DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 1, 2020

Бекмаматов З.М.

ЭСЕЛҮҮ МҮНӨЗДӨГҮЧТҮҮ ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ КУРАМА ЖАНА ГИПЕРБОЛАЛЫК ТИПТЕГИ ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЧЕКТИК МАСЕЛЕ

Бекмаматов З.М.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Z.M. Bekmatov

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION OF COMPOSITE AND HYPERBOLIC TYPES OF FOURTH ORDER WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

УДК: 517.956.6

Тегиздиктеги төртүнчү тартиптеги жекече туундусу менен берилген курама типтеги теңдемелер үчүн чектик маселелерди изилдөөгө Бицадзе А.В., Салахитдинов М.С., Джураев Т.Д., Сопуев А. өңдүү бир катар авторлордун иштери арналган. Үчүнчү жана төртүнчү тартиптеги курама жана гиперболо–параболалык типтеги теңдемелер үчүн түрдүү маселелер изилденген, о.э. функциялардын тиешелүү класстарындагы алардын коррективдүүлүгү тургузулган [2], [3] иштерде эселүү мүнөздөгүчтүү төртүнчү тартиптеги аралаш гиперболалык теңдемелер үчүн негизги баштапкы чектик маселелер каралган. [4] иште жекече туундулары менен берилген мүнөздөгүч сызыктуу жалгаштырууга ээ болгон төртүнчү тартиптеги сызыктуу гиперболалык жана аралаш-параболо-гиперболалык теңдемелер үчүн бир катар чектик маселелер изилденген.Төртүнчү тартиптеги курама жана гиперболалык типтеги теңдемелердин ушул сыяктуу маселелерин изилдөө өз алдынча илимий кызыгууну туудурат. Макалада төртүнчү тартиптеги курама жана гиперболалык типтеги теңдемелер үчүн $y=0$ *жалгаштыруу сызыктуу аймакта чектик маселе каралат. Чектик маселени өз алдынча эки маселеге келтирүү аркылуу анын чечиминин жашашы жана жалгыздыгы каралат. Каралган маселенин каралып жаткан аймактын тиешелеш камтылуучу аймактарындагы айкын түрдөгү чечимдери алынды.*

Негизги сөздөр: *курама теңдемелер, гиперболалык теңдемелер,чектик шарттар, жалгаштыруу шарттары, Гриндин функциясы, Гурсанын маселелери, Дирихленин маселелери.*

Изучению краевых задач для уравнений с частными производными четвертого порядка составного типа на плоскости посвящены работы ряда авторов Бицадзе А.В., Салахитдинова М.С., Джураева Т.Д., Сопуева А. И другие. Были исследованы различные задачи для уравнения составного и гиперболо-параболического типов третьего и четвертого порядков, а также установлены их корректности в соответствующих классах функций. В работах [2],[3] рассмотрены основные начально-краевые задачи для смешанных гиперболических уравнений четвертого порядка с кратными характеристиками. В работе [4] для линейных уравнений с частными производными четвертого порядка гиперболического и смешанно-параболо-гиперболического типов с характеристической линией сопряжения исследованы ряд краевых задач. Изучения аналогических вопросов для уравнения составного и гиперболического типов четвертого порядка безусловно имеют самостоятельный научный интерес. В статье рассматривается краевая задача в области с линией сопряжения $y=0$ *для уравнения составного и гиперболического типов четвертого порядка. Путем сведение краевой задачи к двум самостоятельным задачам, установлено её однозначной разрешимости. Получены формулы представления решения задачи в соответствующих подобластях рассматриваемой области в явном виде.*

Негизги сөздөр: *составные уравнения, гиперболические уравнения, предельные условия, условия сопряжения, функция Грина, вопросы Гурсы, вопросы Дирихле.*

Studying of boundary value problem for partial differential equations of composite types of fourth order considered in papers written by such authors as A.V. Bitsadze, M.S. Salakhitdinov, T.D. Juraev, A. Sopuev, at al. It was investigated of different problems for equations of composite and hyperbolic-parabolic types of a threes, fourth orders, so her correctness are given in corresponding spaces. In papers[2], [3] are considered the basic of boundary value problems for equations of mixed hyperbolics types of fourth order with multiple characteristics. In paper [4], for linear partial differential equations of fourth order of hyperbolic and of mixed-parabolic-hyperbolic types with characteristic line of conjugation was investigated series boundary value problems. Investigation the

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 1, 2020

same problems of impotence for partial differential equations of composite and hyperbolic types of fourth order are haved. In this paper we are considered of boundary value problem in domain with conjugation line $y=0$ *for equations of composite and hyperbolic types of fourth order. By reducing of boundary value problem in to two independent problems are proved of uniqly solvability. The formula of the solution of problem has been obtained in respective sub regions of regions under consideration.*

Key words: *compound equations, hyperbolic equations, limit conditions, conjugation conditions, Green's function, Goursat problems, Dirichlet problems.*

1. В области $D=D_1\cup D_2$ рассмотрим уравнения четвертого порядков

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0,\ (x,y)\in D_1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}=F(x,y),\ (x,y)\in D_2, \tag{2}$$

в котором D – прямоугольник со сторонами $AA_1: x=0,\ AB: y=h_1,\ BB_1: x=l$, $A_1B_1: y=-h_2$ $(h_1,h_2,l>0): D_1=\{(x,y)\in D,\ y>0\}$, $D_2=\{(x,y)\in D,\ y<0\}$, $F(x,y)$ – заданная области D_2 непрерывная функция.

Рассмотрим следующую задачу: ищется решение уравнения (1), (2) из класса $C(\overline{D})\cap C^3(D)\cap\left[C^{4+0}(D_1)\cup C^{2+2}D_1\right]$ и $C(\overline{D})\cap\left[C^3(\overline{D}_2)\cup C^{2+2}(D_1)\right]$ соответственно, с дополнительными условиями на границе

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ \ u(l,y)=\varphi_2(y),\ \ 0\le y\le h_1, \tag{3}$$

$$u_{xx}(0,y)=\varphi_3(y),\ u_{xx}(l,y)=\varphi_4(y),\ \ 0\le y\le h_1, \tag{4}$$

$$u(x,h_1)=\varphi(x),\qquad 0\le x\le l, \tag{5}$$

$$u(0,y)=\psi_1(y), \tag{6}$$

$$u_x(0,y)=\psi_2(y),\ \ -h_2\le y\le 0, \tag{7}$$

$$u_y(x,-h_2)=\psi_3(x),\ \ 0\le x\le l. \tag{8}$$

Здесь $\varphi(x),\ \ \varphi_i(y),\ \ \psi_j(x),\ \ (i=\overline{1,4};\, j=\overline{1,3})$ – функции, со следующими свойствами

$$\varphi_i(y)\in C^3[0,h_1],\ (i=1,2),\ \varphi_k(y)\in C^2[0,h_1],\ (k=3,4), \tag{9}$$

$$\varphi(x)\in C^3[0,l],\ \psi_j(y)\in C^2[-h_2,0],\ (j=\overline{1,3}), \tag{10}$$

а также с условиями согласования и сопряжения

$$\psi_1(0)=\varphi_1(0),\ \psi_2'(-h_2)=\psi_3'(0),\ \varphi(0)=\varphi_1(h_1),\ \varphi(l)=\varphi_2(h_1), \tag{11}$$

$$u(x,+0)=u(x,-0)=\tau(x),\qquad u_{yy}(x,+0)=u_{yy}(x,-0)=\mu(x),\ \ 0\le x\le l, \tag{12}$$

в котором функции $\tau(x)$ и $\mu(x)$ – будут определены ниже.

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Предлагаемый резултать является продолжением работ А.С.Сопуева и его учеников [1] - [6], где рассматриваются корректные задачи для уравнения гиперболического и параболического типов третьего, четвёртого порядков с кратными характеристиками. В статье устанавливается однозначная разрешимость краевой задачи для уравнения составного и гиперболического типов четвёртого порядка.

Сперва задачу (1) – (8) разделим на две отдельные задачи;

Задача 1. Требуется определить решение уравнения (1) в области D_1 из класса $C^2(\overline{D})\cap C^3(D)\cap\left[C^{4+0}(D_1)\cup C^{2+2}(D_1)\right]$ по условиями (3) - (5) и

$$u(x,+0)=\tau(x),\quad 0\le x\le l. \tag{13}$$

Задача 2. Требуется определить решение уравнения (2) в области D_2 из класса $C(\overline{D})\cap\left[C^3(\overline{D_2})\cup C^{2+2}(D_2)\right]$, по условиям (6) - (8) и

$$u(x,-0)=\tau(x),\ 0\le x\le l. \tag{14}$$

2. Здесь удобно обозначить

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=z(x,y),\quad (x,y)\in D_1 \tag{15}$$

Тогда уравнение (1) запишем в виде

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\quad (x,y)\in D_1$$

Общее решение этого уравнение запишем в виде

$$z(x,y)=\varpi_1(y)x+\varpi_2(y), \tag{16}$$

в котором $\varpi_1(y)$ и $\varpi_2(y)$ – произвольные вещественные функции.

Используя граничные условия (3), (4) и учитывая (15) имеем следующие условия:

$$z(0,y)=\varphi_3(y)+\varphi_1''(y),\ \ z(l,y)=\varphi_4(y)+\varphi_2''(y),\ \ 0\le y\le h.$$

Подставляя (15) в левые части этих соотношений получим

$$\begin{aligned}&\omega_2(y)=\varphi_3(y)+\varphi_1''(y),\quad 0\le y\le h,\\&\omega_1(y)=\frac{1}{l}\left[\varphi_4(y)+\varphi_2''(y)-\varphi_3(y)-\varphi_1''(y)\right],\quad 0\le y\le h.\end{aligned} \tag{17}$$

Таким образом, правая часть (16) будет известная функция, т.е.

$$z(x,y)=\omega_1(y)x+\omega_2(y)\equiv z_0(x,y),$$

Учитывая условия сопряжения (12) из уравнения (15) при $y\to+0$ получим

$$\tau''(x)+\mu(x)=z_0(x,0),\qquad 0\le x\le l, \tag{18}$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 1, 2020

Решение задачи $\tau(0)=\varphi_1(0),\ \tau(l)=\varphi_2(0),$ для уравнение (18) определяются формулой

$$\tau(x)=\alpha(x)+\int_0^l G(x,t)\mu(t)dt,$$

здесь

$$\alpha(x)=\varphi_1(0)+\frac{x}{l}\left[\varphi_2(0)-\varphi_1(0)\right]+\int_0^l G(x,t)z_0(t,0)dt,$$

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{x(t-l)}{l},\ 0\le x<t,\\ \dfrac{t(x-l)}{l}, t\le x\le l,\end{cases}$$ – функция Грина.

3. Задача Гурса. В области D_2 для уравнения (2) зададим условия (6) – (8) и

$$u(x,-0)=\tau(x),\quad 0\le x\le l. \tag{19}$$

Нетрудно убедиться, что общее решение уравнения (2) может быть представлено

$$u(x,y)=f_1(x+y)+f_2(x-y)+f_3(y)+f_4(x)+\Phi(x,y), \tag{20}$$

в котором $f_1(x+y)$, $f_2(x-y)$ - произвольные четырежды непрерывно дифференцируемые функции, а $f_3(y),\ f_4(x)$ произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции:

$$\Phi(x,y)=\int_0^x\int_{-h_2}^y (x-t)(y-t_1)F(t,t_1)dtdt_1 .$$

Подставляя (20) в условия (6) – (8) и (12) и определив f_1, f_2, f_3 и f_4 имеем представление для функции $u(x,y)$

$$u(x,y)=\psi_1(y)+(x+y)\psi_2(y)-2(x+y)\int_y^0\psi_3(t)dt-4\int_y^0(y-t)^2\psi_3(t)dt-(x-y)\Psi'(0)-(x+y)\Phi'(0)-$$

$$-2xy\Phi''(0)+F_1(x+y)+F_2(x-y), \tag{21}$$

где

$$F_1(x+y)=\Phi(x+y)-\Phi(0),\quad F_2(x-y)=\Psi(x-y)-\Psi(0),$$

$$\Psi(x-y)=4\int_{\frac{y-x}{2}}^0\left(\frac{y-x}{2}-t\right)^2\psi_3(t)dt-\frac{1}{2}(y-x)^2\Phi''(0)-(y-x)\Psi'(0)+\Psi(0). \tag{22}$$

4. Дважды дифференцируя формулу (21) по y будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x\psi_2''(y)+\psi_1''(y),\quad -h_2\le y\le 0. \tag{23}$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Далее, при $y \to -0$ из (23) учитывая (12) получим

$$\mu(x) = x \cdot \psi_2(0) + \psi_1(0). \qquad (24)$$

Теперь подставляя (24) в соотношение (18) находим функцию $\tau(x)$, и тем самым решение задачи 2.

5. Таким образом, определив значение функции $u(x,0) = \tau(x)$ на линии сопряжения, можно определить функцию $u(x, y)$ в области D_1 при помощи задачи Дирихле, которое имеет решение и дается формулой

$$u(x,y) = \int_0^l G_\eta(x,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi - \int_0^l G_\eta(x,y;\xi,h)\varphi(\xi)d\xi + \int_0^h G_\xi(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta - \int_0^h G_\xi(x,y;l,\eta)\times$$

$$\times\varphi_2(\eta)d(\eta) - \int_0^l d\xi \int_0^h G(x,y;\xi,\eta)z_0(\xi,\eta)d\eta, \qquad (25)$$

в котором

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{4lh}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{h^2n^2 + l^2m^2}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{h}y\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)\sin\left(\frac{\pi m}{h}\eta\right)$$ – функция Грина [6].

Итак, имеет место:

Теорема. Пусть выполняются условия (9) – (11). Тогда задача (1) – (8) однозначно разрешимо и её решение можно представлять формулами (21) и (25) в соответствующих подобластях области D.

Литература:

1. Сопуев А. Краевые задачи для уравнения четвертого порядка и уравнения смешанного типа / Дисс. д.ф.-м.н. - Бишкек, 1996. - 235 с.
2. Сопуев А.С., Осмоналиев А.Б. Краевые задачи для смешанно-гиперболических уравнений четвертого порядка с характеристической линией перехода / Труды Межд. научн. конф. «Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики». - Ташкент, 2004. Т.1. - С. 152-157.
3. Осмоналиев А.Б. Краевые задачи для гиперболических и смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка / Дисс… к.ф.-м.н., 01.01.02. - Ош, 2007. - 126с.
4. Бекмаматов З.М. О разрешимости задачи сопряжения для одного класса уравнения составного и гиперболического типов четвертого порядка на плоскости / Сборник статей по материалам XIII международной научно-практической конференции. - Новосибирск, 2016. - 87 с.
5. Babaev S., Bekmamatov Z. A boundary value problem for an equation of composite and hyperbolic types of the fourth order with an interface line of on the plane/ V International Scientific Conference “Asymptotical, Topological and Computer Methods in Mathematics” devoted to the 85 anniversary of Academician M. Imanaliev. Kyrgyzstan. - Bishkek, 2016.
6. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. - М.: Физматлит, 2001. - 576 с.