

Алыбаев К.С., Нарымбетов Т.К.

**ТЫНЧ АБАЛ ЧЕКИТИНИН ТУРУКТУУЛУГУ
АТКАРЫЛБАГАН УЧУРДАГЫ БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ
СИНГУЛЯРДЫК ДҮҮЛҮККӨН ТЕҢДЕМЕЛЕР**

Алыбаев К.С., Нарымбетов Т.К.

**СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ
ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПРИ НАРУШЕНИИ
УСТОЙЧИВОСТИ ТОЧКИ ПОКОЯ**

K.S. Alybaev, T.K. Narymbetov

**SINGULARLY PERTURBED FIRST-ORDER
EQUATIONS IN VIOLATION OF THE STABILITY
OF THE STATIONARY POINT**

УДК: 517.932

Бул макалада жалпы учурда аналитикалык функциялуу биринчи тартиптеги сингулярдуу дүүлүккөн кадимки дифференциалдык теңдеме каралган. Теңдеменин бириктирилген теңдемесинин (А.Н. Тихоновдун боюнча) тынч абал чекити чыныгы кесиндинин бир бөлүгүндө туруксуз абалда болот. Каралып жаткан теңдеменин берилген баштапкы шартты канааттандырган чечиминин асимптотикалык абалын тынч абал чекити туруксуз болгон кесиндиде изилдөө маселеси коюлду. Чечим үчүн туруктуулуктун узартылышы кубулушу орун алары далилденди. Изилдөө деңгээл сызыктар методун колдонуу аркылуу жүргүзүлдү. Туруктуулуктун узартылышынын жетиштүү шарттары берилген аналитикалык функциялар тарабынан аныкталган гармоникалык функциялардын деңгээл сызыктары аркылуу келтирилди. Коюлган маселе комплекстик тегиликтин чыныгы окту камтыган областта изилденди. Каралып жаткан областтында чечимдин чектелгендиги далилденди. Далилдөө процессинде мейкиндиктерди өзүнө-өзүн чагылдыруу принциби жана удаалаш жакындаштыруу методу колдонулду. Изилдөө боюнча жалпы жыйынтык келтирилди.

Негизги сөздөр: сингулярдык дүүлүгү, тынч абал, туруктуулуктун бузулушу, аналитикалык функциялар, гармоникалык функциялар, деңгээл сызыктар, функциялардын мейкиндиги, чагылдыруу, оператордук теңдеме, баалоо.

В данной статье в общем случае рассматривается сингулярно возмущенное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. При этом точка покоя присоединенного уравнения (по терминологии А.Н. Тихонова) в части рассматриваемого отрезка действительной оси является неустойчивой. Поставлена задача исследования асимптотического поведения решения уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию, на заданном отрезке действительной оси. Доказано, что для решения имеет место явление затягивания потери устойчивости. Исследование проведено применением метода линии уровня. Достаточные условия затягивания потери устойчивости приведены с использованием линии уровня гармонических функций, порождаемых заданными аналитическими функциями. Поставленная задача исследована в некоторой области комплексной плоскости, содержащий заданный отрезок действительной оси. Доказано ограниченность решения в рассматриваемой области. Применены принцип отображения пространство в себе и метод последовательных приближений. Приведены общие выводы по проведенным исследованиям.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, точка покоя, потеря устойчивости, аналитические функции, гармонические функции, линии уровня, функций пространств, отображение, операторное уравнение, оценка.

In this paper, in the general case, a singularly perturbed first-order equation is considered. Moreover, the stationary point of the attached equation (in the terminology of A.N. Tikhonov) in the part of the considered segment of the real axis is unstable. The task is to study the asymptotic behavior of the solution of an equation satisfying the initial condition on a given segment of the real axis. It is proved that for the solution there is a phenomenon of delaying the loss of stability. The study was conducted using the level line method. Sufficient conditions for delaying stability loss are given using the level line of harmonic functions generated by specified analytic functions. The problem posed is investigated in a certain region of the complex plane. Containing a given segment of the real axis. The boundedness of the solution in the considered area is proved. The principle of displaying the space in itself and the method of successive approximations are applied. The general conclusions of the studies are presented.

Key words: singular perturbation, rest point, stability loss, analytical functions, harmonic functions, level lines, space functions, mapping, operator equation, estimation.

Введение. Впервые явление затягивание потери устойчивости обнаружено в [1] для одного класса систем сингулярно возмущенных уравнений состоящих из двух уравнений первого порядка. Далее в работах [2 – 3] это явление обобщено на некоторые классы систем уравнений. В [4] разработан метод линии уровня исследования систем сингулярно возмущенных уравнений при потере устойчивости точки покоя присоединенной системы.

В [5] доказано, что явление затягивание потери устойчивости происходит при определенных благоприятных условиях. Условия сформулированы в терминах пограничные линии, регулярные и сингулярные области для линейных и слабо нелинейных уравнений первого порядка. Исследования в перечисленных работах в основном проведены для некоторых систем сингулярно возмущенных уравнений состоящих из двух уравнений первого порядка.

В данной работе задача на затягивание потери устойчивости будет решена для уравнения первого порядка в общем случае.

1. Приведение задачи к стандартному виду.

Пусть рассматривается уравнение

$$\varepsilon z'(t, \varepsilon) = f(t, z(t, \varepsilon)), \quad (1)$$

с начальным условием

$$z(t_0 \varepsilon) = z^0 - const, \quad (2)$$

где $0 < \varepsilon$ – малый вещественный параметр; $t \in D \subset \mathbb{C}$ и D односвязная, открытая область, содержащая отрезок $[t_0, T]$ вещественной оси.

Предложим, что выполняется условие

U1. $f(t, z) \in Q(H)$ – пространство аналитических функций в H – некоторое множество переменных t, z .

В (1) полагая $\varepsilon = 0$ получим вырожденное уравнение

$$f(t, \xi(t)) = 0 \quad (3)$$

U2. Пусть уравнение (3) в D имеет изолированное решение $\xi_1(t) \equiv 0$.

Определение. Если в области $H_0 = \{(t, \xi) | t \in D, |\xi(t)| \leq \delta\}$ – достаточно малое положительное число не зависящее от ε не существуют другие решения уравнения (3), то $\xi_1(t) \equiv 0$ называется изолированным решением.

Функцию $f(t, z)$, в силу условия U1, можно представить в виде

$$f(t, z) = f'_z(t, 0)z + f''_z(t, 0)z^2 + \dots \equiv f'_z(t, 0)z + g(t, z)z^2.$$

Введём обозначение $f'_z(t, 0) \equiv a(t)$ и задачу (1)-(2) перепишем в виде

$$\varepsilon z'(t, \varepsilon) = a(t)z(t, \varepsilon) + g(t, z(t, \varepsilon))z^2(t, \varepsilon), \quad (4)$$

$$z(t_0, \varepsilon) = z^0, \quad (5)$$

Согласно U1 имеем $a(t) \in Q(D)$, $g(t, z) \in Q(H)$. Далее все постоянные не зависящие от ε будем обозначать буквой M_k ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Пусть выполняются условия:

U3. $\operatorname{Re} a(t) < 0$, $t_0 \leq t_1 < T_0$, $t_2 \equiv 0$; $\operatorname{Re} a(T_0 + i0) = 0$;

$$\operatorname{Re} a(t) > 0, \quad T_0 \leq t_1 < T, \quad t_2 \equiv 0.$$

U4. $\forall t \in D(\operatorname{Im} a(t) > 0)$.

U5. Существует линия уровня $(P_0) = \{t \in D \mid \operatorname{Re} A(t) = 0\}$ соединяющая точки $(t_0; 0)$ и $(T; 0)$, где $A(t) = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau$.

Область, ограниченную (P_0) и отрезком $[t_0; T]$ обозначим D_0 .

U6. Пусть $|z^0| \leq M_0 \varepsilon$, $0 < M_0$ – некоторая постоянная не зависящая от ε .

Присоединенное уравнение, уравнения (1), имеет точку покоя $\xi_1(t) \equiv 0$, причем точка покоя устойчива при $t_0 \leq t_1 < T_0(t_2 = 0)$ и неустойчиво при $T_0 < t_1 \leq T(t_2 = 0)$. Задачу (4)-(5) рассмотрим в области D_0

2. Решение задачи.

Справедлива

Теорема. Пусть выполняются условия U1 – U6. Тогда $z(t, \varepsilon)$ решение задачи (1) – (2) существует в D_0 и справедлива оценка

$$|z(t, \varepsilon)| \leq M_1 \varepsilon, t \in D_0. \quad (6)$$

Доказательство. Задачу (4) – (5) заменим следующим (для удобства аргументы неизвестной функции будем опускать)

$$z = z^0 \exp \frac{A(t)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t g(\tau, z) z^2 \exp \frac{1}{\varepsilon} (A(t) - A(\tau)) d\tau. \quad (7)$$

(7) запишем в виде следующего операторного уравнения

$$z = I_\varepsilon z \quad (8)$$

и решение будем искать в пространстве $Q_\varepsilon(D_0)$.

Для доказательства существования решения уравнения (8) определим следующую итерацию

$$z_m = I_\varepsilon z_{m-1}, \quad z_0 \equiv 0, m = 1, 2, \dots \quad (9)$$

В силу условия U1 функции $z_m(t, \varepsilon) \in Q_\varepsilon(D_0)$.

Рассмотрим следующие случаи:

1. $t \in (p_0)$.
2. $t \in D_{01} = D_0 \setminus (p_0)$.

1. Пусть $t \in (p_0)$. Линия (p_0) определяемое гармонической функцией $\operatorname{Re} A(t)$ является аналитической кривой и её уравнение в параметрической форме можно записать в виде

$$t_1 = t_1(s), t_2 = t_2(s), 0 \leq s \leq s_0(T),$$

где s – длина (p_0) соединяющая точки $(t_0; 0)$ и $t \in (p_0)$.

Для этого случая в (8) – (9) путь интегрирование состоит из части (p_0) соединяющего точки $(t_0; 0)$ и $t \in (p_0)$.

Пусть $z(t, \varepsilon)$ элемент из пространства $Q(p_0)$ определенного на множестве

$$D_{02} = \{z(t, \varepsilon), |z(t, \varepsilon)| \leq M_1 \varepsilon t \in (p_0), M_0 < M_1\}.$$

При каком условии оператор I_ε произвольную функцию из пространства $Q((p_0))$ определенного на множестве D_{02} отображает в пространство $Q((p_0))$ с множеством D_{02} ? Заметим, если $z \in Q(D_0)$, то $z^* = I_\varepsilon z \in Q(D_0)$.

Из (8) с учетом выбранного пути интегрирования имеем

$$\begin{aligned} |z^*| \leq |I_\varepsilon z| &\leq |z^0| + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s |g(\tau, z)| |z^2| |\tau'_1(s) + i\tau'_2(s)| ds \leq \\ &\leq M_0 \varepsilon + M_2 \cdot \varepsilon M_1^2 S = \varepsilon(M_0 + M_2 \varepsilon M_1^2 S), \end{aligned}$$

где $M_2 = \max |g(\tau, z)| |\tau'_1(s) + i\tau'_2(s)|$.

В силу аналитичности функций $g(\tau, z)$ и $\tau'_1(s) + i\tau'_2(s)$ такая постоянная существует. Таким образом, если

$$S_0 \leq \frac{M_1 - M_0}{M_2 M_1^2}, \text{ то } z^* \in Q((p_0)) \text{ и } |z^*| \leq \varepsilon M_1. \quad (10)$$

Согласно доказанного предложения функции z_m определяемые равенством (9) принадлежат пространству

$$Q((p_0)) \text{ и } \forall m \in N(|z_m| \leq \varepsilon M_1). \quad (11)$$

Теперь докажем равномерную сходимость (9) для $t \in (p_0)$. Построим ряд $\sum_{m=1}^\infty (z_m - z_{m-1})$ и докажем равномерную сходимость этого ряда.

$$\begin{aligned} |z_m - z_{m-1}| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^s |g(\tau, z_{m-1}) z_{m-1}^2 g(\tau, z_{m-2}) z_{m-2}^2| \cdot |\tau'_1(s) + i\tau'_2(s)| ds \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^s |g(\tau, z_{m-1})| |z_{m-1} - z_{m-2}| \max\{|z_{m-1}| + |z_{m-2}|\} |\tau'_1(s) + i\tau'_2(s)| ds \right| + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^s |z_{m-2}^2| \cdot |g(\tau, z_{m-1}) - g(\tau, z_{m-2})| |\tau'_1(s) + i\tau'_2(s)| ds \right| \leq \\ &\leq (2M_2 M_1 + \varepsilon M_1^2 M_2) \int_0^s |z_{m-1} - z_{m-2}| ds, \\ |z_m - z_{m-1}| &\leq (2M_2 M_1 + \varepsilon M_1^2 M_2) \int_0^s |z_{m-1} - z_{m-2}| ds. \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда имеем } \forall m \in N(|z_m - z_{m-1}| \leq M_1 \varepsilon \frac{(M_3 s)^{m-1}}{(m-1)!}).$$

Из полученной оценки следует равномерная сходимость итерации (9) к некоторой функции $z(t, \varepsilon)$ которая является решением задач (1)-(2) на линии (p_0) и для этого решения, согласно (11) справедлива оценка

$$|z(t, \varepsilon)| \leq M_1 \varepsilon. \quad (12)$$

2. Пусть $t \in D_{01}$. В этом случае путь интегрирования состоит из части (p_0) соединяющей точки $(t; 0)$, $\tilde{t} \in (p_0)$ и прямолинейного отрезка соединяющего точки $\tilde{t}$ и t причем $\tilde{t} = t_1 + i\tilde{t}_2$, $t = t_1 + it_2$.

Согласно условия $U4$ выполняется соотношение $\forall t \in D_0 (\operatorname{Re} A(t) \leq 0)$, при этом равенства имеет место только для точек линии (p_0) .

Учитывая выбранный путь интегрирования (7) представим в следующем виде.

$$\begin{aligned}
z &= z^0 \exp \frac{A(t)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{\tilde{t}} g(\tau, z) z^2 \exp \frac{1}{\varepsilon} (A(t) - A(\tau)) d\tau + \\
&+ \int_{\tilde{t}}^t g(\tau, z) z^2 \exp \frac{1}{\varepsilon} (A(t) - A(\tau)) d\tau = \\
&= \exp \frac{A(t) - A(\tilde{t})}{\varepsilon} \left[z^0 \exp \frac{A(\tilde{t})}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{\tilde{t}} g(\tau, z) z^2 \exp \frac{1}{\varepsilon} (A(\tilde{t}) - A(\tau)) d\tau \right] + \int_{\tilde{t}}^t g(\tau, z) z^2 \exp \frac{1}{\varepsilon} (A(t) - A(\tau)) d\tau.
\end{aligned} \tag{13}$$

В полученном равенстве выражение содержащееся в [...] является решением задачи (1)-(2) на линии (p_0) . Это решение обозначим $z(\tilde{t}, \varepsilon)$. Для этого решения справедлива оценка (12).

Соотношение (13) запишем в виде

$$z = \tilde{I}_\varepsilon z \tag{14}$$

При выполнении условия (10) оператор $\tilde{I}_\varepsilon$ переводит произвольный элемент из $Q(D_{01})$ определенного на множестве D_{02} в себя.

Далее к (14) применяя итерацию, как и в предыдущем случае, доказывается следующая оценка для решения (14)

$$|z(t, \varepsilon)| \leq M_1 \varepsilon \exp \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Re} A(t). \tag{15}$$

Поскольку $\forall t \in D_{01} (\operatorname{Re} A(t) \leq 0)$, то получим

$$|z(t, \varepsilon)| \leq M_1 \varepsilon. \tag{16}$$

Объединив оценки (13), (16) имеем $\forall t \in D_0 (|z(t, \varepsilon)| \leq M_1 \varepsilon)$.

Полученная оценка подтверждает истинность теоремы.

Вывод. Доказано, когда нарушается устойчивость точки покоя, то решение не сразу покидает возникшую неустойчивую точку покоя, а в течении конечного времени остается вблизи него.

Литература:

1. Шишкова М.А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных [Текст] / М.А.Шишкова // Доклады АН СССР. - 1973. - Т. 209, №3. - С. 576-579.
2. Каримов С. Асимптотика решений некоторых классов дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» [Текст]: дисс. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. / С. Каримов. - Ош, 1983. - 260 с.
3. Анарбаева Г.М. Асимптотическое поведение решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости положения равновесия [Текст]: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Г.М. Анарбаева. - Бишкек, 1993. - 120 с.
4. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Вестник КГНУ. - Серия 3, Выпуск 6. - Бишкек, 2001. - С. 190-200.
5. Тампагаров К.Б. Погранслойные линии в теории сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями, дисс... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 / К.Б. Тампагаров. - Бишкек, 2017. - С. 218.