DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 1, 2020

*Касымова А.Б.*

# БИР КАЛЫПТУУ МЕЙКИНДИКТЕРДИН ИНВАРИАНТТУУ БАЗАЛУУ ЭРКИН ТОПОЛОГИЯЛЫК ГРУППАЛАРЫ

*Касымова А.Б.*

# СВОБОДНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ С ИНВАРИАНТНОЙ БАЗОЙ

*A.B. Kasymova*

# THE FREE TOPOLOGICAL GROUPS OF UNIFORM SPACES WITH INVARIANT BASE

*УДК: 515.12*

*Бир калыптуу uX мейкиндигинин $F_a(X)$ эркин алгебралык группасында абдан көп ажыратуучу группалык топологиялар жашайт жана алардын сол (оң) $\mathcal{L}(\mathcal{R})$, эки жактуу $\mathcal{L}\vee\mathcal{R}$ бир калыптуулуктары X-та баштапкы и бир калуптуулугун жаратат. Т. Накаяма 1943 - жылы бир калыптуу мейкиндиктин эркин топологиялык группасы түшүнүгүн киргизген. Бул $F_a(X)$ группасында эң күчтүү ажыратуучу группалык $\tau$ топологиясы жашап, анын сол (оң) $\mathcal{L}_\tau(\mathcal{R}_\tau)$ бир калыптуулуктары X-ка баштапкы и бир калыптуулугун жаратат. Е.С. Ньюммела 1982 - жылы бир калыптуу мейкиндиктин эркин топологиялык группасынын башка түшүнүгүн аныктаган. Бул $F_a(X)$ группасында эң күчтүү ажыратуучу группалык $\sigma$ топологиясы жашайт, анын эки-жактуу $\mathcal{L}_\sigma\vee\mathcal{R}_\sigma$ бир калыптуулугу X-та баштапкы и бир калыптуулугун жаратат. Берилген макалада uX бир калыптуу мейкиндиги үчүн $F_a(X)$ группасында эң күчтүү группалык $\tau_{inv}$ инварианттык базасы бар топологиясы тургузулуп, анын $\mathcal{L}_{\tau_{inv}}=\mathcal{R}_{\tau_{inv}}=\mathcal{L}_{\tau_{inv}}\vee\mathcal{R}_{\tau_{inv}}$ бир калыптуулуктары X-ка баштапкы $u$ бир калыптуулугун жаратат. Бул жыйынтык М.И. Граевдин бир теоремасынын бир калыптуу аналогу болуп эсептелет. Алынган жыйынтыктарды пайдаланып Накаяма жана Ньюммела маанисиндеги бир калыптуу мейкиндиктин эркин топологиялык группалар тушүнүгү дал келээри далилденет.*

***Негизги сөздөр:*** *бир калыптуулук, бир калыптуу мейкиндик, эркин алгебралык группа, эркин топологиялык группа, топологиялык группа, инварианттык база, сол (оң) жана эки - жактуу бир калыптуулуктар.*

*На свободной алгебраической группе $F_a(X)$ равномерного пространства uX существует очень много отделимых топологий, левая (правая) $\mathcal{L}(\mathcal{R})$, двусторонняя $\mathcal{L}\vee\mathcal{R}$ равномерности которых индуцируют на X оригинальную равномерность $u$. В 1943 году Т. Накаяма ввёл понятие свободной топологической группы равномерного пространства uX. Эта группа $F_a(X)$ наделённая сильнейшей отделимой групповой топологией $\tau$ так, что левая (правая) равномерность $\mathcal{L}_\tau(\mathcal{R}_\tau)$ индуцирует на X оригинальную равномерность u. В 1982 году Е.С. Ньюммела ввёл другое понятие свободной топологической группы равномерного пространства uX. Эта группа $F_a(X)$ наделённая сильнейшей отделимой групповой топологией $\sigma$ так, что двусторонняя равномерность $\mathcal{L}_\sigma\vee\mathcal{R}_\sigma$ индуцирует на X оригинальную равномерность u. В статье для равномерного пространства uX на группе $F_a(X)$ строится сильнейшая топология $\tau_{inv}$ с инвариантной базой так, что $\mathcal{L}_{\tau_{inv}}=\mathcal{R}_{\tau_{inv}}=\mathcal{L}_{\tau_{inv}}\vee\mathcal{R}_{\tau_{inv}}$ и эти равномерности индуцируют на X исходную равномерность u. Этот результат является равномерным аналогом одной теоремы М.К. Граева. Также с помощью полученного результата доказывается, что понятия свободных топологических групп равномерного пространства в смыслах Накаяма и Ньюммела совпадают.*

***Ключевые слова:*** *равномерность, равномерное пространства, свободная алгебраическая группа, свободная топологическа группа, топологическая группа, инвариантная база, левая (правая) и двустороняя равномерности.*

*On the free algebraic group $F_a(X)$ of the uniform space uX there is a lot of separate topologies, left (right) $\mathcal{L}(\mathcal{R})$, two-sided $\mathcal{L}\vee\mathcal{R}$ uniformities, those induce the original uniformity u on X. In 1943 T. Nakayama introduced the concept of the free topological group of a uniform space uX. This group $F_a(X)$ equipped by the strongest separate group topology $\tau$ such that left (right) uniformity*

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 1, 2020

*$\mathcal{L}_\tau(\mathcal{R}_\tau)$ induces the original uniformity $u$ on X. In 1982 E.C. Nummela introduced another concept of the free topological group of a uniform space uX. This group $F_a(X)$ equipped by the strongest separate group topology $\sigma$ such that two-sided uniformity $\mathcal{L}_\sigma \vee \mathcal{R}_\sigma$ induces the original uniformity $u$ on X. In this paper for a uniform space uX on the group $F_a(X)$ the strongest topology $\tau_{inv}$ with invariant base is constructed such that $\mathcal{L}_{\tau_{inv}} = \mathcal{R}_{\tau_{inv}} = \mathcal{L}_{\tau_{inv}} \vee \mathcal{R}_{\tau_{inv}}$ and those uniformities induce the initial uniformity u on $X$. This result is the uniform analogue the Graev Theorem. And also it is proved that the concepts of the free topological groups of the uniform space in senses of Nakayama and Nummela coincide by means of this result.*

***Key words:*** *uniformity, uniform space, free algebraic group, free topological group, topological group, invariant base, left (right) and two-sided uniformities.*

**1. Введение.**

С каждым равномерным пространством связанны ряд алгебраических объектов. Это алгебра всех равномерно непрерывных функций [3], кольцо всех ограниченных равномерно непрерывных функции [3], кольцо всех конуль-функций [9,10] и свободная топологическая группа равномерного пространства [4,5]. В данной статье будут исследоваться некоторые вопросы свободной топологической группы равномерного пространства.

Обозначения и основные факты о равномерных пространствах используется из книги [3], о топологических пространствах из книги [2], о топологических и свободных топологических группах из книг [1], [6].

Все рассматриваемые пространства предполагаются Тихоновскими. Для пространства $X$ через $F_a(X)$ обозначается свободная алгебраическая группа множества $X$ [1]. Если группа $F_a(X)$ снабжена такой сильнейшей отделимой групповой топологией $\tau_M$, что пространство $X$ является подпространством топологической группы $(F_a(X), \tau_M)$, то $F_M(X) = (F_a(X), \tau_M)$ называется свободной топологической группой пространства $X$ в смысле А.А.Маркова [8]. Для равномерного пространства $uX$, если группа $F_a(X)$ снабжена такой сильнейшей отделимой групповой топологией $\tau$, что левая (правая) равномерность $\mathcal{L}_\tau(\mathcal{R}_\tau)$ топологической группы $(F_a(X), \tau)$ индуцирует на $X$ равномерность $u$, т.е. $\mathcal{L}_\tau|_X = u$ $(\mathcal{R}_\tau|_X = u)$, то $F(uX) = (F_\alpha(X), \tau)$ называется свободной топологической группой равномерного пространства $uX$ в смысле Накаямы [4] . Если группа $F_a(X)$ снабжена такой сильнейшей отделимой групповой топологией $\sigma$, что двусторонняя равномерность $\mathcal{L}_\sigma \vee \mathcal{R}_\sigma$ топологической группы $(F_a(X), \sigma)$ индуцирует на $X$ равномерность $u$ т.е. $\mathcal{L}_\sigma \vee \mathcal{R}_\sigma|_X = u$, то топологическая группа $G(uX) = (F_a(X), \sigma)$ называется свободной топологической группой равномерного пространства $uX$ в смысле Ньюмелла [5]. Напомним, что топологическая группа $G$ называется группой с инвариантной базой, если база $\mathcal{N}(e)$ открытых окрестностей нейтрального элемента $e \in G$ состоит из инвариантных множеств т.е. $xUx^{-1} = U$ для всех $x \in G$ и $U \in \mathcal{N}(e)$. М.И. Граевым [7] доказана теорема о существовании на группе $F_a(X)$ такой сильнейшей отделимой групповой топологии $\tau_I$ с инвариантной базой, что любое непрерывное отображение $f : X \to H$ в группу

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



с инвариантной базой $H$ может быть продолжена до непрерывного гомоморфизма $\tilde{f}:(F_a(X),\tau_I)\to H$ и семейство всех множеств вида $U_\rho=\{g\in F_a(X):\hat{\rho}(g,e)<1\}$, где $\rho$ произвольная непрерывная псевдометрика на $X$, $\hat{\rho}$ - Граевское продолжение псевдометрики $\rho$ на $F_a(X)$ [7],[1,Теорема:7.7.2], образуют инвариантную базу нейтрального элемента $e\in F_a(X)$ [7], [1, Теорема:7.7.3].

В данной статье для равномерного пространства доказывается равномерный аналог Теоремы 7.2.2 из книги [1]. Именно, для каждого равномерного пространства $uX$ на группе $F_a(X)$ существует такая сильнейшая отделимая групповая топология $\sigma_{inv}$ с инвариантной базой, что любое равномерно непрерывное отображение $f:uX\to vH$ в группу с инвариантной базой $H$, где $v=\mathcal{L}_H=\mathcal{R}_H=\mathcal{L}_H\vee\mathcal{R}_H$, может быть продолжена до непрерывного гомоморфизма $\tilde{f}:(F_a(X),\sigma_{inv})\to H$ и семейство всех множеств вида $U_\rho=\{g\in F_a(X):\hat{\rho}(g,e)<1\}$, где $\rho$ произвольная равномерно непрерывная псевдометрика на равномерном пространстве $uX$, $\hat{\rho}$ - Граевское продолжение псевдометрики $\rho$ на $F_a(X)$, образуют инвариантную базу нейтрального элемента $e\in F_a(X)$.

А.А.Чекеевым в статье [11] доказано, что свободные топологические группы равномерного пространства в смысле Накаямы и Ньюммелы совпадают. Об этом было доложено в г.Чэнгду (3rd Pan-Pacific International Conference on Topology and Applications 2019) и в г.Ташкент (Modern problems of geometry and topology and their applications 2019). Используя полученный результат, другим способом доказывается результат из [11] о совпадении понятий свободных топологических групп равномерных пространств в смысле Накаямы и Ньюммелы.

**2. Предварительные сведения.**

Пусть $G$ топологическая группа и $\mathcal{N}(e)$ база окрестностей нейтрального элемента $e\in G$. Тогда для любой окрестности $V\in\mathcal{N}(e)$ определяются открытые покрытия вида: $\alpha_v^l=\{xV:x\in G\}$ и $\alpha_v^r=\{Vx:x\in G\}$ и семейства $\{\alpha_v^l:V\in\mathcal{N}(e)\},\{\alpha_v^r:V\in\mathcal{N}(e)\}$, образуют базы *левой* $\mathcal{L}_G$ и *правой* $\mathcal{R}_G$ равномерностей топологической группы $G$. Также определена *двусторонняя* равномерность $\mathcal{L}_G\vee\mathcal{R}_G$ базой, которой служит семейство открытых покрытий вида $\{\{xV\cap Vx:x\in G\}:V\in\mathcal{N}(e)\}$. Подмножество $A$ топологической группы $G$ называется инвариантным, если $xAx^{-1}=A$ для любого $x\in G$. Топологическая группа $G$ называется группой с инвариантной базой, если база открытых окрестностей $\mathcal{N}(e)$ нейтрального элемента $e\in G$ состоит из инвариантных множеств. Если группа $G$ является топологической группой с инвариантной базой то $\mathcal{L}_G=\mathcal{R}_G=\mathcal{L}_G\vee\mathcal{R}_G$. Всякий непрерывный гомоморфизм $f:G\to H$ между топологическими группами $G$ и $H$ является равномерно непрерывным отображением $f:(G,\mathcal{L}_G)\to(H,\mathcal{L}_H)$ ($f:(G,\mathcal{R}_G)\to(H,\mathcal{R}_H)$) и, следовательно $f:(G,\mathcal{L}_G\vee\mathcal{R}_G)\to(H,\mathcal{L}_H\vee\mathcal{R}_H)$ также равномерно непрерывно. Вещественнозначная

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

**НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 1, 2020**

функция $N : G \to \mathbb{R}$ на группе $G$ (не обязательно топологической) называется *преднормой*, если для любых $x, y \in G$ выполнены условия:

(PN1) $N(e) = 0$;

(PN2) $N(xy) \le N(2) + N(y)$;

(PN3) $N(x^{-1}) = N(x)$.

Для преднорм на группе $G$ имеют место следующие свойства:

2.1 $N(x) \ge 0$ для всех $x \in G$.

2.2. $\left|N(x) - N(y)\right| \le N(xy^{-1})$ для всех $x, y \in G$.

2.3. Если $\alpha \in \mathbb{R}^{+} = [0, +\infty)$, то $(\alpha N)(x) = \alpha(N(x))$ для всех $x \in G$.

2.4. $Z_N = \{x \in G, N(x) = 0\}$ является подгруппой группы $G$.

2.5. Если $N$ и $N'$ преднормы на группе $G$, то $N + N'$ также преднорма на $G$.

2.6. *Если $f$ вещественная ограниченная функция на $G$, то функция $N_f(x) = \sup\{\left|f(yz) - f(y)\right| : y \in G\}$ для всех $x \in G$, является преднормой на группе $G$.*

2.7. *Преднорма $N$ на топологической группе $G$ является непрерывной, если и только, если для любого $\varepsilon > 0$ существует открытая окрестность $U \in \mathcal{N}(e)$ такая что $N(x) < \varepsilon$ для всех $x \in U$.*

2.8. *Каждая непрерывная преднорма на топологической группе $G$, равномерно непрерывна относительно левой $\mathcal{L}_G$ и правой $\mathcal{R}_G$ равномерностей.*

2.9. *Пусть $G$ - топологическая группа и $\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{N}(e)$ где $U_n$ - открыто, $U_n = U_n^{-1}$ и $U_{n+1}^2 \subset U_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда на топологической группе $G$ существует преднорма $N$ удовлетворяется условию:*

$$\text{(PN4)} \qquad \{x \in G : N(x) < 2^{-n}\} \subset U_n \subset \{x \in G : N(x) < 2^{n-1}\}.$$

*Эта преднорма $N$ непрерывна. Если дополнительно $U_n$ инвариантно для всех $n \in \mathbb{N}$, то норма $N$ удовлетворяет свойству $N(xyx^{-1}) = N(y)$ для всех $x, y \in G$.*

Имеет место теорема Граева в формулировке из книги [1, Теорема 7.2.2.,].

2.10. *Каждая псевдометрика $\rho$ на непустом множестве $X$ может быть продолжена до инвариантной псевдометрики $\hat{\rho}$ на группе $F_a(X)$. Если $X$ является Тихоновским пространством и $\rho$ непрерывна на $X$, тогда псевдометрика $\hat{\rho}$ непрерывна на $F_M(X)$.*

Эта теорема доказывается в пять этапов. Для полноты и удобства изложения воспроизведем набросок доказательства.

Пусть $e$ нейтральный элемент свободной алгебраической группы $F_a(X)$. Слово $\mathcal{X}$ в алфавите $\tilde{X} = X \cup \{e\} \cup X^{-1}$ называется *почти неприводимым*, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

(a) $\mathcal{X}$ не содержит слов вида $xx^{-1}$ или $x^{-1}x$ для всех $x \in X$.

(b) После удаления из $\mathcal{X}$ всех слов $e$, получается неприводимое слово алфавита $X \cup X^{-1}$.

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 1, 2020

Сначала продолжим псевдометрику $\rho$ на $X$ на множество $\tilde{X}$ из $F_a(X)$. Зафиксируем точку $x_0 \in X$ и для любого $x \in X$ положим $\rho^*(e,x) = \rho^*(e,x^{-1}) = 1 + \rho(x_0,x)$ Тогда для $x, y \in X$ $\rho^*(x^{-1},y^{-1}) = \rho^*(x,y) = \rho(x,y), \quad \rho^*(x^{-1},y) = \rho^*(x,y^{-1}) = \rho^*(x,e) + \rho^*(e,y).$

Ясно, что $\rho^*\big|_X = \rho, \rho^*(z,t) = \rho^*(t,z) \geq 0$ для всех $t, z \in \tilde{X}$ и для всех $u, v, w \in \tilde{X}$ выполняется аксиома треугольника: $\rho^*(u,w) \leq \rho^*(u,v) + \rho^*(v,w)$ псевдометрика $\rho^*$ продолжается с $\tilde{X}$ на всю группу $F_a(X)$ следующим образом. Пусть $g \in F_a(X)$ и $\mathcal{X} \equiv x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{2n}}$ слово из алфавита $\tilde{X}$ длины $l(\mathcal{X}) = 2n$, где $i_1, i_2, \ldots, i_{2n}$ попарно различные натуральные числа, такие, что после всевозможных «сокращений» в $\mathcal{X}$ заданное $\mathcal{X}$ трансформируется в $g$, в этом случае будем писать $[\mathcal{X}] = g$. Обозначим через $\mathfrak{I}_{\mathcal{X}}$ семейство всех перестановок множества $A = \{i_1, \ldots, i_n\}$. Для каждой перестановки $\phi \in \mathfrak{I}_{\mathcal{X}}$ положим $\Gamma_g(\mathcal{X}, \rho) = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{i \in A} \rho^*(x_i^{-1}, x_{\varphi(i)})$. Тогда определим число $N_\rho(g)$ как следующее: $N_\rho(g) = \inf\{\Gamma_\rho(\mathcal{X}, \varphi) : l(\mathcal{X}) = 2n \geq l(g), [\mathcal{X}] = g, \varphi \in \mathfrak{I}_{\mathcal{X}}, n \in \mathbb{N}\}$ .Ясно, что $N_\rho(g) \geq 0$ для всех $g \in F_a(X)$.

2.10.1. *Для каждого* $g \in F_a(X)$ *отличного от* $e(g \neq e)$, *в алфавите* $\tilde{X}$ *можно построить такое неприводимое слово* $\mathcal{X}_g$ *длины* $2n \geq 2$ *и перестановку* $\varphi$ *для* $\mathcal{X}_g$ *такие, что выполняются следующие условия:*

$(i)$ $\mathcal{X}_g$ содержит буквы только $g$ или слово $e$.

$(ii)$ $[\mathcal{X}_g] = g$ и $l(\mathcal{X}_g) \leq 2l(g)$

$(iii)$ $N_\rho(g) = \Gamma_\rho(\mathcal{X}_g, \varphi_g)$.

2.10.2. *Функция* $N_\rho$ *инвариантная преднорма на группе* $F_a(X)$.

2.10.3. $N_\rho(x^{-1}y) = \rho(x,y) = N_\rho(xy^{-1})$ *для всех* $x, y \in X$.

2.10.4. *Псевдометрика* $\hat{\rho}(g,h) = N_\rho(g^{-1}h)$ *для всех* $g, h \in F_a(X)$ *инвариантна на* $F_a(X)$ *и* $\hat{\rho}\big|_X = \rho$.

2.10.5. *Пусть* $\mathcal{P}$ *семейство всех непрерывных псевдометрик на пространстве* $X$. *Для каждой псевдометрики* $\rho \in \mathcal{P}$ *положим* $U_\rho = \{g \in F_a(X) : N_\rho(g) < 1\}$. *Тогда, семейство* $\mathcal{N} = \{U_\rho : \rho \in \mathcal{P}\}$ *является базой нейтрального элемента* $e \in F_a(X)$ *для отделимой групповой топологии* $\tau_{inv}$ *на* $F_a(X)$. *Сужение* $\tau_{inv}$ *на* $X$ *совпадает с оригинальной топологией пространства* $X$.

2.10.6. *Для каждой непрерывной псевдометрики* $\rho$ *на* $X$ *псевдометрика* $\hat{\rho}$ *является непрерывной на свободной топологической группе* $F_M(X)$.

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 1, 2020

**3. Основные результаты.**

**Теорема 3.1.** *Для каждого равномерного пространства* $uX$ *, алгебраическая группа* $F_a(X)$ *допускает такую максимальную групповую топологию* $\sigma_{inv}$ *с инвариантной базой, что всякое равномерно непрерывное отображение* $f: uX \to vH$ *в топологическую группу* $H$ *с инвариантной базой где* $v = \mathcal{L}_H = \mathcal{R}_G = \mathcal{L}_M \vee \mathcal{R}_M$ *, продолжается до непрерывного гомоморфизма* $\overline{f}: (F_a(X), \sigma_{inv}) \to H$ *. Семейство всех множеств* $U_\rho = \{g \in F_a(X) : \hat{\rho}(g, e) < 1\}$ *где* $\rho$ *произвольная равномерно непрерывная псевдометрика на* $uX$ *, образует базу топологии* $\sigma_{inv}$ *в нейтральном элементе* $e$ *группы* $F_a(X)$.

**Доказательство**. Докажем сначала «равномерный» аналог утверждения 2.10.5.

**Лемма 3.2.** *Пусть* $\mathcal{P}_u$ *семейство всех равномерно непрерывных псевдометрик равномерного пространства* $uX$ *. Для каждой псевдометрики* $\rho \in \mathcal{P}_u$ *положим* $U_\rho = \{g \in F_a : N_\rho(g) < 1\}$*. Тогда, семейство* $\mathcal{N} = \{U_\rho : \rho \in \mathcal{P}_u\}$ *является базой нейтрального элемента* $e \in F_a(X)$ *для Хаусдорфовой групповой топологии* $\sigma_{inv}$ *на группе* $F_a(X)$*. Сужение левой* $\mathcal{L}_{\sigma_{inv}}$*, правой* $\mathcal{R}_{\sigma_{inv}}$ *и двусторонней* $\mathcal{L}_{\sigma_{inv}} \vee \mathcal{R}_{\sigma_{inv}}$ *равномерностей на* $X$ *совпадает с оригинальной равномерностью* $u$ *.*

**Доказательство.** Покажем, что семейство $\mathcal{N}$ удовлетворяет условиям $1^\circ - 5^\circ$ Теоремы 1.3.12. [1].

$1^\circ$. $\{e\} = \cap N$. Пусть $g = x_1, \ldots, x_n \in F_a(X)$ произвольный элемент, отличный от $e \in F_a(X)$ . Тогда существует такая равномерно непрерывная псевдометрика $\rho \in \mathcal{P}_u$, что $\rho^*(x_i^{-1}, x_i) \geq 1$ если $x_i^{-1} \neq x_j$ . Действительно, $x_i = a_i^{\varepsilon_i}$ для некоторых $a_i \in X$ и $\varepsilon_i = \pm 1$ , $1 \leq i \leq n$ . Тогда существует такая равномерно непрерывная функция $f: uX \to \mathbb{R}$ , что $|f(a_i) - f(a_j)| \geq 1$, если $a_i \neq a_j$. Тогда псевдометрика $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$ является равномерно непрерывной на $uX$ . С использованием 2.10.1. доказывается что $g \notin U_\rho$.

$2^\circ$. Пусть $\rho, d \in \mathcal{P}_u$. Тогда $\rho + d \in \mathcal{P}_u$ и имеем $U_{\rho+d} \subset U_\rho \cap U_d$.

$3^\circ$ Пусть $\rho \in \mathcal{P}_u$, то $d = 2\rho \in \mathcal{P}_u$ и имеем

$N_d(gh^{-1}) \leq N_\rho(g) + N_\rho(h^{-1}) = N_\rho(g) + N(h) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Это означает, что $V_d \cdot V_d^{-1} \subset U_\rho$.

$4^\circ$ Пусть $\rho \in \mathcal{P}_u$ и $g \in U_\rho$ - произвольные. Тогда $r = N_\rho(g) < 1$, $s = 1 - r > 0$ и $d = s^{-1} \cdot \rho \in \mathcal{P}_u$. Тогда, если $h \in V_d$, то $N_d(h) = s^{-1} \cdot N_\rho(h) < 1$. Таким образом

$$N_d(gh) \leq N_\rho(g) + N_\rho(h) < r + s = 1, \text{ т.е. } g \cdot V_d \subset U_\rho.$$

$5^\circ$ Из 2.10.2. следует, что каждая преднорма $N_\rho$ инвариантна для всех $\rho \in \mathcal{P}_u$, следовательно $U_\rho = gUg^{-1}$ для всех $g \in F_a(X)$.

Из 2.10.4. следует что $\mathcal{L}_{\sigma_{inv}}|_X = \mathcal{R}_{\sigma_{inv}}|_X = \mathcal{L}_{\sigma_{inv}} \vee \mathcal{R}_{\sigma_{inv}}|_X = u$ . Лемма 3.2. доказана.

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



**Доказательство** теорема 3.1.

Обозначим через $\sigma_{inv}$ Хаусдорфову групповую топологию на $F_a(X)$ с базой в нейтральном элементе $\mathcal{N}=\{U_\rho : \rho \in \mathcal{P}_u\}$ (по Лемме 3.2.). Из Теоремы 2.10 следует, что для каждой равномерно непрерывной псевдометрики $\rho \in \mathcal{P}_u$ псевдометрика $\hat{\rho}$ инвариантна на $F_a(X)$ и непрерывна относительно топологии $\sigma_{inv}$.

Пусть $H$ топологическая группа с инвариантной базой и $f : uX \to vH$ равномерно непрерывное отображение, где $v=\mathcal{L}_H=\mathcal{R}_H=\mathcal{L}_H \vee \mathcal{R}_H$. Пусть $\hat{f}$ продолжение $f$ до гомоморфизма группы $F_a(X)$ в $H$. Покажем, что $\bar{f}$ непрерывен относительно топологии $\sigma_{inv}$, т.е. $\bar{f} : (F_a(X), \sigma_{inv}) \to H$ является непрерывным отображением. Пусть $V$ - произвольная открытая окрестность нейтрального элемента группы $H$. Тогда, в силу 2.9, существует такая инвариантная преднорма $N$ на $H$, что $W=\{h \in H : N(h)<1\} \subset V$. Положим, $\rho(x,y)=N((f(x))^{-1} \cdot f(y))$ для всех $x,y \in X$. В силу равномерной непрерывности отображения $f : uX \to vH$, $\rho \in \mathcal{P}_u$, т.е. $\rho$ является равномерно непрерывной псевдометрикой на $uX$. Тогда нетрудно проверить, что $\bar{f}(U_\rho) \subset W \subset V$, т.е. $\bar{f}$ - непрерывный гомоморфизм.

Пусть $\sigma'_{inv}$ другая инвариантная топология на группе $F_a(X)$ и $\mathcal{L}_{\sigma'_{inv}}\big|_X=\mathcal{R}_{\sigma'_{inv}}\big|_X=\mathcal{L}_{\sigma'_{inv}} \vee \mathcal{R}_{\sigma'_{inv}}\big|_X=u$. Тогда вложение $i : uX \to (F_a(X), \sigma'_{inv})$ является равномерным и продолжается до непрерывного гомоморфизма $\bar{i} : (F_a(X), \sigma_{inv}) \to (F_a(X), \sigma'_{inv})$. Следовательно, $\sigma'_{inv} \subset \sigma_{inv}$, т.е. топология $\sigma_{inv}$ является максимальной по включению. Теорема 3.1. доказана.

**Теорема 3.3.** *Понятие свободной топологической группы* $F(uX)=(F_a(X),\tau)$ *равномерного пространства* $uX$ *в смысле Накаяма и понятие свободной топологической группы* $G(uX)=(F_a(X),\tau)$ *равномерного пространства* $uX$ *в смысле Ньюммелы совпадают.*

**Доказательство.** Ясно, что равномерные вложения $i : uX \to (F_a(X), \sigma_{inv})$ продолжаются до непрерывных гомоморфизмов

$$\bar{i} : F(uX) \to (F_a(X), \sigma_{inv}) \quad \text{и} \quad \tilde{i} : G(uX) \to (F_a(X), \sigma_{inv})$$

Тогда $\tilde{i} : (G(uX)\mathcal{L}_\sigma) \to (F_a(X), \mathcal{L}_{\sigma_{inv}})$ и $\tilde{i} : (G(uX)\mathcal{R}_\sigma) \to (F_a(X), \mathcal{R}_{\sigma_{inv}})$

равномерно непрерывные отображения, где $\mathcal{L}_\sigma(\mathcal{R}_\sigma)$ -левая (правая) равномерность группы $G(uX)$. Так как $\mathcal{L}_{\sigma_{inv}}=\mathcal{R}_{\sigma_{inv}}$ и $\mathcal{L}_{\sigma_{inv}}\big|_X=\mathcal{R}_{\sigma_{inv}}\big|_X=u$, то $\mathcal{L}_\sigma\big|_X=\mathcal{R}_\sigma\big|_X=u$. Тогда равномерное вложение $j : uX \to (G(uX), \mathcal{L}_\sigma)$ $(j : uX \to (G(uX), \mathcal{R}_\sigma))$ продолжается до непрерывного гомоморфизма $\bar{j} : F(uX) \to G(uX)$, который является равномерно непрерывным гомоморфизмом $\bar{j} : (F(uX), \mathcal{L}_\tau) \to (G(uX), \mathcal{L}_\sigma)$ и $\bar{j} : (F(uX), \mathcal{R}_\tau) \to (G(uX), \mathcal{R}_\sigma)$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



Так как, $F(uX)=(F_a(uX),\tau)$ и $G(uX)=(F_a(uX),\sigma)$, то имеем включение $\mathcal{L}_\sigma \subset \mathcal{L}_\tau$ и $\mathcal{R}_\sigma \subset \mathcal{R}_\tau$ Следовательно, $\mathcal{L}_\sigma \vee \mathcal{R}_\sigma \subset \mathcal{L}_\tau \vee \mathcal{R}_\tau$. Для группы $F(uX)$ имеем $\mathcal{L}_\tau\big|_X = \mathcal{R}_\tau\big|_X = u$, следовательно $\mathcal{L}_\sigma \vee \mathcal{R}_\sigma\big|_X = u$. Тогда равномерное вложение $k: uX \to (F_a(X), \mathcal{L}_\tau \vee \mathcal{R}_\tau)$ продолжается до равномерно непрерывного гомоморфизма $\bar{k}:(F_a(X), \mathcal{L}_\sigma \vee \mathcal{R}_\sigma) \to (F_a(X), \mathcal{L}_\tau \vee \mathcal{R}_\tau)$. Следовательно, $\mathcal{L}_\tau \vee \mathcal{R}_\tau \subset \mathcal{L}_\sigma \vee \mathcal{R}_\sigma$. Таким образом имеем равенство $\mathcal{L}_\tau \vee \mathcal{R}_\tau = \mathcal{L}_\sigma \vee \mathcal{R}_\sigma$ и группы $F(uX)$ и $G(uX)$ совпадают. Теорема 3.3 доказана.

**Следствие 3.4.** *Свободная топологическая группа $F(uX)$ равномерного пространства $uX$ в смысле Накаямы является функтором из категории равномерных пространств $Unif$ в категории отделимых топологических групп $GTOP$ и обладает следующими свойствами:*

1. *Алгебраически группа $F(uX)$ порождена множеством $X$;*
2. *Любое равномерно непрерывное отображение $f: uX \to vG$ в топологическую группу $G$, где $v$ групповая равномерность и $v=\{\mathcal{L}_G, \mathcal{R}_G, \mathcal{L}_G \vee \mathcal{R}_G\}$, продолжается до непрерывного гомоморфизма $\bar{f}: F(uX) \to G$.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы 3.3.

**Литература:**


1. Arhangel'skii A., Tkachenko M. Topological groups and related structures, Atlantis press, Word Scientific, Amsterdam-Paris, 2008. - 781 p.
2. Engelking R., General Topology, Berlin: Heldermann, 1989. - 626 p.
3. Isbell, J. R. Uniform spaces: Mathematical Survey, Providence, 1964. - 175p.
4. Nakayama, T. Note on free topological groups, Proc.Imp.Acad.Sci.19, 1943. - PP. 471-475.
5. Nummela E.C. Uniform free topological groups and Samuel compactifications, Topol. Appl. 13. - 1982. - PP.77-83.
6. Reolcke W., Dierolf S. Uniform structures on topological groups and their quotients, McGraw-Hill Int. book Co. – New York, 1981. - 276 p.
7. Граев, М.И. Свободные топологические группы, Доклад Академии Наук СССР. Сер. Мат. №12. - 1948. - С. 279- 323.
8. Марков А.А. О свободных топологических группах. Доклад Академии Наук СССР, №31. - 1941. - С. 299-301.
9. Чекеев А.А., Абдраимова М.А., Баатырбеков Э.Б. Конуль псевдокомпактные пространства. / Журнал «Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана». - 2017. - №4. - С. 12-14.
10. Чекеев А.А., Касымова А.Б., Алмазбеков Ч.А. Аналог теоремы Хьюитта в категории ZUnif. / Журнал «Известия вузов Кыргызстана». - 2019. - №2. - С. 14-20.
11. Чекеев А.А., Касымова А.Б., Торобаев А.Т. О свободной топологической группе равномерного пространства. / Журнал «Известия вузов Кыргызстана», №2. - 2019. - С. 3-7.