Бекмаматов З.М.

**ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ КЕНЖЕ МҮЧӨЛҮҮ
КУРАМА ЖАНА ГИПЕРБОЛАЛЫК ТИПТЕГИ ТЕҢДЕМЕЛЕР
ҮЧҮН ЖАЛГАШТЫРУУ МАСЕЛЕСИ**

Бекмаматов З.М.

**ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
СОСТАВНОГО И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ ЧЕТВЕРТОГО
ПОРЯДКА С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ**

Z.M. Bekmamatov

**CONJUGATION PROBLEM FOR EQUATIONS
COMPOSITE AND HYPERBOLIC FOURTH ORDER
TYPES WITH JUNIOR MEMBERS**

УДК: 517.956.6

Берилген макалада аралаш жана аралаш-курама теңдемелер усулдары менен тик бурчтуу аймакта төртүнчү тартиптеги курама жана гиперболаалык типтеги теңдемелер үчүн жалгаштыруу маселеси изилденген. Жалгаштыруу маселесин бир тектүү эмес жана бөлүкчө-биртектүү эмес чөйрөдөгү жыйналган факторлордун негизинде болуп өткөн жараяндардын математикалык модели катары сүрөттөөгө болот. Жекече туундулары менен берилген экинчи жана үчүнчү тартиптеги дифференциалдык теңдемелерге салыштырмалуу төртүнчү тартиптеги теңдемелер үчүн жалгаштыруу маселелери аз изилденген. Ошондуктан өзгөчө көңүл бурууну талап кылган маселенин коюлушунун корректүүлүгүн, жабыштыруу шарттарынын санын, ошондой эле чечимдин жашашынын жетиштүү шарттарын аныктоону үйрөнүү кызыгууну туудурат. Жалгаштыруу маселесин чечүү үчүн Дирихленин жана Гурсанын классикалык маселелерин колдонуу талап кылынды. Каралып жаткан аймакта маселени өз алдынча тиешелүү аймактардагы эки жардамчы маселелерге ажыратуу жолу менен маселе теңдеш түрдө Фредгольдун жана Вольтердин экинчи ролдогу интегралдык теңдемелерине келтирилди. Маселенин чечиминин жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттары табылды.

Негизги сөздөр: жалгаштыруу маселеси, четки шарттар, Гриндин функциясы, Гурсанын маселеси, Римандын функциясы, Дирихленин маселеси.

В статье методами теории уравнений смешанного и смешанно-составного типов исследуется задача сопряжения в прямоугольной области для уравнения составного и гиперболического типов четвертого порядка. Задачу сопряжения можно иллюстрировать как математической модели процессов, происходящих в неоднородных и кусочно-неоднородных средах при сосредоточенных факторах. Наряду с уравнений в частных производных второго и третьего порядков, задача сопряжения для уравнения четвертого порядка сравнительно мало исследованы. Поэтому, представляет интерес изучения корректность постановки задачи, количество условий склеиваний, а также выявления достаточных условий разрешимости, которые требуют особое внимание. Для решения задачи сопряжения потребовался использовать классические задачи Дирихле и Гурса. Путем расщепления задачи на две вспомогательные самостоятельные задачи в соответствующих областях рассматриваемой области, задача эквивалентным образом редуцируются к интегральным уравнениям Фредгольма и Вольтерра второго родов. Найдены достаточные условия существования и единственности решения задачи.

Ключевые слова: задача сопряжения, краевые условия, функция Грина, задача Гурса, функция Римана, задача Дирихле.

In the article, by the methods of equations of mixed and mixed-composite types, the conjugation problem in a rectangular domain for the equation of composite and hyperbolic types of the fourth order is investigated. The conjugation problem can be illustrated as a mathematical model of processes occurring in inhomogeneous and piecewise inhomogeneous media with concentrated factors. Along with second-order and third-order partial differential equations, the conjugation problem for a fourth-order equation has been studied relatively little. Therefore, it is of interest to study the correctness of the problem statement, the number of bonding conditions, and also to identify sufficient solvability conditions that require special attention. To solve the conjugation problem, it was required to use the classical Dirichlet and Goursat problems. By splitting the problem into two auxiliary independent problems in the corresponding areas of the region under consideration, the problem is equivalently reduced to the Fredholm and Voltaire integral equations of the second kind. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution to the problem are found.

Key words: conjugation problem, boundary value problem, function of Green, Goursat problem, Riemann function, Dirichlets problem.

1. Введем следующие обозначения: D – прямоугольник $0 \leq x \leq l, -h_1 \leq y \leq h$ ($h, h_1 > 0$); $D_1 = D \cap (y > 0)$, $D_2 = D \cap (y < 0)$; C^{k+p} – класс непрерывно дифференцируемых функций включительно порядков k по x и p по y .

В области D_1 рассмотрим уравнение составного типа

$$L_1 L u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + C(x, y) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + p(x, y) \right) u = 0, \quad (1)$$

где $A(x, y), B(x, y)$ и $C(x, y)$ – заданные вещественные функции класса $C^{1+1}(D_2)$ и $C(D_2)$ соответственно; a, b – заданные постоянные вещественные числа, $p(x, y)$ – заданная вещественная функция класса $C^{1+1}(D_1)$.

Для уравнения

$$L u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c u = 0, \quad (2)$$

удобно сделать замену неизвестной функции $u = \exp\left(-\frac{1}{2}(ax + by)\right) \cdot \mathcal{G}(x, y)$,

где $\mathcal{G}(x, y)$ – новая неизвестная функция. Тогда уравнение (2) переходит в следующее уравнению для функции $\mathcal{G}(x, y)$:

$$L_2 \mathcal{G} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial y^2} + q(x, y) \mathcal{G} = 0, \quad (3)$$

в котором $q(x, y) = p(x, y) - \frac{a^2 + b^2}{4}$.

В работе рассматривается следующая:

Задача 1. Требуется найти решение уравнения

$$L_1 L_2 \mathcal{G} = 0 \quad (4)$$

в области D_1 из класса $C(\bar{D}) \cap C^3(D) \cap [C^{3+1}(D_1) \cup C^{1+3}(D_1) \cup C^{1+3}(D_2)]$, когда заданы граничные условия:

$$\mathcal{G}(0, y) = \varphi_1(y), \quad \mathcal{G}(l, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (5)$$

$$\mathcal{G}_{xx}(0, y) = \varphi_3(y), \quad \mathcal{G}(x, h) = \varphi_4(x), \quad (6)$$

$$\mathcal{G}_{yy}(x, h) = \varphi_5(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (7)$$

и, кроме того в области D_2 найти решение уравнения

$$\frac{\partial^4 \mathcal{G}}{\partial x \partial y^3} + d \mathcal{G} = 0, \quad (8)$$

по граничным условиям:

$$\mathcal{G}(0, y) = \varphi(y), \quad (9)$$

$$\mathcal{G}(x, -h_1) = \psi_1(x), \quad \mathcal{G}_y(x, -h_1) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (10)$$

где d – действительное число, $\varphi(y)$, $\varphi_k(y)$, $\varphi_j(x)$ ($k=1,2,3$; $j=1,2$), $\psi_i(x)$ ($i=1,2$) – заданные вещественные функции, причем удовлетворяют условиям гладкости и согласования

$$\varphi(y) \in C^3[-h_1, 0], \quad \varphi_k(y) \in C^3[0, h], \quad \varphi_3(y) \in C^2[0, h], \quad k=1,2; \quad (11)$$

$$\varphi_4(x) \in C^3[0, \ell], \quad \varphi_5(x) \in C^2[0, \ell], \quad \psi_1(x) \in C^3[0, l], \quad \psi_2(x) \in C^2[0, l];$$

$$\varphi(0) = \varphi_1(0), \quad \varphi_1(h) = \varphi_4(0), \quad \varphi_3(h) = \varphi_5(0), \quad (12)$$

$$\varphi_2(h) = \varphi_4(l), \quad \varphi(-h_1) = \psi_1(0), \quad \varphi'(-h_1) = \psi_2(0).$$

Легко заметить, что выполняются следующие условия сопряжения:

$$\mathcal{G}(x, +0) = \mathcal{G}(x, -0) = \tau(x) \quad \mathcal{G}_y(x, +0) = \mathcal{G}_y(x, -0) = \nu(x)$$

$$\mathcal{G}_{yy}(x, +0) = \mathcal{G}_{yy}(x, -0) = \mu(x) \quad 0 \leq x \leq l, \quad (13)$$

в котором $\tau(x)$, $\nu(x)$, $\mu(x)$ – ещё неизвестные функции.

Исследованию задачи сопряжения для уравнения в частных производных четвертого порядка посвящено много работ. В настоящей работе на основе способа, разработанного А.Бицадзе, Т.Джураева, М.Салахитдинова, устанавливается однозначная разрешимость задачи 1 и получены формулы представления решения рассматриваемой задачи в соответствующих областях. Некоторые граничные задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов третьего и четвертого порядков рассмотрены в [1] - [5].

После определения функции $\tau(x)$, $\nu(x)$, $\mu(x)$, задачу 1 можно расщеплять на две вспомогательные задачи:

Задача 2. Требуется определить в области D_1 решение уравнения (4) из класса $C^2(\overline{D}_1) \cap [C^{3+1}(D_1) \cup C^{1+3}(D_1)]$, удовлетворяющее граничным условиям (5) – (7) и

$$\mathcal{G}(x, +0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (14)$$

Задача 3. Требуется определить в области D_2 решение уравнения (8) из класса $C(\overline{D}_2) \cap C^{1+3}(D_2)$, удовлетворяющее граничным условиям (9), (10), а также условию

$$\mathcal{G}(x, -0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (15)$$

2. Положим

$$\mathcal{G}_{xx} + \mathcal{G}_{yy} + q\mathcal{G} = z(x, y), \quad (x, y) \in D_1, \quad (16)$$

в котором $z(x, y)$ – неизвестная функция. Тогда получим

$$L_1 z(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D_1, \quad (17)$$

Для уравнения (17) рассмотрим задачу Гурса:

$$z(0, y) = \chi_1(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad z(x, h) = \chi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (18)$$

где $\chi_1(y)$ и $\chi_2(x)$ – пока неизвестные функции, причем $\chi_2(0) = \chi_1(h)$.

Решение задачи Гурса дается формулой [6].

$$z(x, y) = R(x, h; x, y)\chi_2(x) + R(0, y; x, y)\chi_1(y) - R(0, h; x, y)\chi_2(0) + \int_0^x [B(t, h) \cdot R(t, 0; x, y) - \frac{\partial}{\partial t} R(t, 0; x, y)] \chi_2(t) dt + \int_y^h [A(0, t_1) \cdot R(0, t_1; x, y) - \frac{\partial}{\partial t_1} R(0, t_1; x, y)] \chi_1(t_1) dt_1, \quad (19)$$

где $R(t, t_1; x, y)$ – функция Римана.

В силу (5) – (7) и (16) будем иметь

$$\chi_1(y) = \varphi_3(y) + \varphi_1''(y) + q(0, y)\varphi_1(y) \quad \chi_2(x) = \varphi_4''(x) + \varphi_5(x) + q(x, 0)\varphi_4(x) \quad (20)$$

Учитывая (19), (20) уравнение (16) можно записать в виде

$$\mathcal{G}_{xx} + \mathcal{G}_{yy} + q(x, y)\mathcal{G} = z_0(x, y), \quad (x, y) \in D_1. \quad (21)$$

Если в (21) перейти к пределу при $y \rightarrow 0$, то получим соотношение из области D_1 :

$$\tau''(x) + \mu(x) + q \cdot \tau(x) = z_0(x, 0), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (22)$$

Для уравнение (22) решим задачу

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau(l) = \varphi_2(0). \quad (23)$$

Перепишем уравнение (22) в виде

$$\tau''(x) = z_0(x, 0) - q(x, 0) \cdot \tau(x) - \mu(x), \quad (24)$$

и, считая правую часть, как известной функцией, сведем его эквивалентным образом к интегральному уравнению

$$\tau(x) = \int_0^l G(x, s)q(s, 0)\tau(s)ds + \alpha(x), \quad (25)$$

в котором

$$\alpha(x) = \varphi_1(0) + \frac{x}{l}[\varphi_2(0) - \varphi_1(0)] + \int_0^l G(x, s)(z_0(s, 0) - \mu(s))ds,$$

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{x(s-l)}{l}, & 0 \leq x \leq s, \\ \frac{s(x-l)}{l}, & s \leq x \leq l \end{cases} \quad \text{– функция Грина.}$$

Если выполнено условие

$$l \cdot \max_{0 \leq x, s \leq l} |qG| < 1, \quad (26)$$

то однородное уравнение (25) имеет только нулевое решение, а решение неоднородного уравнения можно представить в виде

$$\tau(x) = \alpha(x) + \int_0^l R(x, s)\alpha(s)ds, \quad (27)$$

в котором $R(x, s)$ – резольвента ядра уравнение (25), которая выражается через функции $\mu(x)$.

3. Теперь в области D_2 решим задачу Гурса для уравнения (8) с условием (9) и условиями:

$$\mathcal{G}(x, -0) = \tau(x), \mathcal{G}_y(x, -0) = \nu(x), \mathcal{G}_{yy}(x, -0) = \mu(x), 0 \leq x \leq l, \quad (28)$$

Путем последовательного интегрирования уравнения (8) будем иметь

$$\mathcal{G}(x, y) = \mathcal{G}_0(x, y) + \frac{\lambda}{2} \int_0^x d\xi \int_0^y (y-\eta)^2 \mathcal{G}(\xi, \eta) d\eta, \quad (29)$$

в котором

$$\mathcal{G}_0(x, y) = \tau(x) + y\nu(x) + \frac{1}{2}y^2\mu(x) + \varphi_0(y), \quad \varphi_0(y) = \varphi(y) - \varphi(0) - \varphi'(0)y - \frac{1}{2}y^2\varphi''(0).$$

Так как уравнение (29) принадлежит к интегральному уравнению типа Вольтерра, поэтому решая его методом последовательных приближений получаем

$$\mathcal{G}(x, y) = \mathcal{G}_0(x, y) - d \int_0^x d\xi \int_0^y V(x, y; \xi, \eta) \mathcal{G}_0(\xi, \eta) d\eta, \quad (30)$$

в котором

$$V(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n d^n}{n!(3n+2)!} (x-\xi)^n (y-\eta)^{3n+2} - \text{резольвента ядра } \frac{1}{2}(y-\eta)^2;$$

$$V(x, y; \xi, y) = 0, V_y(x, y; \xi, y) = 0, V_{yy}(x, y; \xi, y) = 1,$$

$$V(x, y; x, \eta) = \frac{1}{2}(y-\eta)^2, V_y(x, y; x, \eta) = y-\eta, V_{yy}(x, y; x, \eta) = 1.$$

С учетом значение функции $\mathcal{G}_0(x, y)$, в формуле (30) будем выделят неизвестные функции $\tau(x)$, $\nu(x)$ и $\mu(x)$. Тогда правую часть (30) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, y) = & \Phi(x, y) + \tau(x) + y\nu(x) + \frac{1}{2}y^2\mu(x) + \int_0^x S_1(x, y, \xi)\tau(\xi)d\xi + \int_0^x S_2(x, y, \xi)\nu(\xi)d\xi + \\ & + \int_0^x S_3(x, y, \xi)\mu(\xi)d\xi, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\Phi(x, y) = \varphi_0(y) - d \int_0^x d\xi \int_0^y V(x, y; \xi, \eta)\varphi_0(\eta)d\eta, S_1(x, y, \xi) = -d \int_0^y V(x, y; \xi, \eta)d\eta,$$

$$S_2(x, y, \xi) = -d \int_0^y V(x, y; \xi, \eta) \cdot \eta d\eta, \quad S_3(x, y, \xi) = -\frac{d}{2} \int_0^y V(x, y; \xi, \eta) \cdot \eta^2 d\eta.$$

Подставляя (31) в граничные условия (10) будем иметь соотношение из области D_2 :

$$\tau(x) - h_1 v(x) + \frac{1}{2} h_1^2 \mu(x) = \tilde{\psi}_1(x) - \int_0^x [S_1(x, -h_1, \xi) \tau(\xi) + S_2(x, -h_1, \xi) v(\xi) + S_3(x, -h_1, \xi) \mu(\xi)] d\xi,$$

$$0 \leq x \leq l, \quad (32)$$

$$v(x) - h_1 \mu(x) = \tilde{\psi}_2(x) - \int_0^x [S_{1y}(x, -h_1, \xi) \tau(\xi) + S_{2y}(x, -h_1, \xi) v(\xi) + S_{3y}(x, -h_1, \xi) \mu(\xi)] d\xi,$$

$$0 \leq x \leq l, \quad (33)$$

где

$$\tilde{\psi}_1(x) = \psi_1(x) - \Phi(x, -h_1), \quad \tilde{\psi}_2(x) = \psi_2(x) - \Phi_y(x, -h_1).$$

Решая Вольтерровскую часть интегрального уравнения (33), по функции $v(x)$ будем иметь соотношение

$$v(x) = h_1 \mu(x) + \int_0^x [\tilde{S}_1(x, \xi) \tau(\xi) + \tilde{S}_3(x, \xi) \mu(\xi)] d\xi + \Psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (34)$$

в котором

$$\tilde{S}_1(x, \xi) = -S_{1y}(x, -h_1, \xi) - \int_{\xi}^x Q_1(x, t) S_{1y}(t, -h_1, \xi) dt,$$

$$\tilde{S}_2(x, \xi) = -S_{3y}(x, -h_1, \xi) - \int_{\xi}^x Q_1(x, t) S_{3y}(t, -h_1, \xi) dt,$$

$$\Psi(x) = \psi_2(x) + \int_0^x Q_1(x, t) \psi_2(t) dt, \quad Q_1(x, t) - \text{резольвента ядра } S_{2y}(x, -h_1, \xi).$$

Подставляя значение функции $v(x)$ из (34) в (32) получим

$$\mu(x) = \frac{2}{h_1^2} \tau(x) + \int_0^x [N_1(x, \xi) \tau(\xi) + N_2(x, \xi) \mu(\xi)] d\xi + \mu_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (35)$$

где

$$N_1(x, \xi) = \frac{1}{h_1^2} \left[-h_1 \tilde{S}_1(x, \xi) + \tilde{S}_2(x, -h_1, \xi) + \int_{\xi}^x S_2(x, -h_1, t) \tilde{S}_1(t, \xi) dt \right],$$

$$N_2(x, \xi) = \frac{1}{h_1^2} \left[-h_1 \tilde{S}_3(x, \xi) + S_3(x, -h_1, \xi) + \int_{\xi}^x S_2(x, -h_1, t) \tilde{S}_3(t, \xi) dt \right],$$

$$\mu_0(x) = \frac{1}{h_1^2} \left[\Phi(x, -h_1) - \psi_1(x) - h_1 \Psi(x) + \int_0^x S_2(x, -h_1, t) \Psi(\xi) d\xi \right].$$

После исключения функции $\tau(x)$ из (27) и (35) имеем

$$\mu(x) = \int_0^x N_2(x, \xi) \mu(\xi) d\xi + \int_0^l N_3(x, \xi) \mu(\xi) d\xi + \alpha_1(x), \quad (36)$$

где $\alpha_1(x)$ – вполне определенная функция.

Решая Вольтерровскую часть уравнения (36), получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\mu(x) = \mu_0(x) + \int_0^l N(x, \xi) \mu(\xi) d\xi, \quad (37)$$

где

$$N(x, \xi) = N_3(x, \xi) + \int_0^x Q_{1,2}(x, t) N_3(t, \xi) dt, \quad \mu_0(x) = \alpha_1(x) + \int_0^x Q_{1,2}(x, \xi) \alpha_1(\xi) d\xi,$$

$Q_{1,2}(x, t)$ – резольвента ядра $N_2(x, \xi)$.

Пусть

$$\ell \cdot \max_{0 \leq x, \xi \leq t} |N(x, \xi)| < 1. \quad (38)$$

Тогда соответствующее однородное уравнение (37) имеет нулевое решение.

Таким образом решая уравнение (37), из (25) и (34) определяем $\tau(x)$ и $\nu(x)$ соответственно.

Отсюда следует, что решена задача 3.

4. Так как уже определена функция $\tau(x)$, поэтому нетрудно заметить, что решение задачи 2 можно редуцировать к решению задачи Дирихле для уравнения (21) с граничными условиями (5), (6) и $\mathcal{G}(x, 0) = \tau(x)$, $0 \leq x \leq l$. Для этого уравнение (21) представим в виде

$$\mathcal{G}_{xx} + \mathcal{G}_{yy} = z_0(x, y) - q\mathcal{G}. \quad (39)$$

Как известно [7], вышеупомянутую задачу Дирихле можно свести к решению интегрального уравнения вида

$$\mathcal{G}(x, y) - q \iint_{D_1} G(x, y; \xi, \eta) \mathcal{G}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \mathcal{G}_0(x, y), \quad (40)$$

где $\mathcal{G}_0(x, y)$ – решение задачи 2 для уравнения Лапласа,

а $G(x, y; \xi, \eta) = \frac{4lh}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{h^2 n^2 + l^2 m^2} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi m}{h} y\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi m}{h} \eta\right)$ – функция

Грина [8].

Если учесть условие (26), то однородное уравнение (40) имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение всегда разрешимо [7].

Имеет место:

Теорема. Пусть выполнены условия (11), (12), (26) и (38). Тогда задача 1 однозначна разрешима.

Литература:

1. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. - М.: Изд-во АН СССР, 1959. - 164 с.
 2. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно – составного типов, Изд-во «Фан» Узбекской ССР. - Ташкент 1979. - 236 с.
 3. Сопуев А. Краевые задачи для уравнения четвёртого порядка и уравнения смешанного типа. Дисс.... докт физ.-мат. Наук. - Бишкек, 1996, - 235 с.
 4. Бабаев С., Бекмаматов З.М. Задачи сопряжения для уравнений составного и гиперболического типов четвертого порядка. // Межд. научная конф. посвященная к 80-летию акад. Джураева А., 07-08 декабря 2012г., г. Душанбе, Республика Таджикистан. - С. 12-14.
 5. Осмоналиев А.Б. Краевые задачи для гиперболических и смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка / Дисс... канд. физ.-мат. наук, 01.01.02. - Ош, 2007. - 126 с.
 6. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. - М.: Изд-во «Наука», 1976...
 7. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. - М.: Изд-во «Наука», 1996. - 204 с.
 8. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. - М., 2001. - 576 с.
-