи является демонстрация метода функции Римана, позволяющего доказать разрешимости краевых задач, когда коэффициенты терпят разрывы первого рода. Рассмотренные задачи приведены к задачам Гурса и с помощью метода функции Римана сведены к системе интегральных уравнений Вольтерра II рода. Применяя метод последовательных приближений к системе интегральных уравнений Вольтерра II рода, доказаны существование и единственность решений поставленных задач.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, разрывы функций, функция Римана, интегральное уравнение, задача Гурса, задача Коши, единственность решение, существование решение, начальная условия, краевые условия, условия склеивания.

Many problems of mathematical physics that arise when modeling transonic and supersonic gas dynamics without the moment theory of shells and diffusion. many processes in chemical and biological kinetics and others. These problems lead to the need to solve boundary value problems for a hyperbolic equation with discontinuous coefficients. The article deals with the generalized boundary value problem for hyperbolic equations of the fourth order with discontinuous coefficients. The main purpose of the article is to demonstrate the method of the Riemann function, which allows us to prove the solvability of boundary value problems when the coefficients suffer discontinuities of the first kind. The considered problems are reduced to the Goursat problems and reduced to a system of Volterra integral equations of the second kind using the Riemann function method. Applying the method of successive approximations to the system of Volterra integral equations of the second kind, the existence and uniqueness of solutions to the problems are proved.

Key words: hyperbolic equation, Rymann function, discontinuities of functions, Riemann function, integral equation, Gurs problem, Cauchy problem, uniqueness of solution, existence of solution, initial conditions, boundary conditions, conditions of bonding.

Введение. Изучение краевых задач для гиперболических уравнений четвертого порядка является одной из актуальных проблем теории дифференциальных уравнений с частными производными. Причиной этому, исключительная практическая важность гиперболических уравнений четвертого порядка. К гиперболическим уравнениям четвертого порядка и системам уравнений приводят математическое описание многих сложных явлений в современном естествознании. Краевые задачи с негладкими коэффициентами для уравнения четвертого порядка гиперболического типа являются одним из классических объектов исследования. Теории таких задач посвящены, например, научные труды Т.Джураева, А.Сопуева [1].

Настоящая статья посвящена исследованию разрешимости краевых задач для гиперболических уравнений четвертого порядка, коэффициенты которого терпят разрывы первого рода при переходе через линии $x = x_i$,

$$0 < x < \ell, i = \overline{1,2}, x_0 = 0, x_3 = \ell.$$

Краевые задачи для уравнений гиперболического типа четвертого порядка, коэффициенты которого терпят разрыв первого рода при переходе через линии $x = x_1, 0 < x < \ell$ были предметом исследований в работах А. Сопуева [1], Т.Д. Асылбекова [2,3], в которых рассмотрены задачи Гурса для общего гиперболического уравнения четвертого порядка с двукратными и трехкратными характеристиками. Нелокальные задачи с разрывными коэффициентами для гиперболических уравнений четвертого порядка изучены в работах [4-6].

В данной статье методом функции Римана задачи сведены к системам интегральных уравнений и доказываются разрешимости решения краевых задач для уравнения гиперболического типа четвертого порядка с трехкратными характеристиками, когда коэффициенты терпят разрывы первого рода в две и более точек.

Постановка задачи. В области $D = \{0 < x < \ell, 0 < y < h\}$

где $D = \bigcup_{i=0}^2 D_i, D_i = \{(x, y): x_i < x < x_{i+1}, 0 < y < h\}, x_0 = 0, x_3 = \ell, i = \overline{0,2}, x_0 < x_1 < x_2 < x_3$ для гиперболического уравнения четвертого порядка, коэффициенты которого терпят разрывы первого рода при переходе через линии $x = x_i, 0 < x < \ell, i = \overline{1,2}$.

$$L(u) \equiv u_{xxxy}(x, y) + \alpha_1(x, y)u_{xxx}(x, y) + \alpha_2(x, y)u_{xxy}(x, y) + \beta_1(x, y) \times \\ \times u_{xx}(x, y) + \beta_2(x, y)u_{xy}(x, y) + \gamma_1(x, y)u_x(x, y) + \gamma_2(x, y)u_y(x, y) + \delta(x, y)u(x, y) = f(x, y), \quad (1)$$

где

$$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta, f \in C(\bar{D}), i = 1, 2, \quad (2)$$

$$M = \{u, u_x, u_{xx} \in C(\bar{D}), u_y, u_{xy}, u_{xxx}, u_{xxy} \in C(D)\},$$

рассмотрим краевые задачи с разрывными коэффициентами.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области $D \setminus (x = x_i, i = \overline{1,2})$ удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(0, y) = \varphi_1(y), u_x(0, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, y \in D_0, \quad (3)$$

$$u(\ell, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq h, y \in D_2, \quad (4)$$

начальным условиям:

$$u(x, 0) = \psi_j(x), x_i \leq x \leq x_{i+1}, x_0 = 0, x_3 = \ell, \text{ в } D_i, i = \overline{0,2}, j = \overline{0,2}, \quad (5)$$

условиями сопряжения на линии разрыва коэффициентов:

$$u(x_i - 0, y) = u(x_i + 0, y) = \tau_i(y), i = 1, 2, \quad (6)$$

$$u_x(x_i - 0, y) = u_x(x_i + 0, y) = v_i(y), \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

$$u_{xx}(x_i - 0, y) = u_{xx}(x_i + 0, y) = \mu_i(y), \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

где $\psi_j(x)$, $j = \overline{0, 2}$, $\varphi_k(y)$, $k = \overline{1, 3}$, – заданные гладкие функции, причем

$$\begin{aligned} \psi_j(x_i) = \tau_i(0), \quad \psi'_j(x_i) = v_i(0), \quad \psi''_j(x_i) = \mu_i(0), \quad \text{в } D_j, j = \overline{0, 1}, i = 1, \\ \text{а в } D_2, j = 2, i = 2. \end{aligned} \quad (9)$$

Разрешимость задачи докажем методом функции Римана.

Решение задачи ищем в виде: $u = u_i$, в D_i , $i = \overline{0, 2}$.

Пусть коэффициенты уравнения (1) кроме условий (2) удовлетворяют еще условиям

$$\alpha_{1xxx}, \alpha_{2xx}, \beta_{1xx}, \beta_{2xy}, \gamma_{1x}, \gamma_{2y} \in \overline{D} \setminus (x = x_i, i = 1, 2), \quad (10)$$

Функция Римана. Сначала в области D_0 рассмотрим вспомогательную задачу для уравнения (1) с условиями (10), $\psi_j(x), j = 0$,

$$u(x_1 - 0, y) = \tau_1(y), \quad u_x(x_1 - 0, y) = v_1(y), \quad u_{xx}(x_1 - 0, y) = \mu_1(y).$$

тогда определен формально сопряженный оператор $L^*(v)$ и имеет тождество, которое запишем в переменных:

$$vL(u) - uL^*(v) = \frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} L^*(v_0) &= v_{0\xi\xi\xi\eta} - (\alpha_1 v_0)_{\xi\xi\xi} - (\alpha_2 v_0)_{\xi\xi\eta} - (\beta_1 v_0)_{\xi\xi} - (\beta_2 v_0)_{\xi\eta} - (\gamma_1 v_0)_\xi - \\ &- (\gamma_2 v_0)_\eta + \delta v_0, P = [v_{0\xi\xi\xi} - (\alpha_2 v_0)_{\xi\xi} - (\beta_2 v_0)_\xi - \gamma_2 v_0] u, \\ Q &= v_0 u_{\xi\xi\eta} + \alpha_1 v_0 u_{\xi\xi} + [-v_{0\xi} + \alpha_2 v_0] u_{\xi\eta} + [-(\alpha_1 v_0)_\xi + \beta_1 v_0] u_\xi + \\ &+ [v_{0\xi\xi} - (\alpha_2 v_0)_\xi + \beta_2 v_0] u_\eta + [(\alpha_2 v_0)_{\xi\xi} - (\beta_1 v_0)_\xi + \gamma_1 v_0] u. \end{aligned}$$

Функцией Римана оператора L в области D_0 назовем функцию $v_0(x, y; \xi, \eta)$, удовлетворяющую условиям [2]:

3) Функция $v_0(x, y; \xi, \eta) \in M$ по совокупности переменных $(x, y; \xi, \eta)$ на $\overline{D_0} \times \overline{D_0}$;

4) при каждой $(x, y) \in \overline{D_0}$ функция $v_0(x, y; \xi, \eta)$ удовлетворяет уравнению

$$L^*_{(\xi, \eta)}(v_0(x, y; \xi, \eta)) = 0, \quad (\xi, \eta) \in D_0, \quad (12)$$

и условиям на характеристиках $\xi = x$, $\eta = y$

$$\begin{cases} v_0(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} = 0, \quad v_{0\xi}(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} = 0, \quad 0 \leq \eta \leq y, \\ v_{0\xi\xi}(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} = \exp\left(\int_y^\eta \alpha_1(x, \eta_1) d\eta_1\right), \quad 0 \leq \eta \leq y, \\ v_0(x, y; \xi, y) = \omega(x, y, \xi), \quad 0 \leq \xi \leq x, \end{cases} \quad (13)$$

где $\omega(x, y, \xi)$ – решение следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} v_{0\xi\xi\xi}(x, y; \xi, y) - \alpha_2(\xi, y)v_{0\xi\xi}(x, y; \xi, y) + [\beta_2(\xi, y) - 2\alpha_{2\xi}(\xi, y)] \times \\ \times v_{0\xi}(x, y; \xi, y) + [\beta_{2\xi}(\xi, y) - 2\alpha_{2\xi\xi}(\xi, y) - \gamma_2(\xi, y)]v_{0\xi}(x, y; \xi, y) = 0, \end{aligned}$$

$$0 < \xi < x \quad (14)$$

$$v_0(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 0, \quad v_{0\xi}(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 0, \quad v_0(x, y; x, y) = 1. \quad (15)$$

Очевидно, что решение задачи Коши (14)-(15) существует и единственно. Тогда задачи типа Гурса (1), (5)-(10) ($i = 1, j = 0$) имеет единственное решение[2].

Через произвольную точку $(x, y) \in D_0$, проведем характеристическую линии $\xi = x, \eta = y$ тогда образуется характеристический прямоугольник с вершинами $A_1(x, 0), B_1(x_1, 0), C_1(x_1, y), D_1(x, y)$.

Проинтегрировав (11) по контуру характеристическому прямоугольнику и учитывая (1), и условия (5)-(8), (10)

($i = 1, j = 0$) в области D_0 имеем:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) = & v_{0\xi\xi}(x, y; x, 0)\psi_0(x) - \int_{x_1}^x A_1(x, y, \xi)\psi_0(\xi)d\xi + \\ & + \int_0^y [v_0(x, y; x_1, \eta)\mu'_1(\eta) + \alpha_1(x_1, \eta)v_0(x, y; x_1, \eta)\mu_1(\eta) - B_1(x, y, \eta)v'_1(\eta) + \\ & + C_1(x, y, \eta)v_1(\eta) + D_1(x, y, \eta)\tau'_1(\eta) + E_1(x, y, \eta)\tau_1(\eta)]d\eta - \\ & - \int_{x_1}^x d\xi \int_0^y v_0(x, y; \xi, \eta)f(\xi, \eta)d\eta, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(x, y, \xi) = & v_{0\xi\xi\xi}(x, y; \xi, 0) - \alpha_{2\xi\xi}(\xi, 0)v_0(x, y; \xi, 0) - 2\alpha_{2\xi}(\xi, 0) \times \\ & \times v_{0\xi}(x, y; \xi, 0) - \alpha_2(\xi, 0)v_{0\xi\xi}(x, y; \xi, 0) + \beta_{2\xi}(\xi, 0)v_0(x, y; \xi, 0) + \\ & + \beta_2(\xi, 0)v_{0\xi}(x, y; \xi, 0) - \gamma_2(\xi, 0)v_0(x, y; \xi, 0), \\ B_1(x, y, \eta) = & v_{0\xi}(x, y; x_1, \eta) + \alpha_{2\xi}(x_1, \eta)v_0(x, y; x_1, \eta), \\ C_1(x, y, \eta) = & -\alpha_{1\xi}(x_1, \eta)v_0(x, y; x_1, \eta) - \alpha_1(x_1, \eta)v_{0\xi}(x, y; x_1, \eta) + \\ & + \beta_1(x_1, \eta)v_0(x, y; x_1, \eta), \\ D_1(x, y, \eta) = & v_{0\xi\xi}(x, y; x_1, \eta) + \alpha_{2\xi}(x_1, \eta)v_1(x, y; x_1, \eta) - \\ & - \alpha_2(x_1, \eta)v_{0\xi}(x, y; x_1, \eta) + \beta_2(x_1, \eta)v_0(x, y; x_1, \eta), \\ E_1(x, y, \eta) = & \alpha_{1\xi\xi}(x_1, \eta)v_0(x, y; x_1, \eta) + 2\alpha_{1\xi}(x_1, \eta)v_{0\xi}(x, y; x_1, \eta) + \\ & + \alpha_1(x_1, \eta)v_{0\xi\xi}(x, y; x_1, \eta) - \beta_{1\xi}(x_1, \eta)v_0(x, y; x_1, \eta) - \beta_1(x_1, \eta) \times \\ & \times v_{0\xi}(x, y; x_1, \eta) + \gamma_1(x_1, \eta)v_0(x, y; x_1, \eta). \end{aligned}$$

Формула (16) является представлением общего решения уравнения (1) с условиями (5) - (10) ($i = 1, j = 0$) в области D_0 , где $\tau_1(\eta), v_1(\eta), \mu_1(\eta)$ - пока неизвестные функции.

Аналогично построив функции Римана, найдено решение вспомогательной задачи в области D_1 для уравнения (1) с условиями (5)-(10) ($i = 1, j = 1$) в виде:

$$u_1(x, y) = v_{1\xi\xi}(x, y; x, 0)\psi_1(x) - \int_{x_1}^x A_2(x, y, \xi)\psi_1(\xi)d\xi +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^y [v_1(x, y; x_1, \eta) \mu_1'(\eta) + \alpha_1(x_1, \eta) v_1(x, y; x_1, \eta) \mu_1(\eta) - B_2(x, y, \eta) v_1'(\eta) + \\
& + C_2(x, y, \eta) v_1(\eta) + D_2(x, y, \eta) \tau_1'(\eta) + E_2(x, y, \eta) \tau_1(\eta)] d\eta - \\
& - \int_{x_1}^x d\xi \int_0^y v_1(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\eta,
\end{aligned} \tag{17}$$

Формула (17) является представлением общего решения уравнения (1) с условиями (5)-(10) ($i = 1$, $j = 0$) в области D_1 , где $\tau_1(\eta)$, $v_1(\eta)$, $\mu_1(\eta)$ - пока неизвестные функции.

Аналогично построив функции Римана, найдено решение вспомогательной задачи в области D_1 для уравнения (1) с условиями (5)-(10) ($i = 2$, $j = 1$) в виде:

$$\begin{aligned}
u_1(x, y) &= v_{1\xi\xi}(x, y; x, 0) \psi_1(x) - \int_{x_2}^x A_3(x, y, \xi) \psi_1(\xi) d\xi + \\
& + \int_0^y [v_1(x, y; x_2, \eta) \mu_2'(\eta) + \alpha_1(x_2, \eta) v_1(x, y; x_2, \eta) \mu_2(\eta) - B_3(x, y, \eta) v_2'(\eta) + \\
& + C_3(x, y, \eta) v_2(\eta) + D_3(x, y, \eta) \tau_2'(\eta) + E_3(x, y, \eta) \tau_2(\eta)] d\eta - \\
& - \int_{x_2}^x d\xi \int_0^y v_1(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\eta,
\end{aligned} \tag{18}$$

Формула (18) является представлением общего решения уравнения (1) с условиями (5)-(10) ($i = 2$, $j = 1$) в области D_1 , где $\tau_2(\eta)$, $v_2(\eta)$, $\mu_2(\eta)$ - пока неизвестные функции.

Аналогично построив функции Римана, найдено решение вспомогательной задачи в области D_2 для уравнения (1) с условиями (5)-(10) ($i = 2$, $j = 2$) в виде:

$$\begin{aligned}
u_2(x, y) &= v_{2\xi\xi}(x, y; x, 0) \psi_2(x) - \int_{x_2}^x A_4(x, y, \xi) \psi_2(\xi) d\xi + \\
& + \int_0^y [v_2(x, y; x_2, \eta) \mu_2'(\eta) + \alpha_1(x_2, \eta) v_2(x, y; x_2, \eta) \mu_2(\eta) - B_4(x, y, \eta) v_2'(\eta) + \\
& + C_4(x, y, \eta) v_2(\eta) + D_4(x, y, \eta) \tau_2'(\eta) + E_4(x, y, \eta) \tau_2(\eta)] d\eta - \\
& + \int_{x_2}^x d\xi \int_0^y v_2(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\eta,
\end{aligned} \tag{19}$$

Формула (19) является представлением общего решения уравнения (1) с условиями (5)-(10) ($i = 2$, $j = 2$) в области D_2 , где $\tau_2(\eta)$, $v_2(\eta)$, $\mu_2(\eta)$ - пока неизвестные функции.

Сведение задачи 1 к системе интегральных уравнений. Применив интегрирование по частям, воспользовавшись условиям (3), условиям согласования (9) ($j = 0$), положив $x = 0$ и обозначив через $g_1(y)$ все известные функции из (16) имеем:

$$\begin{aligned}
& v_0(0, y; x_1, y) \mu_1(y) - B_1(0, y, y) v_1(y) + D_1(0, y, y) \tau_1(y) - \\
& - \int_0^y [(v_{0\eta}(0, y; x_1, \eta) + \alpha_1(x_1, \eta) v_0(0, y; x_1, \eta)) \mu_1(\eta) - (B_{1\eta}(0, y, \eta) - \\
& - C_1(0, y, \eta)) v_1(\eta) + (D_{1\eta}(0, y, \eta) + E_1(0, y, \eta)) \tau_1(\eta)] d\eta = g_1(y), \quad (20)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
g_1(y) = & \varphi_1(y) - v_{0\xi\xi}(0, y; 0, 0) \psi_0(0) + \int_{x_1}^0 A_1(0, y, \xi) \psi_0(\xi) d\xi + \\
& + v_0(0, y; x_1, 0) \mu_1(0) - B_1(0, y, 0) v_1(0) + D_1(0, y, 0) \tau_1(0) + \\
& + \int_{x_1}^0 d\xi \int_0^y v_0(0, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\eta, \\
& \psi_0(x_1) = \tau_1(0), \quad \psi'_0(x_1) = v_1(0), \quad \psi''_0(x_1) = \mu_1(0).
\end{aligned}$$

Дифференцируя (16) по x , применив интегрирование по частям, воспользовавшись условиям (3), условиям согласования (9) ($j = 0$), положив $x = 0$ и обозначив через $g_2(y)$ все известные функции из (16) имеем:

$$\begin{aligned}
& v_{0x}(0, y; x_1, y) \mu_1(y) - B_{1x}(0, y, y) v_1(y) + D_{1x}(0, y, y) \tau_1(y) - \\
& - \int_0^y [(v_{0\eta x}(0, y; x_1, \eta) + \alpha_1(x_1, \eta) v_{0x}(0, y; x_1, \eta)) \mu_1(\eta) - (B_{1\eta x}(0, y, \eta) - \\
& - C_{1x}(0, y, \eta)) v_1(\eta) + (D_{1\eta x}(0, y, \eta) + E_{1x}(0, y, \eta)) \tau_1(\eta)] d\eta = g_2(y), \quad (21) \\
& \text{где} \\
g_2(y) = & \varphi_2(y) - v_{0\xi\xi x}(0, y; 0, 0) \psi_0(0) - v_{0\xi\xi}(0, y; 0, 0) \psi'_0(0) + \\
& + \int_{x_1}^0 A_{1x}(0, y, \xi) \psi_0(\xi) d\xi + A_1(0, y, 0) \psi_0(0) + v_{0x}(0, y; x_1, 0) \mu_1(0) - \\
& - B_{1x}(0, y, 0) v_1(0) + D_{1x}(0, y, 0) \tau_1(0) + \int_{x_1}^0 d\xi \int_0^y v_{0x}(0, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\eta + \\
& + \int_0^y v_{0x}(0, y; 0, \eta) f(0, \eta) d\eta, \\
& \psi_0(x_1) = \tau_1(0), \quad \psi'_0(x_1) = v_1(0), \quad \psi''_0(x_1) = \mu_1(0).
\end{aligned}$$

Применив интегрирование по частям, обозначив через $g_3(y)$ все известные функции из (17), (18) получим соотношение относительно пока неизвестных функций $\tau_1(\eta)$, $v_1(\eta)$, $\mu_1(\eta)$, $\tau_2(\eta)$, $v_2(\eta)$, $\mu_2(\eta)$ в области D_1 .

$$\begin{aligned}
& v_1(x, y; x_1, \eta) \mu_1(\eta) - B_2(x, y, \eta) v_1(\eta) + D_2(x, y, \eta) \tau_1(\eta) + v_1(x, y; x_2, \eta) \times \\
& \times \mu_2(\eta) - B_3(x, y, \eta) v_2(\eta) + D_3(x, y, \eta) \tau_2(\eta) - \int_0^y [(v_{1\eta}(x, y; x_1, \eta) + \\
& + \alpha_1(x_1, \eta) v_1(x, y; x_1, \eta)) \mu_1(\eta) - (B_{2\eta}(x, y, \eta) - C_2(x, y, \eta)) v_1(\eta) +
\end{aligned}$$

$$+D_{2\eta}(x, y, \eta) + E_2(x, y, \eta))\tau_1(\eta) + (v_{1\eta}(x, y; x_2, \eta) + \alpha_1(x_2, \eta) \times \\ \times v_1(x, y; x_2, \eta))\mu_2(\eta) - (B_{3\eta}(x, y, \eta) - C_3(x, y, \eta))v_2(\eta) + (D_{3\eta}(x, y, \eta) + \\ + E_3(x, y, \eta))\tau_2(\eta)]d\eta = g_3(x, y), \quad (22)$$

где

$$g_3(x, y) = \int_{x_1}^x A_2(x, y, \xi)\psi_1(\xi)d\xi + \int_{x_2}^x A_3(x, y, \xi)\psi_1(\xi)d\xi + \\ + \int_{x_1}^x d\xi \int_0^y v_1(x, y; \xi, \eta)f(\xi, \eta)d\eta + \int_{x_2}^x d\xi \int_0^y v_1(x, y; \xi, \eta)f(\xi, \eta)d\eta.$$

Применив интегрирование по частям, воспользовавшись условиям (6) ($i = 1$), условиям согласования (9) ($j = 1$), положив $x = x_1 + 0$ и обозначив через $g_4(y)$ все известные функции из (18) имеем:

$$-\tau_1(y) + v_1(x_1, y; x_2, y)\mu_2(y) - B_3(x_1, y, y)v_2(y) + D_3(x_1, y, y)\tau_2(y) - \\ - \int_0^y [(v_{1\eta}(x_1, y; x_2, \eta) + \alpha_1(x_2, \eta)v_1(x_1, y; x_2, \eta))\mu_2(\eta) - (B_{3\eta}(x_1, y, \eta) - \\ - C_3(x_1, y, \eta))v_2(\eta) + (D_{3\eta}(x_1, y, \eta) + E_3(x_1, y, \eta))\tau_2(\eta)]d\eta = g_4(y), \quad (23)$$

где

$$g_4(y) = -v_{1\xi\xi}(x_1, y; x_1, 0)\psi_1(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} A_3(x_1, y, \xi)\psi_1(\xi)d\xi + \\ + v_{1x_2}(x_1, y; x_2, 0)\mu_1(0) - B_3(x_1, y, 0)v_2(0) + D_3(x_1, y, 0)\tau_2(0) - \\ - \int_{x_1}^{x_2} d\xi \int_0^y v_1(x_1, y; \xi, \eta)f(\xi, \eta)d\eta, \\ \psi_1(x_2) = \tau_2(0), \quad \psi_1'(x_2) = v_2(0), \quad \psi_1''(x_2) = \mu_2(0).$$

Дифференцируя (18) по x , применив интегрирование по частям, воспользовавшись условиям (7) ($i = 1$), условиям согласования (9) ($j = 1$), положив $x = x_1 + 0$ и обозначив через $g_4(y)$ все известные функции из (18) имеем:

$$-v_{1y}(y) + v_{1x}(x_1, y; x_2, y)\mu_2(y) - B_{3x}(x_1, y, y)v_2(y) + D_{3x}(x_1, y, y)\tau_2(y) - \\ - \int_0^y [(v_{1\eta x}(x_1, y; x_2, \eta) + \alpha_1(x_2, \eta)v_{1x}(x_1, y; x_2, \eta))\mu_2(\eta) - (B_{3\eta x}(x_1, y, \eta) - \\ - C_{3x}(x_1, y, \eta))v_2(\eta) + (D_{3\eta x}(x_1, y, \eta) + E_{3x}(x_1, y, \eta))\tau_1(\eta)]d\eta = g_5(y), \quad (24)$$

где

$$g_5(y) = -v_{1\xi\xi x}(x_1, y; x_1, 0)\psi_1(x_1) - v_{1\xi\xi}(x_1, y; x_1, 0)\psi_1'(x_1) - \\ - \int_{x_1}^{x_2} A_{3x}(x_1, y, \xi)\psi_1(\xi)d\xi - A_3(x_1, y, x_1)\psi_1(x_1) + v_{1x}(x_1, y; x_2, 0)\mu_2(0) -$$

$$\begin{aligned}
& -B_{3x}(x_1, y, 0)v_1(0) + D_{3x}(x_1, y, 0)\tau_2(0) - \int_{x_1}^{x_2} d\xi \int_0^y v_{1x}(x_1, y; \xi, \eta)f(\xi, \eta)d\eta + \\
& + \int_0^y v_{1x}(x_1, y; x_1, \eta)f(x_1, \eta)d\eta, \\
& \psi_1(x_2) = \tau_2(0), \quad \psi'_1(x_2) = v_2(0), \quad \psi''_1(x_2) = \mu_2(0).
\end{aligned}$$

Применив интегрирование по частям, воспользовавшись условиям (4), условиям согласования (9) ($j = 2$), положив $x = \ell$ и обозначив через $g_6(y)$ все известные функции из (19) имеем:

$$\begin{aligned}
& v_2(\ell, y; x_2, y)\mu_2(y) - B_3(\ell, y, y)v_2(y) + D_3(\ell, y, y)\tau_2(y) - \\
& - \int_0^y [(v_{2\eta}(\ell, y; x_2, \eta) + \alpha_1(x_2, \eta)v_2(\ell, y; x_2, \eta))\mu_2(\eta) - (B_{3\eta}(\ell, y, \eta) - \\
& - C_3(\ell, y, \eta))v_2(\eta) + (D_{3\eta}(\ell, y, \eta) + E_3(\ell, y, \eta))\tau_2(\eta)]d\eta = g_6(y),
\end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned}
& g_6(y) = \varphi_3(y) - v_{2\xi\xi}(\ell, y; \ell, 0)\psi_2(0) + \int_{x_2}^{\ell} A_3(\ell, y, \xi)\psi_2(\xi)d\xi + \\
& + v_2(\ell, y; x_2, 0)\mu_2(0) - B_3(\ell, y, 0)v_2(0) + D_3(\ell, y, 0)\tau_2(0) + \\
& + \int_{x_2}^{\ell} d\xi \int_0^y v_2(\ell, y; \xi, \eta)f(\xi, \eta)d\eta, \\
& \psi_2(x_2) = \tau_2(0), \quad \psi'_2(x_2) = v_2(0), \quad \psi''_2(x_2) = \mu_2(0).
\end{aligned}$$

(20)-(25) является замкнутой системой интегральных уравнений относительно функций $\tau_1(y), v_1(y), \mu_1(y), \tau_2(y), v_2(y), \mu_2(y)$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
& a_{11}(y) = D_1(0, y, y), \quad a_{12}(y) = -B_1(0, y, y), \quad a_{13}(y) = v_0(0, y; x_1, y), \\
& a_{21}(y) = D_{1x}(0, y, y), \quad a_{22}(y) = -B_{1x}(0, y, y), \quad a_{23}(y) = v_{0x}(0, y; x_1, y), \\
& a_{31}(x, y, \eta) = D_2(x, y, \eta), \quad a_{32}(x, y, \eta) = -B_2(x, y, \eta), \quad a_{33}(x, y, \eta) = v_1(x, y; x_1, \eta), \\
& a_{34}(x, y, \eta) = D_3(x, y, \eta), \quad a_{35}(x, y, \eta) = -B_3(x, y, \eta), \quad a_{36}(x, y, \eta) = v_1(x, y; x_2, \eta), \\
& a_{44}(y) = D_3(x_1, y, y), \quad a_{45}(y) = -B_3(x_1, y, y), \quad a_{46}(y) = v_1(x_1, y; x_2, y), \\
& a_{54}(y) = D_{3x}(x_1, y, y), \quad a_{55}(y) = -B_{3x}(x_1, y, y), \quad a_{56}(y) = v_{1x}(x_1, y; x_2, y), \\
& a_{64}(y) = D_3(\ell, y, y), \quad a_{65}(y) = -B_3(\ell, y, y), \quad a_{66}(y) = v_2(\ell, y; x_2, y),
\end{aligned}$$

$$B(y) = \begin{pmatrix} a_{11}(y) & a_{12}(y) & a_{13}(y) & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}(y) & a_{22}(y) & a_{23}(y) & 0 & 0 & 0 \\ a_{31}(x, y, \eta) & a_{32}(x, y, \eta) & a_{33}(x, y, \eta) & a_{34}(x, y, \eta) & a_{35}(x, y, \eta) & a_{36}(x, y, \eta) \\ -1 & 0 & 0 & a_{44}(y) & a_{45}(y) & a_{46}(y) \\ 0 & -1 & 0 & a_{54}(y) & a_{55}(y) & a_{56}(y) \\ 0 & 0 & 0 & a_{64}(y) & a_{65}(y) & a_{66}(y) \end{pmatrix},$$

введем обозначения подынтегральные функции в системе (20)-(25)

$$\begin{aligned}
 t_{11}(y, \eta) &= D_{1\eta}(0, y, \eta) + E_1(0, y, \eta), t_{12}(y, \eta) = -B_{1\eta}(0, y, \eta) + C_1(0, y, \eta), \\
 t_{13}(y, \eta) &= v_{0\eta}(0, y; x_1, \eta) + \alpha_1(x_1, \eta)v_0(0, y; x_1, \eta), \\
 t_{21}(y, \eta) &= D_{1\eta x}(0, y, \eta) + E_{1x}(0, y, \eta), t_{22}(y, \eta) = -B_{1\eta x}(0, y, \eta) + C_{1x}(0, y, \eta), \\
 t_{23}(y, \eta) &= v_{0\eta x}(0, y; x_1, \eta) + \alpha_1(x_1, \eta)v_0(0, y; x_1, \eta), \\
 t_{31}(x, y, \eta) &= D_{2\eta}(x, y, \eta) + E_2(x, y, \eta), t_{32}(x, y, \eta) = B_{2\eta}(x, y, \eta) - C_2(x, y, \eta), \\
 t_{33}(x, y, \eta) &= v_{1\eta}(x, y; x_1, \eta) + \alpha_1(x_1, \eta)v_1(x, y; x_1, \eta), \\
 t_{34}(x, y, \eta) &= D_{3\eta}(x, y, \eta) + E_3(x, y, \eta), t_{35}(x, y, \eta) = B_{3\eta}(x, y, \eta) + C_3(x, y, \eta), \\
 t_{36}(x, y, \eta) &= v_{1\eta}(x, y; x_2, \eta) + \alpha_1(x_2, \eta)v_1(x, y; x_2, \eta), \\
 t_{44}(y, \eta) &= D_{3\eta}(x_1, y, \eta) + E_3(x_1, y, \eta), \\
 t_{45}(y, \eta) &= -B_{3\eta}(x_1, y, \eta) + C_3(x_1, y, \eta), \\
 t_{46}(y, \eta) &= v_{1\eta}(x_1, y; x_2, \eta)\alpha_1(x_2, \eta) + v_1(x_1, y; x_2, \eta), \\
 t_{54}(y, \eta) &= D_{3\eta x}(x_1, y, \eta) + E_{3x}(x_1, y, \eta), \\
 t_{55}(y, \eta) &= -B_{3\eta x}(x_1, y, \eta) + C_{3x}(x_1, y, \eta), \\
 t_{56}(y, \eta) &= v_{1\eta x}(x_1, y; x_2, \eta) + \alpha_1(x_2, \eta)v_{1x}(x_1, y; x_2, \eta), \\
 t_{64}(y, \eta) &= D_{4\eta}(\ell, y, \eta) + E_4(\ell, y, \eta), t_{65}(x, y, \eta) = -B_{4\eta}(\ell, y, \eta) + C_4(\ell, y, \eta), \\
 t_{66}(y, \eta) &= v_{2\eta}(\ell, y; x_2, \eta) + \alpha_1(x_2, \eta)v_2(\ell, y; x_2, \eta),
 \end{aligned}$$

$$K(x, y, \eta) = \begin{pmatrix} t_{11}(y, \eta) & t_{12}(y, \eta) & t_{13}(y, \eta) & 0 & 0 & 0 \\ t_{21}(y, \eta) & t_{22}(y, \eta) & t_{23}(y, \eta) & 0 & 0 & 0 \\ t_{31}(x, y, \eta) & t_{32}(x, y, \eta) & t_{33}(x, y, \eta) & t_{34}(x, y, \eta) & t_{35}(x, y, \eta) & t_{36}(x, y, \eta) \\ 0 & 0 & 0 & t_{44}(y, \eta) & t_{45}(y, \eta) & t_{46}(y, \eta) \\ 0 & 0 & 0 & t_{54}(y, \eta) & t_{55}(y, \eta) & t_{56}(y, \eta) \\ 0 & 0 & 0 & t_{64}(y, \eta) & t_{65}(y, \eta) & t_{66}(y, \eta) \end{pmatrix},$$

$$\Phi(y) = \begin{pmatrix} \tau_1(y) \\ v_1(y) \\ \mu_1(y) \\ \tau_2(y) \\ v_2(y) \\ \mu_2(y) \end{pmatrix}, G(x, y) = \begin{pmatrix} g_1(y) \\ g_2(y) \\ g_3(x, y) \\ g_4(y) \\ g_5(y) \\ g_6(y) \end{pmatrix},$$

тогда системы интегральных уравнений (20)-(25) имеет векторный вид:

$$B(y)\Phi(y) + \int_0^y K(y, \eta)\Phi(\eta)d\eta = G(x, y). \quad (26)$$

Разрешимость задачи 1. Отметим, что система уравнений (26) представляет собой замкнутую систему уравнений относительно функций $\tau_1(y), v_1(y), \mu_1(y), \tau_2(y), v_2(y), \mu_2(y)$. Если выполняется условие

$$|B(y)| \neq 0, \quad (27)$$

то матрица $B(y)$ невырожденная матрица, а система (26) является системой интегральных уравнений типа Вольтерра, допускающее единственное решение.

Итак, справедлива следующая

Теорема 1. Если выполняются условия (2)-(9) и (27) то в области $D \setminus (x = x_i, i = 1, 2)$ решение задачи 1 существует и единственно в классе M .

Постановка задачи 2. В области $D = \{0 < x < \ell, 0 < y < h\}$ где

$$D = \bigcup_{i=0}^n D_i, D_i = \{(x, y): x_i < x < x_{i+1}, 0 < y < h\}, x_0 = 0, x_n = \ell,$$

$i = \overline{0, n}, x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ для гиперболического уравнения четвертого порядка (1), коэффициенты которого терпят разрывы первого рода при переходе через линии $x = x_{i+1}, 0 < y < h, i = \overline{0, n-1}$, рассмотрим краевые задачи с разрывными коэффициентами.

Задача 2. Найти решение уравнения (1) в области $D \setminus (x = x_{i+1},$

$i = \overline{0, n-1})$, удовлетворяющее условиям (2), (3) и начальным условиям:

$$u(x, 0) = \psi_j(x), \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad \text{в } D_i, \quad (28)$$

условиями сопряжения на линии разрыва коэффициентов:

$$u(x_i - 0, y) = u(x_i + 0, y) = \tau_i(y), \quad \text{в } D_i, \quad (29)$$

$$u_x(x_i - 0, y) = u_x(x_i + 0, y) = \nu_i(y), \quad \text{в } D_i, \quad (30)$$

$$u_{xx}(x_i - 0, y) = u_{xx}(x_i + 0, y) = \mu_i(y), \quad \text{в } D_i, \quad (31)$$

где $\psi_j(x), j = \overline{1, n-1}, \varphi_m(y), m = \overline{1, 3}$, – заданные гладкие функции, причем

$$\psi_j(x_i) = \tau_i(0), \quad \psi'_j(x_i) = \nu_i(0), \quad \psi''_j(x_i) = \mu_i(0), \quad j = \overline{1, n-1}, i = \overline{1, n-1}, \quad (32)$$

Коэффициенты уравнения (1) кроме условий (2) удовлетворяют еще условиям

$$\alpha_{1xxx}, \alpha_{2xx}, \beta_{1xx}, \beta_{2xy}, \gamma_{1x}, \gamma_{2y} \in \bar{D} \setminus (x = x_i, i = \overline{1, n-1}), \quad (33)$$

Разрешимость задачи 2 доказывается, аналогично продлив идеи задачи 1, методом функции Римана.

Литература:

1. Сопуев А. Краевые задачи для уравнений четвертого порядка и уравнений смешанного типа: Дисс. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Бишкек, 1996. - 249 с.
2. Асылбеков Т.Д. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Бишкек, 2003. - 130 с.
3. Сопуев А., Асылбеков Т.Д. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами // Тезисы докл. междунаро. научно-практ. конференц. "Аналитические и экспериментальные методы математической физики и проблемы их преподавания". - Ош: ОшГУ, 1994. - С. 51-52.
4. Асылбеков Т.Д., Нуранов Б.Ш., Таалайбеков Н.Т. Нелокальные краевые задачи типа Бицадзе-Самарского для гиперболического уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами // Республиканский научно-теоретический журнал "Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана", №3. - Бишкек, 2019. - С. 11-17.
5. Асылбеков Т.Д., Нуранов Б.Ш., Таалайбеков Н.Т. Нелокальные краевые задачи с интегральными условиями для модельного гиперболического уравнения четвертого с трехкратными характеристиками // Республиканский научно-теоретический журнал "Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана", №3. - Бишкек, 2019. - С. 22-29.
6. Асылбеков Т.Д. Задача типа Бицадзе-Самарского для гиперболического уравнения четвертого порядка с трехкратными характеристиками // Научно-теоретический журнал "Известия вузов Кыргызстана", №6. - Бишкек, 2005. - С. 2-7.