DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 9, 2019

*Шалпыков Б.К., Абдраимова М.А.*

# БИР КАЛЫПТАГЫ АЧЫК КӨПТҮКТӨРДҮН ИЧКИ МҮНӨЗДӨМӨСҮ

*Шалпыков Б.К., Абдраимова М.А.*

# ВНУТРЕННЯЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАВНОМЕРНО ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ

*B.K. Shalpykov, M.A. Abdraimova*

# INTERNAL CHARACTERIZATION OF UNIFORMLY OPEN SETS

*УДК: 515.12*

*Бул иште чектүү бир калыптуу ачык көптүктөрдүн жардамы менен аныкталган, бир калыптагы ачык көптүктөрдүн жана Хараламбустун өлчөмдөрүнүн жаңы касиеттери тургузулат. Жана дагы бир калыптуу эмес ачык көптүктөрдүн мисалдары келтирилген жана бир калыптагы ачык көптүктөрдүн ички мүнөздөмөсү тургузулат. Булардын негизинде бир калыптагы ачык көптүктөрдүн көптөгөн белгилүү касиеттери далилденет. Ачык көптүктөрдүн бар экендигин көрсөткөн мисалдарда бир калыптагы ачык көптүктөрдүн жаңы касиеттери тургузулду жана бир калыптагы ачык көптүктөрдүн ички мүнөздөмөсү дагы далилденди.*

***Негизги сөздөр:*** *бир калыптагы ачык көптүктөрдүн ички мүнөздөмөсү, ачык көптүк, топологиялык мейкиндик, $A(\mathfrak{m})$ - мейкиндиги, бикомпакт, ординал, ассоцирленген метрикалык мейкиндик, ачык көптүктөрдүн санактуу системасы, диагональ, $\mathrm{L}(uX)$ жыйындысы.*

*В этой статье устанавливаются новые свойства равномерно открытых множеств и Хараламбусовской размерности, определенной при помощи конечных равномерно открытых множеств. А также приводятся примеры открытых не равномерно открытых множеств, и устанавливается внутренняя характеристика равномерно открытых множеств при помощи которой, доказываются другим методом несколько известных свойств равномерно открытых множеств. Установлены новые свойства равномерно открытых множеств, которые иллюстрируются рядом примеров, в которых показано существование открытых множеств, не являющихся равномерно открытым, и доказательством внутренней характеристики равномерно открытых множеств, с приложениями.*

***Ключевые слова:*** *внутренняя характеристика равномерно открытых множеств, открытое множество, топологическое пространство, пространство $A(\mathfrak{m})$, бикомпакт, ординал, ассоциированное метрическое пространство, счетная система открытых множеств, диагональ, семейство $\mathrm{L}(uX)$.*

*In this paper, new properties of uniformly open sets and the Charalambus dimension defined by finite uniformly open sets are established. Examples of open nonuniformly open sets are also given, and the internal characteristic of uniformly open sets is established by means of which several known properties of uniformly open sets are proved by another method. New properties of uniformly open sets are established, which are illustrated by a number of examples that show the existence of open sets that are not uniformly open, and a proof of the internal characteristic of uniformly open sets, with applications.*

***Key words:*** *internal characterization, open set, compactum, ordinal, associated metric space, countable system of open sets, diagonal.*

Из определения равномерно открытых множеств следует, что всякое равномерно открытое множество открыто, обратное неверно. В работах Хараламбуса [3], [4] отмечено, что существуют примеры равномерных пространств, в которых существуют открытые, но не равномерно открытые множества. К сожалению, в этих работах такие примеры не приведены. Ниже приводятся примеры известных равномерных пространств, в которых устанавливаются открытые не равномерно открытые множества.

**Пример 1**. Пусть $X$ – произвольное несчетное множество и $|X| = \mathfrak{m} > \aleph_0$. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in X$ и наделим $X$ следующей топологией: *открытыми множествами объявляется все подмножества $X$, не содержащие точки $x_0$, и все подмножества $X$, имеющие конечные дополнения.*

Полученное топологическое пространство обозначается, как $A(\mathfrak{m})$ и называется *пространством выделённой точки* ([5]). Известно, что пространство $A(\mathfrak{m})$ является хаусдорфовым бикомпактом, следовательно, оно нормально, однако оно не является совершенно нормальным ([5]). На самом деле любое $F_\sigma$ – множество в

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



$A(\mathfrak{m})$, не содержащее единственную точку накопления $x_0$ пространства $A(\mathfrak{m})$, счётно. Тогда множество $U = A(\mathfrak{m}) \setminus \{x_0\}$ – открыто, но не функционально – открыто, т.к. множество $U$ не является $F_\sigma$ – подмножеством.

На бикомпакте $A(\mathfrak{m})$ единственная равномерность, следовательно, множество всех функционально открытых множеств и множества всех равномерно открытых множеств совпадают. Тогда открытое множество $U$ не является равномерно открытым.

ПРИМЕР 2. Бикомпакт $X$ – "Двойная окружность Александрова" также имеет открытое, но не равномерно открытое, относительно единственной равномерности, множество. Напомним определение бикомпакта $X: X = S^1 \cup S^2$, где $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ и $S^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2^2\}$ – две концентрические окружности. Обозначим через $\pi : S^1 \to S^2$ – проектирование окружности $S^1$ на окружности $S^2$ из точки $(0, 0)$. На бикомпакте $X$ топология определяется при помощи систем окрестностей $\{\mathcal{B}(z) : z \in X\}$. Для точек $z \in S^1$ имеем $\{\mathcal{B}(z) = \{U_i : (z) : i \in \mathbb{N}\}$, где $U_i(z) = V_i \cup \pi(V_i \setminus \{z\})$ и $V_i$ является дугой длины $1/i$ окружности $S^1$ с серединой в точке $z$, а для точек $z \in S^2$ имеем $\mathcal{B}(z) = \{\{z\}\}$.

Пространство $S^2 \subset X$ является дискретным подпространством мощности $\mathfrak{c}$, оно открыто и, по определению топологии $X$, всюду плотно в $X$.

Подпространство $S^2$ не является $F_\sigma$ – подпространством, следовательно, оно не является функционально открытым и не является равномерно открытым относительно единственной равномерности бикомпакта $X$.

ПРИМЕР 3. Пусть $\omega_1$ – первый несчётный ординал и $T(\omega_1)$ – множество всех ординалов меньших или равных $\omega_1$, т.е. $T(\omega_1) = \{\alpha : \alpha \le \omega_1\}$. Множество $T(\omega_1)$ является вполне упорядоченно естественным порядком "$<$" – сравнения ординальных чисел. Относительно топологии порожденной базой $\mathcal{B}$, состоящей из всех интервалов виде $(y, x) = \{z \in T(\omega_1) : y < z \le x\}$, где $y < x \le \omega_1$ и одноточечного множества $\{0\}$, где $0$ – порядковый или пустого множества, $T(\omega_1)$ – является хаусдорфовым бикомпактом. Рассмотрим пространство $T(\omega_0) = T(\omega_1) \setminus \{\omega_1\}$. Пространство $T(\omega_0)$ – нормально ([2]).

Множество $F$ всех счётных предельных ординалов замкнуто в $T(\omega_0)$ и не существует непрерывной функции $f : T(\omega_0) \to I[0, 1]$ такой, что $F = f^{-1}(0)$, т.е. $F$ – не является $G_\delta$ – подмножеством в $T(\omega_0)$. Тогда множество $U = T(\omega_0) \setminus F$ – открыто и не является функционально открытым. Тогда множество $U$ – не является равномерно открытым относительно предкомпактной равномерности индуцированной на $T(\omega_0)$ из бикомпакта $T(\omega_1)$.

Следующая теорема дает "внутреннюю" характеристику равномерно открытых подмножеств данного равномерного пространства.

ТЕОРЕМА 1. *Подмножество $A \subseteq X$ равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ равномерно открыто тогда и только тогда, когда существует нормальная последовательность равномерных покрытий $\{\alpha_n^A : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{U}$ такая, что для всякого $x \in A$ существует натуральное число $m(x) \in \mathbb{N}$ такое, что $\alpha_{m(x)}^A(x) \subseteq A$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть подмножество $A \subseteq X$ равномерно открыто. Тогда существует равномерно непрерывное отображение $f : (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{U}_d)$ – равномерного пространство $(X, \mathcal{U})$ в метрическое пространство $(Y, d)$, где $\mathcal{U}_d$ – метрическая равномерность, и открытое подмножество $V \subset Y$ такое, что $A = f^{-1}(V)$. Метрическая равномерность $\mathcal{U}_d$ имеет счетную базу $\mathcal{B} = \{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$. Не умаляя общности можно считать, что система

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



$\{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$ – образует нормальную последовательность покрытий, т.е. $\beta_{n+1}{}^* \succ \beta_n$, для всех $n \in \mathbb{N}$ ([1]).

Положим $\{\alpha_n = f^{-1}(\beta_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Тогда в силу равномерной непрерывности отображения $f : (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{U}_d)$, $\alpha_n \in \mathcal{U}$ для любого $n \in N$ и система $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ – является нормальной системой покрытий. Покажем, что система равномерных покрытий $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ является искомой, т.е. выполнено условие теоремы.

Пусть $x \in A = f^{-1}(V)$. Тогда $y = f(x) \in V$. Так как $\mathcal{B} = \{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$ – база равномерности $\mathcal{U}_d$, то существует такой номер $m(x) \in \mathbb{N}$, что $\beta_{m(x)}(y) \subset V$. Покажем, что выполнено включение $\alpha_{m(x)}(x) \subset A$. Пусть $z \in \alpha_{m(x)}(x)$ – произвольное. Имеем $\alpha_{m(x)}(x) = \cup\{f^{-1}(B) : B \in \beta_{m(x)}$ *и* $x \in f^{-1}(B)\}$. Тогда существует $B_z \in \beta_{m(x)}$ такое, что $z \in f^{-1}(B_z)$ и $x \in f^{-1}(B_z)$.

Тогда $f(z) \in B_z$ и $y = f(x) \in B_z$, т.е. $f(z) \in \beta_{m(x)}(y) \subset V$ и, следовательно, $z \in f^{-1}(f(z)) \subset f^{-1}(V) = A$. Итак, $\alpha_{m(x)}(x) \subset A$ и условие теоремы выполнено.

Обратно, пусть для множества $A \subset X$ выполнено условие теоремы, т.е. существует такая нормальная последовательность $\{\alpha_n^A : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{U}$ равномерных покрытий, что для всякой точки $x \in A$ существует номер $m(x) \in \mathbb{N}$ такой, что $\alpha_{m(x)}^A(x) \subset A$. В силу нормальности последовательности равномерных покрытий $\{\alpha_n^A : n \in \mathbb{N}\}$, согласно метризационной лемме, существует, равномерно непрерывная относительно равномерности $\mathcal{U}$, псевдометрика $d$ на $X$ такая, что выполнено $\alpha_{n+1}^A(x) \subseteq \{y : d\{x, y\} < 2^{-(n+1)}\} \subseteq \alpha_n^A(x)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для каждого $x \in X$. В псевдометрическом пространстве $(X, d)$ будем полагать $x \sim y$ тогда и только тогда $d(x, y) = 0$. Нетрудно проверить, что отношение "$\sim$" является отношением эквивалентности. Определим фактор – множество $\overline{X} = X / \sim$ и определим метрику $\overline{d}$ на $\overline{X}$. Пусть $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{X}$, где $\overline{x} = \{x' \in X : d(x, x') = 0\}$ и $\overline{y} = \{y' \in X : d(y, y') = 0\}$.

Пусть $a \in \overline{x}$ и $b \in \overline{y}$ – произвольные, тогда $d(x, y) \le d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) = d(a, b)$ и $d(a, b) \le d(x, a) + d(x, y) + d(y, b) = d(x, y)$, т.е. $d(x, y) = d(a, b)$ для любых $a \in \overline{x}$ и $b \in \overline{y}$. Положим $\overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) = d(x, y)$. Легко проверить, что $\overline{d}$ является метрикой на $\overline{X}$. Метрическое пространство $(\overline{X}, \overline{d})$ называется *ассоциированным метрическим* пространством с псевдометрическим пространством $(X, d)$. Сопоставляя каждому элементу множества $X$ класс эквивалентности, которому он принадлежит, определяется естественная проекция $\pi : X \to \overline{X}$. Тогда для любого $\overline{x} \in \overline{X}$ имеем, по определению, $\pi^{-1}(\overline{x}) = \{x' : d(x, x')\} = 0$. По определению отображения $\pi : (X, d) \to (\overline{X}, \overline{d})$ имеем $A = \pi^{-1}(\pi(A))$. Теперь достаточно доказать, что $\pi(A)$ открытое подмножество метрического пространство $(\overline{X}, \overline{d})$. Пусть $\overline{x} \in \pi(A)$ – произвольная точка. Тогда для любой точки $y \in \pi^{-1}(\overline{x})$ имеем $d(x, y) = 0$, т.е. $x \in A$. По условию теоремы существует номер $m(x) \in \mathbb{N}$ такой, что $\alpha_{m(x)}^A(x) \subset A$. Тогда имеем $\{y : d(x, y) < 2^{m(x)+1}\} \subseteq \alpha_{m(x)}$, следовательно $\{\overline{y} : \overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) < 2^{-m(x)+1}\} \subseteq \pi(A)$, что означает, точка $\overline{x}$ внутренняя точка множества $\pi(A)$ и, следовательно, $\pi(A)$ – открытое подмножество метрического пространства $(\overline{X}, \overline{d})$. Отображение $f : (X, \mathcal{U}) \to (\overline{X}, \overline{d})$, где $f = \pi \circ 1_X$,

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



$\pi:(X,\,d)\to(\overline{X},\,\overline{d})$, $1_X:(X,\,\mathcal{U})\to(X,\,d)$ – равномерно непрерывное отображение и как мы отмечали выше $A\in\pi^{-1}(\pi(A))$. Это означает, что $A$ – равномерно открытое множество.

ТЕОРЕМА 2. *Семейство* $\mathrm{L}(uX)$ *всех равномерно открытых подмножеств равномерного пространства* $(X,\,\mathcal{U})$ *образует базу равномерной топологии* $\tau_u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Согласно критерию базы ([5]) проверим для равномерно открытых множеств аксиомы базы. Пусть $0\subset X$ произвольное открытое множество равномерной топологии $\tau_u$ и $x\in O$ произвольная точка. По определению равномерной топологии $\tau_u$ ([1]) существует равномерное покрытие $\alpha\in\mathcal{U}$ такое, что $\alpha(x)\subset O$. Для равномерного покрытия $\alpha\in\mathcal{U}$ рекуррентно строится нормальная последовательность покрытий $\{\beta_n : n\in\mathbb{N}\}$ такая, что $\beta_{n+1}{*}\succ\beta_n$ и $\beta_1{*}\succ\alpha$. Тогда имеем следующие включения: $x\in\beta_1(x)\subset\beta_1(B_x)\subset\alpha(x)\subset O$, где $B_x\in\beta_1$ и $x\in B_x$. Из теоремы легко заметить, что множество $\alpha(x)$ является равномерно открытым.

2) Пусть $O_1, O_2\in B$ произвольные два равномерно открытые множества. Существует последовательность нормальных покрытий $\{\alpha_n^i : n\in\mathbb{N}\}$, $i=1,\,2$, удовлетворяющих определению равномерной открытости из теоремы т.е. для любой точки $x^i\in O_i$ существует $m(x^i)\in\mathbb{N}$ такой, что $x^i\in\alpha^i_{m(x^i)}(x^i)\subseteq O_i$, $i=1,\,2$.

Пусть $\beta_{ij}=\{\alpha_i^1\wedge\alpha_j^2 : i,j\in\mathbb{N}\}$, тогда $\beta_{ij}=(i,\,j)\in\{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$ – счетная система равномерных покрытий и для каждого фиксированного $i\in\mathbb{N}$, $j\in\mathbb{N}$ последовательности равномерно покрытий, т.е. $\beta_{ij+1}{*}\succ\beta_{ij}$ для всех $j\in\mathbb{N}$ и $\beta_{i+1j}{*}\succ\beta_{ij}$ для всех $i\in\mathbb{N}$. Итак мы имеем бесконечную матрицу покрытий $\{\beta_{ij}:(i,\,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$. Бесконечная диагональ $\{\beta_{ii}: i\in\mathbb{N}\}$ бесконечной матрицы $\{\beta_{ij}:(i,\,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$ образует, по своему определению, нормальную последовательность покрытий, т.е. $\beta_{i+1,\,i+1}{*}\succ\beta_{ii}$, $i\in N$, где $\beta_{ii}=\alpha_i^1\wedge\alpha_i^2$.

Пусть $x\in O_1\cap O_2$, тогда существует $m_i(x)\in\mathbb{N}$, $i=1,\,2$ такой, что $\alpha^1_{m_i(x)}(x)\subset O_1$ и $\alpha^2_{m_i(x)}(x)\subset O_2$. Пусть $k=\max\{m_1(x),\,m_2(x)\}$. Тогда $\alpha_k^1\wedge\alpha_k^2\succ\alpha^1_{m_1(x)}\wedge\alpha^2_{m_2(x)}$ и $\beta_{k+1}{*}\succ\beta_k$, где $\beta_{k+1}\succ\alpha^1_{k+1}\wedge\alpha^2_{k+1}$. Ясно, что $\beta_{k+1}(x)\subset\alpha^1_{ki}\wedge\alpha^2_k(x)\subset\alpha^1_{m_1(x)}(x)\cap\alpha^2_{m_2(x)}\subset O_1\cup O_2$. Положим $O_3=\beta_{k+1}(x)$. Тогда $O_3$ равномерно открыто и $O_3\subseteq O_1\cap O_2$.

Итак, свойства 1), 2) доказывает, что равномерно открытые множества образуют базу равномерной топологии.

Теорема доказана.

Семейство $\mathrm{L}(uX)$ замкнуто относительно конечных пересечений и счётных объединений. Этот факт мы теперь сделаем с приложением результатов теоремы 1.

ТЕОРЕМА 3. *Семейство* $\mathrm{L}(uX)$ *всех равномерно открытых множеств замкнуто относительно конечных пересечений и счетных объединений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $O_1,\,O_2 ... O_3$ – конечная система равномерно открытых множеств. Для каждого $O_i$, $i=1,2,...,k$, по определению равномерно открытых подмножеств, существует нормальная последовательность $\{\alpha_n^i : n\in\mathbb{N}\}$, удовлетворяющая условиям теоремы 1.

Положим $\beta_{i_1 i \dots i_n}=\{\alpha^1_{i_1}\wedge\alpha^2_{i_2}\wedge\ldots\wedge\alpha^n_{i_n} :\, i_1,\,i_2 ... i_n\in\mathbb{N}^{\,n}\}$ – счетная система равномерных покрытий и для каждых фиксированных наборов из $(n-1)$ индексов последовательность равномерных покрытий $\{\beta_{i_1 i\dots j\dots i_n} : j\in\mathbb{N}\}$ является нормальной, т.е. $\beta_{i_1 i_2\dots j+1\dots i_n}{*}\succ\beta_{i_1 i_2\dots j\dots i_n}$.

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



«Диагональ» $\{\beta_{ii_n\ldots i} : i \in \mathbb{N}\}$ бесконечной матрицы $\{\beta_{i_1\ldots i_n} : (i_1 \ldots i_n) \in \mathbb{N}^n\}$ также является нормальной последовательностью покрытий и для множества $O = \cap_{i=1}^{n} O_i$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Итак, $O$ – равномерно открыто.

Пусть $O_i$, $i \in \mathbb{N}$ – счетная система открытых множеств. По определению равномерно открытых множеств для каждого $i \in \mathbb{N}$ существует нормальная последовательность равномерных покрытий $\{\alpha_n^i : n \in \mathbb{N}\}$, удовлетворяющая теореме 2. Прилагая процедуру «нормализуем» к счетной системе покрытий $\{\alpha_n^i : (n, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$, получим нормальную систему равномерных покрытий $\{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$, удовлетворяющую условиям теоремы 1 для множества $\cap O_{i=1}^{\infty} = W$. Итак, $W$ – равномерно открыто.

Теорема доказана.

**Литература:**


1. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения / А.А. Борубаев. - Фрунзе: Илим, 1990. - 171 с.
2. Скляренко Е.Г. О вложении нормальных пространств в бикомпакты того же веса и той же размерности / Е.Г. Скляренко // Докл. АН СССР. - 1958. - Т. 123, - №1. - С. 36-39.
3. Хараламбус. A new covering dimension function for uniform spaces / M.G. Charalambous // London Math. Soc. - 1975. - Vol.11, - №2. - P. 137-143.
4. Хараламбус. Uniform Dimension Function. Ph. D dissertation / M.G. Charalambous. - London, 1971.
5. Энгелькинг Р. Общая топология / Р.Энгелькинг. - М.: Мир, 1986. - 744 с.
6. Шалпыков Б.К., Абдраимова М.А. О равномерной аналогии метрической размерности точечных множеств. / Республиканский научно-теоретический журнал «Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана», №3. - Бишкек, 2017. - С.3-6.