DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 1, 2020

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

MATHEMATICAL SCIENCES

Асанов А., Чоюбеков С.М.

ВОЛЬТЕРРАНЫН БИРИНЧИ ТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ КЛАССИКАЛЫК ЭМЕС ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫ ЖӨНҮНДӨ

Асанов А., Чоюбеков С.М.

О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

A. Asanov, S.M. Choybekov

ON THE SOLUTION OF LINEAR NON-CLASSICAL INTEGRAL EQUATIONS OF FIRST KINDER VOLTERRA

УДК: 517.983

Интегралдык теңдемелер математиканын негизги бөлүмүнө - анын ичинде физика, техника жана башка көптөгөн илимдерге ар тараптуу колдонулган бөлүмүнө кирет. Бул жагынан алганда, акыркы жылдары көптөгөн изилдөөчүлөрдүн аракеттери менен интегралдык теңдемелердин теориясы дүркүрөп өсүүдө. Заманбап компьютердик технологиялардын өнүгүүсү менен сандык чечимдерди реализациялоо жана татаал процесстерди моделдештирүү мүмкүнчүлүгү түзүлдү. Мындай типтеги көптөгөн маселелер интегралдык теңдемелерге келтирилет. Биринчи планга интегралдык теңдемелер чечимдерин сапаттуу изилдөө коюлат. Бирок, пределы боюнча интегралданууччу эки өзгөрүлмөлүү классикалык эмес теңдемелер өтө аз изилденген. Бул анын резольвентасын тургузуунун татаалдыгы менен, ошондой эле кайсы бир моделдик учурларын эске албаганда жалпы типтеги аналитакалык көрүнүшү жазылбаганы менен түшүндүрүлөт. Ошондуктан чечимди ушундай изилдөөлөр актуалдуу деп эсептелинет.

Негизги сөздөр: *интегралдык тендемелер, өсүүчү, үзгүлтүксүз, шарт, өзгөрүлмөлөр, жакындаштырылган чечим, мейкиндик, усул, классикалык эмес.*

Интегральные уравнения относятся к разделу математики, важным для приложений – к ним приводится большое число задач самых разных разделов физики, техники и многих наук. В связи с этим в последние годы теория интегральных уравнений бурно развивается благодаря трудам многих исследователей. С развитием современных компьютерных технологий появляется возможность моделировать самые сложные процессы и реализации численных решений. Многие задачи такого рода сводятся к интегральным уравнениям. На первый план выдвигается качественное исследование решений этих задач. Однако, уравнения с двумя переменными пределами интегрирования, которые называют неклассическими мало изучены. Это объясняется трудностями в построении резольвенты и в составлении соотношения для нее, так как еще не получено аналитическое представление в общем виде за исключением некоторых модельных случаев. Поэтому такого исследования решений являются актуальными.

Ключевые слова: *интегральное уравнения, возрастающая, непрерывные, условия, переменные, приближенные решения, пространство, метод, неклассические.*

Integral equations belong to the branch of mathematics, which is important for applications — a large number of problems of various branches of physics, engineering, and many sciences are given to them. In this regard, in recent years, the theory of integral equations has been developing rapidly thanks to the work of many researchers. With the development of modern computer technologies, it becomes possible to model the most complex processes and implement numerical solutions. And many problems of this kind are

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 1, 2020

reduced to integral equations. The qualitative research of solutions to these problems is put at the forefront. However, equations with two variable limits of integration, which are called non-classical, have been little studied. This is due to the difficulties in constructing the resolvent and in constructing a relation for it, because The analytical representation in general form has not yet been obtained except for some model cases. Therefore, studies of approximate solutions are relevant.

***Key words**: integral equation, increasing, continuous, conditions, variables, approximate solutions, space, method, non-classical.*

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s)u(s)ds = f(t); \quad t\epsilon[t_0;T] \tag{1}$$

$\alpha(t), K(t,s)$ и $f(t)$ – заданные функции, где $\alpha(t) \in C^1[t_0;T], \alpha(t_0) = \beta < t_0, f(t) \in C^1[t_0,T], \alpha(t) \leq t$ при всех $t\epsilon[\,t_0;T], K(t,s)$ и $K'_t(t,s)$ – непрерывные функции в области $G = \{(t,s): \ \alpha(t) \leq s \leq t \leq T\}, \alpha(t)$ – строго возрастающая функция в $[t_0;T]$.

Интегральные уравнения относятся к разделу математики, являющейся важной для других научных сфер. Они предоставляют большое число задач для разнообразных разделов физики, техники и многих других наук. Поэтому благодаря труду множества исследователей интегральные уравнения активно развиваются на протяжение последних лет [2;6].

Однако, уравнения с двумя переменными пределами интегрирования, которых называют неклассическими мало изучены. Это наверно объясняется с трудностями в построении резольвенты и в составлении соотношения для нее, т.к. еще не получено аналитическое представление в общем виде за исключением некоторых модельных случаев. Поэтому исследования приближенных решений являются актуальными [8,13].

В данной работе в предположении $\alpha(t_0) = t_0$, следуя по методу, предложенному М. Иманалиевым и А.Асановым [4,5], устанавливаются доказывается единственность решения неклассического интегрального уравнения Вольтерра I рода в различных функциональных пространствах.

Предположим выполнения следующих условий:

a) $K(t,s)$ и $K'_t(t,s)$ – непрерывные функции в области G, $K(t,t) \neq 0$ при всех $t\epsilon[t_0;T]$;

b) $\alpha(t), \alpha'(t), f(t), f'(t) \in C\big[\,t_{0;}T\big], \alpha(t_0) = \beta < t_0, \ \alpha(T) = t_0 \ \alpha(t) \leq t$, при всех $t\epsilon[t_0;T]$, где $\alpha(t)$ – строго возрастающая функция в $[t_0;T]$.

Пусть

$$u(t) = \varphi(t), \ t \in [\beta; t_0\,] \tag{2}$$

где $\varphi(t)$ – известная непрерывная функция в $[\beta; t_0\,]$.

Пусть $t\epsilon[\,t_0;T]$. Тогда дифференцируя интегральное уравнение (1) имеем

$$K(t,t)u(t) - K(t,\alpha(t))u(\alpha(t)))\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{t} K'_t(t,s)u(s)ds = f'(t), t\epsilon[t_0;T\,]$$

от сюда получим

$$u(t) = \frac{K(t,\alpha(t))}{K(t,t)}u(\alpha(t)))\alpha'(t) - \int_{\alpha(t)}^{t} \frac{K'_t(t,s)}{K(t,t)}u(s)ds + \frac{f'(t)}{K(t,t)}; t\epsilon[t_0;T\,] \tag{3}$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 1, 2020

Учитывая условия a), b) и (2) интегральное уравнение (3) запишем в виде:

$$u(t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{K'_t(t,s)}{K(t,t)} u(s)ds + P(t), \quad t\epsilon[t_0;T] \tag{4}$$

где

$$P(t) = \frac{K(t,\alpha(t))}{K(t,t)} \varphi\big(\alpha(t)\big)\alpha'(t) - \int_{\alpha(t)}^{t_0} \frac{K'_t(t,s)}{K(t,t)} \varphi(s)ds + \frac{f'(t)}{K(t,t)}, \ t\epsilon[t_0;T] \tag{5}$$

Полагая $t = t_0$ и учитывая (2) и (5) из (1) и (4) получим:

$$\int_{\alpha(t_0)}^{t_0} K(t_0, s)u(s)ds = f(t_0); \tag{6}$$

$$\int_{\alpha(t_0)}^{t_0} K(t_0, s)u(s)ds = f(t_0);$$

$$\varphi(t_0) = \frac{K(t_0,\alpha(t_0))}{K(t_0,t_0)} \varphi\big(\alpha(t_0)\big)\alpha'(t_0) - \int_{\beta}^{t_0} \frac{K'_t(t_0,s)}{K(t_0,t_0)} \varphi(s)ds + \frac{f'(t_0)}{K(t_0,t_0)}, \tag{7}$$

Теорема. Пусть выполняются условия a), b) (6) и (7). Тогда интегральное уравнение (1) с условием (2) эквивалентно интегральному уравнению второго рода (4), где $P(t)$ определено по формуле (5).

Доказательство. Пусть функция $u(t) \in C[\beta;T]$ является решение уравнения (1) с условием (2). Тогда в силу (2), (3) и (5) функция $u(t) \in C[t_0;T]$ является решением интегрального уравнения (4).

Обратно, пусть функция $u(t) \in C[t_0;T]$ является решением интегрального уравнения (4), где $P(t)$ определена по формуле (5). Определим функция $v(t)$ по формуле

$$v(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \beta \le t \le t_0, \\ u(t), & t_0 \le t \le T. \end{cases} \tag{8}$$

Тогда в силу (5), (7) и (2) из (4) имеем:

$$K(t,t)u(t) - K(t,\alpha(t))u(\alpha(t)))\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{t} K'_t(t,s)v(s)ds = f'(t), t\epsilon[t_0;T]$$

отсюда

$$\left(\int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s)v(s)ds\right)' = f'(t); \quad t\epsilon[t_0;T] \tag{9}$$

Интегрируя (9) от t_0 до t и учитывая условия (6) имеем

$$\int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s)v(s)ds = f(t); \ t\epsilon[t_0;T]$$

т.е. функция определенное по формуле (8) является решением уравнения (1) со условием (2).

Теорема доказана.

Следствие. Пусть выпольняется условия теоремы. Тогда интегральное уравнение (1) с условием (2) имеет единственное решение в пространстве $C\epsilon[\beta;T]$.

Пример 1. Рассмотрим следующее интегральное уравнение:

$$\int_{t-1}^{t} [1 + (t-s)]u(s)ds = t^2 + 3t - \frac{5}{3}; \quad t\epsilon[0;1] \tag{10}$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 1, 2020

с условием

$$u(t) = 2t,\ t\epsilon[-1;0] \tag{11}$$

Здесь $\alpha(t) = t - 1, t_0 = 0, \beta = -1, t_1 = 1, K(t, s) = 1 + (t - s), \alpha'(t) = 1, f(t) = t^2 + 3t - \frac{5}{3}$. Кроме того предположим, что при $t \in [-1;0]$ $u(t) = 2t$. $\varphi(t) = 2t$, $t \in [-1;0]$. В этом случае $K(t,t) = 1$, $K(t, \alpha(t)) = 2$, $K'_t(t,s) = 1$ при $(t,s) = G = \{(t,s): t - 1 \le s \le t \le 2\}$.

Проверим условии (6) и (7):

$$\int_{\alpha(t_0)}^{t_0} K(t_0, s)u(s)ds = f(t_0); \tag{6}$$

$$\int_{-1}^{0}(1-s)2sds = \int_{-1}^{0}(2s - 2s^2)ds = (s^2 - \frac{2}{3}s^3)_{-1}^{0} = -\frac{5}{3}$$

$$\varphi(t_0) = \frac{K(t_0,\alpha(t_0))}{K(t_0,t_0)}\varphi(\alpha(t_0))\alpha'(t_0) - \int_{\beta}^{t_0}\frac{K'_t(t_0,s)}{K(t_0,t_0)}\varphi(s)ds + \frac{f'(t_0)}{K(t_0,t_0)}, \tag{7}$$

$$\varphi(0) = P(t_0) = -\frac{2}{1}\cdot 2\cdot 1 - \int_{-1}^{0}\frac{1}{1}2sds + \frac{3}{1} = -1 - s^2|_{-1}^{0} = -1 + 1 = 0$$

Тогда в силу теоремы решение интегрального уравнение (10) со условием (11) эквивалентно к следующему интегральному уравнению:

$$u(t) = -\int_0^t u(s)ds + P(t), \quad t\epsilon[0;1] \tag{12}$$

$$u(t) = -\int_0^t u(s)ds + P(t), \quad t\epsilon[0;1]$$

где

$$P(t) = 4(t-1) - \int_{t-1}^{0} 2sds + 2t + 3 = 4(t-1) + 2t + 3 - \int_{t-1}^{0} 2sds =$$
$$4t - 4 + 2t + 3 - -s^2|_{t-1}^{0} = 6t - 1 + (t-1)^2 =$$
$$= 6t - 1 + t^2 - 2t + 1 = t^2 + 4t, \quad t\epsilon[0;1] \tag{13}$$

Тогда решением интегрального уравнения (12) записывается в виде:

$$u(t) = P(t) - \int_0^t e^{-(t-s)}P(s)ds$$

$$u(t) = P(t) - \int_0^t e^{-(t-s)}P(s)ds = t^2 + 4t - \int_0^t e^{-(t-s)}(s^2 + 4s)ds =$$

$$= \begin{vmatrix} u = s^2 + 4s & dv = e^{-(t-s)}ds \\ du = (2s+4)ds & v = e^{-(t-s)} \end{vmatrix} =$$

$$= t^2 + 4t - e^{-(t-s)}(s^2 + 4s)|_0^t + \int_0^t e^{-(t-s)}(2s+4)ds =$$

$$= \begin{vmatrix} u = 2s + 4 \\ du = 2ds \end{vmatrix} =$$

$$= t^2 + 4t - (t^2 + 4t) + e^{-(t-s)}(2s+4)|_0^t - 2\int_0^t e^{-(t-s)}ds =$$

$$= 2t + 4 - 4e^{-t} - 2e^{-(t-s)}|_0^t =$$

$$= 2t + 4 - 4e^{-t} - 2 + 2e^{-t} = 2t + 2e^{-t} - 2 =$$

$$= 2(t + e^{-t} - 1)$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

окончательно получим:

$$u(t) = 2(t - e^{-t} + 1) \tag{14}$$

Пример 2. Рассмотрим следующее интегральное уравнение:

$$\int_{t-1}^{t} e^{t-s}u(s)ds = e^{t}; \quad t\epsilon[0;1] \tag{15}$$

с условием

$$u(t) = e^{t}, t\epsilon[-1;0] \tag{16}$$

Здесь $\alpha(t) = t - 1$, $t_0 = 0$, $\beta = -1$, $t_1 = 1$, $K(t,s) = e^{t-s}$, $\alpha'(t) = 1$, $f(t) = e^{t}$. Кроме того предположим, что при $t \in [-1;0]$ $u(t) = e^{t}$, $\varphi(t) = e^{t}$, $t \in [-1;0]$. В этом случае $K(t,\alpha(t)) = e$, $K'_t(t,s) = e^{t-s}$ $K(t,t) = 1$, при $(t,s) = G = \{(t,s): t - 1 \le s \le t \le 2\}$.

Проверим условии (6) и (7):

$$\int_{\alpha(t_0)}^{t_0} K(t_0,s)u(s)ds = f(t_0); \tag{6}$$

$$\int_{-1}^{0} e^{-s}e^{s}ds = \int_{-1}^{0} ds = s|_{-1}^{0} = 1$$

$$\varphi(t_0) = \frac{K(t_0,\alpha(t_0))}{K(t_0,t_0)}\varphi(\alpha(t_0))\alpha'(t_0) - \int_{\beta}^{t_0}\frac{K'_t(t_0,s)}{K(t_0,t_0)}\varphi(s)ds + \frac{f'(t_0)}{K(t_0,t_0)}, \tag{7}$$

$$\varphi(0) = ee^{-1} - \int_{-1}^{0} e^{-s}e^{s}ds + 1 = 1 - \int_{-1}^{0} ds + 1 = 2 - s|_{-1}^{0} = 1$$

Тогда в силу теоремы решение интегрального уравнение (15) со условием (16) эквивалентно к следующему интегральному уравнению:

$$u(t) = P(t) - \int_{0}^{t} e^{t-s}u(s)ds, \quad t\epsilon[0;1] \tag{17}$$

где

$$P(t) = ee^{t-1} - \int_{t-1}^{0} e^{t-s}e^{s}ds + e^{t} = e^{t} - e^{t}\int_{t-1}^{0} ds + e^{t} =$$
$$= 2e^{t} - e^{t}s|_{t-1}^{0} = 2e^{t} + e^{t}(t-1)$$
$$= 2e^{t} + e^{t}t - e^{t} = e^{t}t + e^{t} = e^{t}(t+1)$$
$$P(t) = e^{t}(t+1) \qquad t\epsilon[0;1] \tag{18}$$

Тогда решением интегрального уравнения (12) записывается в виде:

$$R(t,s) = -e^{(t-s)}e^{-(t-s)} = -1$$
$$u(t) = e^{t}(t+1) + \int_{0}^{t}(-1)e^{s}(s+1)ds = e^{t}(t+1) - \int_{0}^{t} e^{s}(s+1)ds =$$
$$= \begin{vmatrix} u = s+1 & dv = e^{s}ds \\ du = ds & v = e^{s} \end{vmatrix} = e^{t}(t+1) - [e^{s}(s+1)]_{0}^{t} + \int_{0}^{t} e^{s}ds =$$
$$= e^{t}(t+1) - e^{t}(t+1) + 1 + e^{s}|_{0}^{t} = 1 + e^{t} - 1 = e^{t}$$

т.е. окончательно получим

$$u(t) = e^{t} \tag{19}$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Литература:

1. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. Р. Некорректные задачи математической физики и анализа. - М: Наука, 1980.
2. Мартынюк А.А., Гутовски Р. Интегральные неравенства и устойчивость движения. - Киев: Наук Думка, 1979.
3. Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М. Моделирование развивающихся систем. - М: Наука, 1983 - 350 с.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. - М: Наука 1979. - 288 с.
5. Иманалиев М.И., Асанов А. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра I рода // Исслед. по интегро-дифф. уравнениям. - Фрунзе: Илим, 1988. - Вып. 21. - С.3-38;
6. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных двумерных интегральных уравнений Вольтера первого рода // ДАН 1991. - Т. 317. - №1. - С. 32-35.
7. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: Теория и численные методы. - Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1999. - 193 с.
8. Апарцин А.С., Караулова И.В., Маркова Е.В., Труфанов В.В. Применения интегральных уравнений Вольтерра для моделирования стратегий технического перевооружения электроэнергетики // Электричество, 2005, - №10. - С. 69-75.
9. Асанов А., Бекешов Т.О., Чоюбеков С.М. О решение неклассического интегрального уравнения I рода в пространстве не прерывных функции. / Вестник ОшГУ, №3. - Ош, 2012.
10. Чоюбеков С.М., Бекешов Т.О., Асанов А. Об одном классе неклассического интегрального уравнения Вольтерра I рода. / Вестник ОшГУ, №3. - Ош, 2014.
11. Чоюбеков С.М. Регуляризация решения неклассического интегрального уравнения со условиями Липшица. / Международный научный журнал «Молодой ученый», №8 (112). - Россия. - Казань, 2016.
12. Асанов А., Чоюбеков С.М. Регуляризация решения нелинейных уравнений Вольтерра I рода с условиями Липщица. / Журнал «Точная наука». - Выпуск, №23. - Кемерово, 2018.
13. Асанов А., Чоюбеков С.М. Решение неклассических интегральных уравнений Вольтерра I рода с вырожденным нелинейным ядром. / Международный научно- исследовательский журнал. - Екатеринбург, 2018. - № 4(70) - апрель.
14. Асанов А., Чоюбеков С.М. Выбор параметра регуляризации интегральных уравнений Вольтерра I рода с переменными пределами интеграла. / Журнал «Известия вузов Кыгрызстана», №1. - Бишкек, 2018.