DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 9, 2019

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Канетов Б.Э., Жанакунова М.О., Абдыбачаев А.К.

КОМПАКТУУ ЧАГЫЛДЫРУУЛАРДЫН АЙРЫМ ТИПТЕРИ ЖӨНҮНДӨ

Канетов Б.Э., Жанакунова М.О., Абдыбачаев А.К.

О НЕКОТОРЫХ ТИПАХ КОМПАКТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

B.E. Kanetov, M.O. Janakunova, A.K. Abdybachaev

ABOUT SOME TYPES OF COMPACT MAPPINGS

УДК: 515.12

Акыркы мезгилдерде жалпы топологияда үзгүлтүксүз чагылдыруулардын теориясы тездик менен өнүгүүдө. Ал теория топологиялык мейкиндиктерге тиешелүү болгон негизги түшүнүктөрдүн жана натыйжалардын чагылдырууларга жайылтылышына арналган. Белгилүү болгондой, каалагандай топологиялык мейкиндикти үзгүлтүксүз чагылдыруунун айрым учуру катары кароого болот, мында мейкиндик чекитке чагылдырылат. Ошондон улам төмөнкүдөй табигый маселе жаралат: топологиялык мейкиндиктеги түшүнүктөрдү жана натыйжаларды чагылдырууларга жайылтуу. Бул илимий макалада τ - финалдуу паракомпакттуу, күчтүү τ - финалдуу паракомпактуу жана τ - толук паракомпактуу мейкиндиктер изилденет. Каалагандай τ - финалдуу паракомпактуу, күчтүү τ - финалдуу паракомпактуу жана τ - толук паракомпактуу мейкиндикти τ - финалдуу паракомпактуу, күчтүү τ - финалдуу паракомпактуу жана τ -толук паракомпактуу чагылдыруулардын айрым учуру катары кароого болору көрсөтүлгөн. τ - финалдуу паракомпактуу, күчтүү τ - финалдуу паракомпактуу жана τ - толук паракомпактуу чагылдыруулардын түрдүү касиеттери тургузулган. τ - финалдуу паракомпактуу, күчтүү τ - финалдуу паракомпактуу жана τ - толук паракомпактуу мейкиндиктердин τ - финалдуу паракомпактуу, күчтүү τ - финалдуу паракомпактуу жана τ - толук паракомпактуу чагылдырууларда кайра элес жагына сакталышы далилденген.

Негизги сөздөр: *үзгүлтүксүз чагылдыруу, ачык жабдуу, τ - финалдуу паракомпактуу чагылдыруу, күчтүү τ - финалдуу паракомпактуу чагылдыруу, τ - толук паракомпактуу чагылдыруу.*

В последнее время в общей топологии интенсивно развивается теория непрерывных отображений. Она посвящена распространению на отображения основных понятий и утверждений, касающихся топологических и равномерных пространств. Хорошо известно, что любое топологическое пространство можно рассматривать как частный случай непрерывного отображения, отождествляя это пространство с отображением его в точку. При этом естественно возникает следующая задача: распространить на отображения понятий и утверждений, имеющихся для топологических пространств. В настоящей статье изучается τ - финально паракомпактные, сильно τ - финально паракомпактные и τ - вполне паракомпактные отображения. Легко показывается, что любое τ - финально паракомпактное, сильно τ - финально паракомпактное и τ - вполне паракомпактное пространство можно рассматривать как частный случай τ -финально паракомпактного, сильно τ - финально паракомпактного и τ - вполне паракомпактного отображения, отождествляя это пространство с отображением его в точку. Устанавливается различные характеристики τ - финально паракомпактных, сильно τ - финально паракомпактных, τ - вполне паракомпактных и компактных отображений. В частности доказывается, что при τ - финально паракомпактных, сильно τ -финально паракомпактных и τ - вполне паракомпактных отображениях τ - финально паракомпактность, сильно τ - финально паракомпактность и τ - вполне паракомпактность сохраняется в сторону прообраза.

Ключевые слова: *непрерывное отображение, открытое покрытие, τ - финально паракомпактное отображение, сильно τ - финально паракомпактное отображение, τ - вполне паракомпактное отображение.*

Recently, the theory of continuous mappings has been intensively developed in general topology. It is devoted to extending to the mappings basic concepts and statements concerning topological spaces. It is well known that any topological space can be considered as a special case of a continuous mapping, identifying this space with its mapping to a point. In this case, the following problem naturally arises: to extend to the mappings of concepts and statements that are available for topological spaces. In this article, we study τ - finally paracompact, strongly τ - finally paracompact, and τ - completely

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 9, 2019

paracompact mappings. It is easily shown that any τ - finally paracompact, strongly τ - finally paracompact, and τ -completely paracompact space can be considered as a special case of a τ - finally paracompact, strongly τ - finally paracompact, and τ - completely paracompact map identifying this space with its mapping to a point. Various characteristics of τ - finally paracompact, strongly τ - finally paracompact, τ - fully paracompact and compact mappings are established. In particular, it is proved that for τ - finally paracompact, strongly τ - finally paracompact, and τ - completely paracompact mappings, τ - finally paracompact, strongly τ - finally paracompact, and τ - completely paracompact, is preserved in the direction of the pre-image.

Key words: *continuous mapping, open covering, τ - finally paracompact mapping, strongly τ - finally paracompact mapping, τ - completely paracompact mapping.*

Пусть $f : X \to Y$ - непрерывное отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y [1], [4].

Отображение f называется компактным, если для любого открытого покрытия (о.п.) α пространства X найдутся о.п. β пространства Y и конечное о.п. γ пространства X такие, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$ [3]; пространство X называется τ -финально паракомпактным (τ -ФП), если в каждое его о.п. можно вписать локально конечное о.п. мощности $\leq \tau$ [2]; пространство X называется сильно τ -финально паракомпактным, если в каждое его о.п. можно вписать звездно конечное о.п. мощности $\leq \tau$ [2]; пространство X называется вполне паракомпактным, если в каждое его открытое покрытие можно слабо вписать σ -звездно конечное о.п. мощности $\leq \tau$ [5].

Определение 1. Отображение f называется τ -ФП, если для любого о.п. α пространства X существуют такие о.п. β пространства Y и локально конечное о.п. γ мощности $\leq \tau$ (τ - ЛК) пространства X, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma$ вписано в α, т.е. $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$.

Предложение 1. Всякое $f : X \to Y$ τ -ФП пространства X в произвольное пространства Y является τ -ФП.

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ - непрерывное отображение τ -ФП пространства X в пространство Y. Пусть α произвольное о.п. пространства X. Тогда существует τ -ЛК о.п. γ пространства X, что $\gamma \succ \alpha$. Пусть β любое о.п. пространства Y. Тогда пересечение $f^{-1}\beta \wedge \gamma$ вписано в α, т.е. $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$. Следовательно, f является τ -ФП.

Следствие 1. Всякое $f : X \to Y$ финально компактного пространства X в произвольное пространство Y является финально компактным.

Предложение 2. Если f является τ -ФП пространства X в одноточечное пространство Y, то X является τ -ФП.

Доказательство. Пусть отображение f является τ -ФП отображением и α - произвольное о.п. пространства X. Тогда существуют такие о.п. β пространства Y и τ -ЛК о.п. γ пространства X, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$. Легко видеть, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma = \gamma$. Значит, пространство X является τ -ФП.

Следствие 2. Если отображение f является финально компактным отображением пространства X в одноточечное пространство Y, то пространство X является финально компактным пространством.

Определение 2. Отображение f называется сильно τ -финально паракомпактным, если для любого о.п. α пространства X существуют такие о.п. β пространства Y и звездно конечное о.п. γ мощности $\leq \tau$ (τ -ЗК) пространства X, что покрытие $f^{-1}\beta \wedge \gamma$ вписано в покрытие α, т.е. $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$.

Всякое сильно τ -ФП отображением является сильно τ -ФП отображением, а обратное, вообще говоря не верно.

Предложение 3. Всякое непрерывное отображение $f : X \to Y$ сильно τ -ФП пространства X в произвольное пространство Y является сильно τ -ФП отображением.

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ - непрерывное отображение τ -ФП пространства X в пространство Y. Пусть α произвольное о.п. пространства X. Тогда существует τ -ЗК о.п. γ

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 9, 2019

пространства X, что $\gamma \succ \alpha$. Рассмотрим любое о.п. β пространства Y. Легко видеть, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma$ вписано в α, т.е. $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$. Итак, отображение f является сильно τ-ФП отображением.

Предложение 4. Если отображение f является сильно τ-ФП отображением пространства X в одноточечное пространство Y, то пространство X является сильно τ-ФП пространством.

Доказательство. Пусть f - сильно τ-ФП отображение и α - произвольное о.п. пространства X. Тогда существуют такие о.п. β пространства Y и τ-ЗК о.п. γ пространства X, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$. Следовательно, $f^{-1}\beta \wedge \gamma = \gamma$. Значит, пространство X является сильно τ-ФП.

Определение 3. Отображение f называется τ-вполне паракомпактным (τ-ВП), если для любого о.п. α пространства X существуют такие о.п. β пространства Y и σ-вездно конечное о.п. γ мощности $\leq \tau$ (τ-σ-ЗК) пространства X, что покрытие $f^{-1}\beta \wedge \gamma$ слабо вписано в покрытие α.

Предложение 5. Всякое $f: X \to Y$ τ-ВП пространства X в произвольное пространство Y является τ-ВП, также, если f является τ-ВП пространства X в одноточечное пространство Y, то пространство X является τ-ВП.

Доказательство. Пусть $f: X \to Y$ - отображение τ-ВП пространства X в пространство Y. Пусть α произвольное о.п. пространства X и γ - τ-σ-ЗК о.п. пространства X такое, что $\gamma \succ \alpha$ и β любое о.п. Y. Тогда покрытие $f^{-1}\beta \wedge \gamma$ слабо вписано в покрытие α. Итак, f является τ-ВП. Обратно, пусть f является τ-ВП и α произвольное о.п. пространства X. Тогда существуют такие о.п. β пространства Y и τ-σ-ЗК о.п. γ пространства X, что покрытие $f^{-1}\beta \wedge \gamma$ слабо вписано в покрытие α. Легко видеть, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma = \gamma$. Следовательно, X является τ-ВП пространством.

Одним из основным результатом данного раздела является

Теорема 1. Пусть задано отображение $f: X \to Y$.

Если пространство Y и отображение f обладают одновременно одним из следующих свойств:

1) τ-ФП;
2) сильно τ-ФП;
3) τ-ВП

то тем же свойством обладает и отображение f.

Доказательство. В случае 1) – 3) доказательство протекают аналогично. Поэтому проведем их только для случая 1).

Пусть пространство Y и отображение f являются τ-ФП. Пусть α - произвольное о.п. X. Тогда существуют такие о.п. β пространства Y и τ-ЛК о.п. γ пространства X, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$. Так как пространство Y является τ-ФП, то в β впишем τ-ЛК о.п. β_0. Ясно, что $f^{-1}\beta_0 \wedge \gamma$ является τ-ЛК о.п., как внутреннее пересечение τ-ЛКО покрытий $f^{-1}\beta_0$ и γ. Положим $f^{-1}\beta_0 \wedge \gamma = \lambda$. Легко видеть, что τ-ЛКО покрытие λ вписано в о.п. α. Следовательно, пространство X является τ-ФП.

Следствие 3. Пусть задано отображение $f: X \to Y$. Если пространство Y и отображение f обладают свойством финально компактности, то тем же свойством обладает и пространство X.

Предложение 6. Пусть имеем τ-ФП (сильно τ-ФП, τ-ВП) отображение $f: X \to Y$ и замкнутое подпространство X_0. Тогда $f|_{X_0}: X_0 \to Y$ является τ-ФП (сильно τ-ФП, τ-ВП).

Доказательство. Пусть $f: X \to Y$ - τ-ФП и X_0 замкнутое подпространство X. Пусть α_0 произвольное о.п. пространства X_0. Тогда найдется такое о.п. α пространства X, что

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$\alpha \wedge \{X_0\} = \alpha_0$. Для о.п. α пространства X существуют такие о.п. β пространства Y и τ -ЛК о.п. γ пространства X, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$. Легко видеть, что $f_{X_0}{}^{-1}\beta \wedge \gamma_0 \succ \alpha_0$, где $f_{X_0}{}^{-1}\beta = f^{-1}|_{X_0}$, $\gamma \wedge \{X_0\} = \gamma_0$. Ясно, что γ_0 есть τ -ЛК о.п. пространства X_0. Итак, $f|_{X_0} : X_0 \to Y$ является τ -ФП отображением.

Следствие 4. Пусть $f : X \to Y$ - финально компактное отображение и X_0 - замкнутое подпространство. Тогда сужение $f|_{X_0} : X_0 \to Y$ отображения f является финально компактным отображением.

Предложение 7. Композиция двух τ -ФП (сильно τ -ФП, τ -ВП) отображений снова является τ -ФП (сильно τ -ФП, τ -ВП) отображением.

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ - τ -ФП. Покажем, что композиция $g \circ f : X \to Z$ отображений f и g является τ -ФП. Пусть α - любое о.п. пространства X. Тогда существуют такие о.п. β пространства Y и τ -ЛК о.п. γ пространства X, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$. Далее для о.п. β пространства Y существуют такие о.п. δ пространства Z и τ -ЛК о.п. λ пространства Y, что $g^{-1}\delta \wedge \lambda \succ \beta$. Ясно, что

$$(f^{-1} \circ g^{-1})\delta \wedge (f^{-1}\lambda \wedge \gamma) \succ f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha,$$

т.е. $((g \circ f)^{-1})\delta \wedge (f^{-1}\lambda \wedge \gamma) \succ f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$. Пусть $f^{-1}\lambda \wedge \gamma = \omega$. Очевидно, ω τ -ЛК о.п. пространства X. Следовательно, $(g \circ f)^{-1}\delta \wedge \omega \succ \alpha$, т.е. композиция $g \circ f : X \to Z$ отображений f и g является τ -ФП отображением. Свойства сильно τ -ФП и τ -ВП доказываются аналогично.

Следствие 5. Композиция двух финально компактных отображений снова является финально компактным.

Любое сильно τ -ФП является τ -ВП, и любое τ -ВП является τ -ФП.

Определение 4. f называется τ -компактным если для любого о.п. α мощности $\leq \tau$ пространства X существуют такие о.п. β пространства Y и конечное о.п. γ пространства X, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$.

Определение 5. Отображение f называется τ -финально компактным если для любого о.п. α пространства X существуют такие о.п. β пространства Y и о.п. γ пространства X мощности $\leq \tau$, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$.

Теорема 2. Отображение f является компактным тогда и только тогда, когда оно является τ -компактным и τ -финально компактным.

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть α произвольное о.п. пространства X. Тогда существуют такие о.п. β пространства Y и о.п. γ пространства X мощности $\leq \tau$, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$. Далее для γ существуют такие о.п. η пространства Y и о.п. μ пространства X мощности $\leq \tau$, что $f^{-1}\eta \wedge \mu \succ \gamma$.

Ясно, что $f^{-1}(\beta \wedge \eta) \wedge \mu \succ f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$. Пусть $\beta \wedge \eta = \omega$. Тогда $f^{-1}\omega \wedge \mu \succ \alpha$. Следовательно, f - компактное отображение.

Следствие 6. Отображение f является компактным тогда и только тогда, когда оно является счетно компактным и финально компактным.

Литература:

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. - М.: Наука, 1977. - 368 с.
2. Борубаев, А.А. Равномерная топология. - Бишкек: Илим, 2013. - 347 с.
3. Канетов Б.Э., Агыбаев А.С. Об одном аналоге компактных отображений // Известия вузов. - Бишкек, 2006. - №5-6. - С. 6-8.
4. Келли, Дж.Л. Общая топология. - Москва: Наука, 1981. - 432 с.
5. Пасынков Б.А., Мусаев Д.К. О свойствах компактности и полноты топологических пространств и непрерывных отображений. - Ташкент: Фан, 1994. - 124 с.