DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

MATHEMATICAL SCIENCES

Кыдыралиев С.К., Урдалетова А.Б., Кадырова М.К.

КЫЙМЫЛДАГЫ ЖАНА БИРГЕЛЕШКЕН ЖУМУШ МАСЕЛЕЛЕРИН ЧЫГАРУУ ҮЧҮН АНАЛИТИКАЛЫК ГЕОМЕТРИЯНЫН КОЛДОНУЛУШУ

Кыдыралиев С.К., Урдалетова А.Б., Кадырова М.К.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ДВИЖЕНИЕ И СОВМЕСТНУЮ РАБОТУ

S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova, M.K. Kadyrova

USING ANALYTICAL GEOMETRY TO SOLVE PROBLEMS ON THE MOVEMENT AND COLLABORATION

УДК: 519-7(575.2)

Бул макалада айкын көрүнүп тургандай, аналитикалык геометриянын куралдарын колдонуп, математикалык жана физикалык кыймылдагы, биргелешкен жумуш жана ушуга окшогон салттуу маселелер жөнөкөйлөтүлүп каралган. Ыкмалардын эсептөөчү касиеттерин чагылдыруучу мисалдары каралаган. Ошондой эле, маселелердин жалпы чыгарылышы сызыктуу функциялардын жана координаттык чекиттердин сүрөттөлүшү менен көрсөтүлгөн жана берилген маселелер тиешелүү теңдемелер системасы менен чыгарылган. Мындан мурда белгиленгендей, туруктуу ылдамдыкка карата берилген маселелер негизинен арифметикалык жаан алгебралык ыкмалар менен чыгарылат. Аналитикалык геометриянын ыкмаларын колдонуу мектеп курсундагы албгебрада каралган маселелерди чыгаруу процессине ачыктыкты, дааналыкты киргизүүгө мүмкүнчүлүк берет жана бул жеке учурда биргелешкен жумуш маселелерине алып келет. Мындай көп сандагы ааркеттерди колдонуу белгилүү кыйынчылыктарга алып келээри түшүнүктүү. Бул жумуштун аягында аналитикалык геометрия олимпиадалык маселелерди чыгарууга кандай жардам берери чагылдырылган.

***Негизги сөздөр**: аналитикалык геометрия, кыймыл, жумуш, координаттык тегиздик, чекит, ылдамдык, убакыт.*

В данной статье наглядно показаны, где используя инструменты аналитической геометрии, упращены традиционные задачи математики и физики на движение, совместную работу и ими подобных. Рассмотрены примеры, иллюстрирующие вычислительные качества метода. Также общее решение задач описывается линейными функциями, точкой с координат и конкретные задачи решаются соответствующими системами уравнений. В статье конкретно рассматриваются примеры и предоставлены выводы. Как уже было отмечено, задачи на движение с постоянной скоростью обычно решаются арифметическими или алгебраическими способами. Использование методов аналитической геометрии позволяет внести наглядность, ясность в процесс решения задачи, которые рассматриваются в школьном курсе алгебры, в частности, к задачам на совместную работу. Понятно, что использование такого большого количества действий представляет определенную сложность. В завершении настоящей работы продемонстрированы, как аналитическая геометрия помогает в решении известной олимпиадной задачи.

***Ключевые слова:** аналитическая геометрия, движение, работа, координатная плоскость, точка, скорость, время.*

This article clearly shows where, using the tools of analytical geometry, the traditional tasks of mathematics and physics are simplified into motion, teamwork, and the tasks like this. The examples illustrating the computational qualities of the method are considered. Also, the general solution of problems is described by linear functions, the point with coordinates and specific tasks are solved by the corresponding systems of equations. The article specifically examines examples and provides conclusions. As already noted, the problem of moving at a constant speed is usually solved by arithmetic or algebraic methods. The use of methods of analytical geometry allows you to bring visibility, clarity in the process of solving the problem, which are considered in the school course of algebra, in particular, to the problems of joint work. It is clear that the use of such a large number of actions presents a certain complexity. At the end of this paper, we demonstrate how analytical geometry helps in solving a well-known olympiad problem.

***Key words:** analytical geometry, motion, work, coordinate plane, point, speed, time.*

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

В истории математики 1637 год оставил заметный след. Тогда был опубликован мемуар Пьера де Ферма «*Введение в изучение плоских и телесных мест*». В том же году появилась «*Геометрия*» Рене Декарта. В этих работах Ферма и Декарт наглядно показали, насколько подход, объединяющий алгебру и геометрию, проще и плодотворней чисто геометрического. Эти работы положили началу аналитической геометрии [1].

В этом разделе математики геометрическим объектам ставятся в соответствие некоторые алгебраические соотношения. Такой метод «алгебраизации» геометрических свойств доказал свою универсальность и плодотворно применяется в естественных науках и технике.

Эффективность методов аналитической геометрии сразу оценили выдающиеся математики мира. В числе тех, кто сделал значительный вклад в ее развитие, значатся такие выдающиеся ученые, как Исаак Ньютон, Клод Клеро, Леонард Эйлер, Жозеф Луи Лагранж и многие другие.

Как это не удивительно, школьная математика практически не заметила это выдающееся достижение. Ярким свидетельством того является раздельное преподавание предметов Алгебры и Геометрии, имеющее место в некоторых странах. На протяжении почти 400 лет, прошедших с момента появления аналитической геометрии, она фактически не применяется в школьной математике.

Для того, чтобы способствовать продвижению аналитической геометрии, в данной статье мы попытались продемонстрировать, как использование ее инструментов упрощает решение традиционных задач математики и физики на движение, совместную работу и ими подобных.

1. **Задача 1.** *Из двух концов бульвара длиной 1344 метра, в 1 час 15 минут навстречу друг другу вышли на прогулку Нургуль и Жаныбек. Они несколько раз доходили до противоположного конца бульвара и шли обратно. Скорость Нургуль 70 м/мин, Жаныбека – 80 м/мин. Когда они встретились в первый раз? А во второй?*

Решение: Так как, предполагается постоянная скорость, движение описывается линейными функциями, которые в данном случае запишем в виде $s - s_M = v\left(t - t_M\right)$.

Здесь, s - расстояние; v - *скорость в м/мин; t – время в минутах;* s_M, t_M – координаты точки, через которую проходит соответствующая прямая.

Начало прогулки Нургуль описывается точкой с координатами (*75; 0*), Жаныбека – точкой (*75; 1344*). Поэтому, уравнение движения Нургуль во время первого пересечения бульвара имеет вид: $s_{N1} - 0 = 70\left(t - 75\right)$; Жаныбека: $s_{J1} - 1344 = -80\left(t - 75\right)$. Отметим, что знак минус перед скоростью у Жаныбека указывает на противоположное направление.

Выразив переменную s через другие: $s_{N1} = 70\left(t - 75\right)$; $s_{J1} = 1344 - 80\left(t - 75\right)$ и воспользовавшись тем, что в момент встречи $s_{N1} = s_{J1}$, получим уравнение $70\left(t - 75\right) = 1344 - 80\left(t - 75\right)$. Отсюда, $150\left(t - 75\right) = 1344$ и $t - 75 = 8{,}96$. Следовательно, $t = 83{,}96$.

Итак, мы определили, что первая встреча состоялась в 83,96 минут, то есть в 1 час 23,96 минут.

Бульвар, от начала до конца, Нургуль проходит за: *1344/70 = 19,2* минуты; Жаныбек — за *1344/80 = 16,8* минуты. Таким образом, второе пересечение бульвара Нургуль описывается уравнением: $s_{N1} - 1344 = -70\left(t - 94{,}2\right)$; Жаныбека: $s_{J1} - 0 = 80\left(t - 91{,}8\right)$.

Тогда, момент второй встречи определяется уравнением $1344 - 70\left(t - 92{,}4\right) = 80\left(t - 91{,}8\right)$. Отсюда, раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим $150t = 15282$. Следовательно, вторая встреча произошла в *101,88 минуты = 1 час 41,88 минуты*.

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

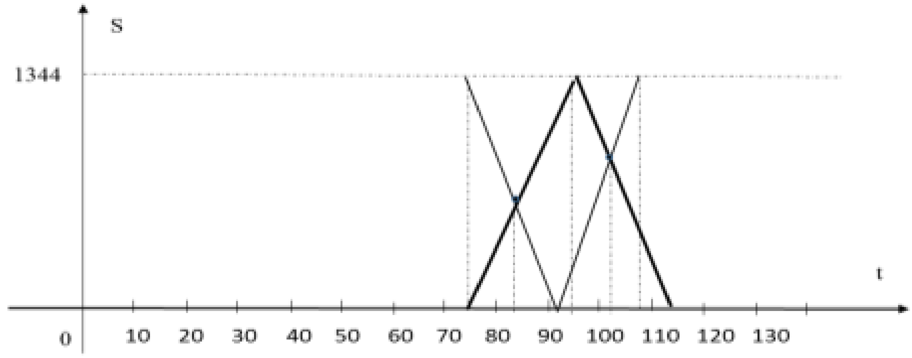

Рис. 1.

Замечание. Искушённый читатель должен подумать: «А стоит ли городить огород? Ведь при встречном движении скорости складываются. Поэтому, они должны встретиться через *1344/(70 + 80) = 8,96* минуты, то есть в: *1 час 15 минут + 8,96 минуты* = 1 час 23,96 минуты. К моменту второй встречи они, вместе пройдут этот бульвар три раза. Таким образом, вторая встреча состоится в: *1 час 15 минут + 3·8,96 минуты* = 1 час 41,88 минуты».

Это правильно! Но, ситуация меняется, если мы рассмотрим ситуацию, в которой движение начинается не одновременно. Решение, использующее линейную функцию, фактически не меняется, а традиционный путь потребует ряд дополнительных умозаключений.

Задача 2. *На следующий день, смотри предыдущую задачу, в 1 час 15 минут на прогулку вышла Нургуль, а Жаныбек задержался и пошел навстречу Нургуль в 1 час 21 минуту. Когда они встретились в первый раз в этом случае? А во второй?*

Решение: В этом случае, уравнение движения Нургуль во время первого пересечения бульвара не изменится: $s_{N1} - 0 = 70(t - 75)$; а у Жаныбека примет вид: $s_{J1} - 1344 = -80(t - 81)$.

Поэтому, момент встречи выражается следующим равенством: $s_{N1} = s_{J1}$, отсюда вытекает следующее уравнение: $70(t-75) = 1344 - 80(t-81)$. Откуда, $150t = 5250 + 1344 + 6480$. Следовательно, $t = 87{,}16$.

Итак, первая встреча состоялась в 87,16 минут, то есть в 1 час 27,16 минут. Теперь, второе пересечение бульвара Нургуль описывается уравнением: $s_{N2} - 1344 = -70(t - 94{,}2)$; Жаныбека: $s_{J1} - 0 = 80(t - 97{,}8)$.

Таким образом, момент второй встречи, в данном случае, определяется уравнением $1344 - 70(t - 94{,}2) = 80(t - 97{,}2)$. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим $50t = 15762$.

Следовательно, вторая встреча произошла в *105,08 минуты = 1 час 45,08 минуты*.

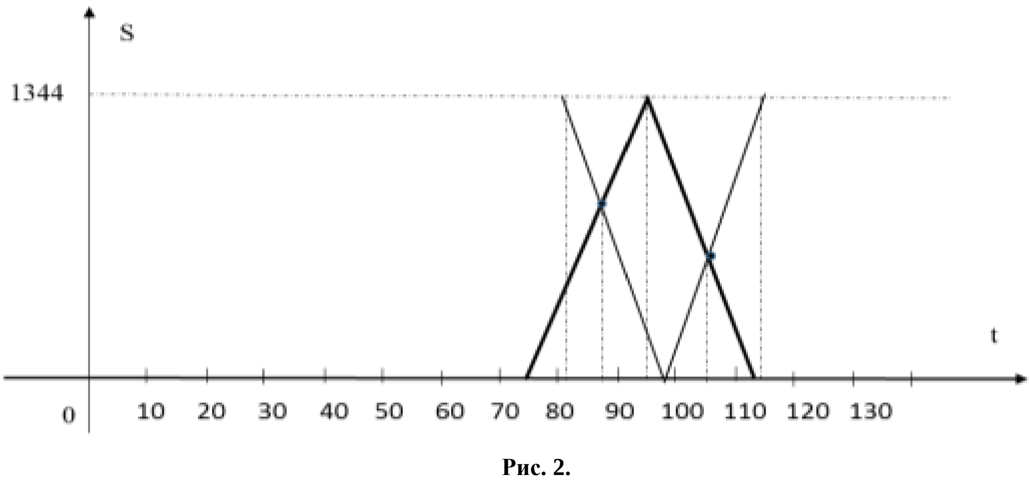

Рис. 2.

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Замечание. Решите задачу, используя традиционные способы. Сравните, с вышеприведенным.

Задача 3. *В третий день, смотри предыдущие задачи, Жаныбек вышел в 1 час 15 минут, а Нургуль задержалась и пошла навстречу Жаныбеку в 1 час 30 минут. Когда они встретились в первый раз в этом случае? А во второй?*

Решение: В этом случае, уравнение движения Нургуль во время первого пересечения бульвара: $s_{N1} - 0 = 70(t-90)$; а у Жаныбека примет вид:

$$s_{J1} - 1344 = -80(t-75).$$

Как и раньше, момент встречи: $S_{N1} = S_{J1}$, найдем, решив соответствующее уравнение $70(t-90) = 1344 - 80(t-75)$.

Отсюда, $150t = 6300 + 1344 + 6000$.

Следовательно, $t = 90{,}96$.

Итак, первая встреча состоялась в 90,96 минут, то есть в 1 час 30,96 минут. Действуя также, как в предыдущих случаях, постараемся ответить на вопрос о второй встрече.

Так как, начальная точка уравнения, описывающая второе пересечение бульвара Нургуль имеет координаты (90+19,2; 1344), Жаныбеком - (75+16,8; 1344), соответствующие уравнения: $s_{N2} - 1344 = -70(t-109{,}2)$; Жаныбека: $s_{J2} - 0 = 80(t-91{,}8)$.

Поэтому, момент второй встречи, определяется уравнением $1344 - 70(t-109{,}2) = 80(t-91{,}8)$. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим $150t = 1344 + 7644 + 7344 \Leftrightarrow t = 108{,}88$.

Но, это неправильный ответ! Увидеть это позволяет чертеж, которым желательно сопровождать решение задачи.

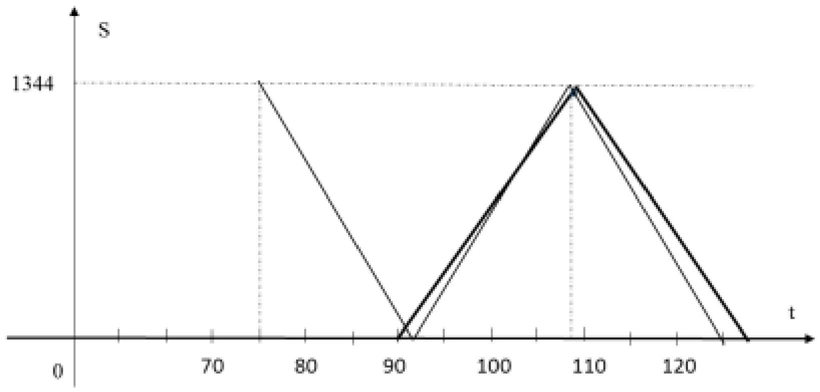

Рис. 3.

Дело в том, что Жаныбек успеет встретить Нургуль, дойти до конца бульвара и догнать Нургуль во время ее первого пересечения бульвара.

Таким образом, уравнение, описывающая второе пересечение бульвара Жаныбеком: $s_{J2} = 80(t-91{,}8)$, условие $S_{N1} = S_{J2}$, приводит к уравнению $70(t-90) = 80(t-91{,}8)$. Его решение: $t = 104{,}4$. Следовательно, вторая встреча произошла в *104,4 минуты = 1 час 44,4 минуты*, а не в *108,88 минут.* Последнее число – это время третьей встречи!

Замечание. Постарайтесь решить и эту задачу, используя традиционные способы. Сравните, с вышеприведенными.

2. Как уже было отмечено, задачи на движение с постоянной скоростью обычно решаются арифметическими или алгебраическими способами. Использование геометрического подхода позволяет внести наглядность, ясность в процесс решения задачи. Так, в книге [2] задача, подобная нижеприведенной, арифметическим способом решается в 11 действий. Понятно, что использование такого большого количества действий представляет определенную сложность.

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Задача 4. *Из города Ленск в полночь выехал поезд и прибыл в город Буров в 6 часов. В 9 часов 30 минут в Ленск прибыл другой поезд, который выехал из Бурова в 0 часов 30 минут. Определите, когда и на каком расстоянии от Ленска встретились поезда, если расстояние между этими городами равно 360 километров.*

Решение: В задачах с подобным содержанием, по умолчанию, предполагается движение с постоянной скоростью. Поэтому, можно говорить о том, что между пройденным расстоянием и временем описывается линейной функцией $y = kx + b$.

В данном случае эту функцию удобней записать в виде $s = vt + s_0$. Здесь, *s* – расстояние; *v – скорость; t – время; s_0 –* «*свободный коэффициент*».

Рассмотрим Ленск как точку начала отсчета. Тогда, на координатной плоскости (*t; s*) перемещение первого поезда описывается прямой *EL*, определяемой точками *E*(*0; 0)* и *L(6; 360*), а перемещение второго поезда – прямой *SR*, определяемой точками *S*(*0,5; 360*) и *R*(*9,5; 0*).

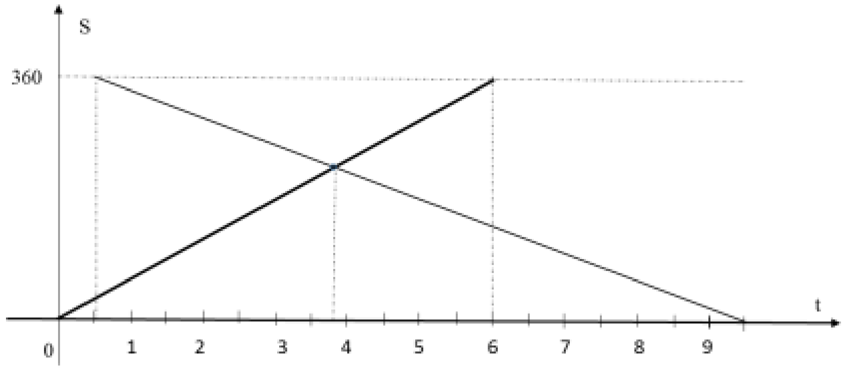

Рис. 4.

Для того чтобы получить уравнение прямой *EL* в виде $s = vt + s_0$, воспользуемся координатами точек *E* и *L*:

$$\begin{cases} 0 = v \cdot 0 + s_0, \\ 360 = v \cdot 6 + s_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = v \cdot 0 + s_0, \\ 360 = v \cdot 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_0 = 0, \\ v = 60. \end{cases}$$

Итак, выяснилось, что первый поезд двигался со скоростью 60 км/час и его движение описывается уравнением $s = 60t$.

Для того чтобы получить уравнение прямой *SR*, описывающей перемещение второго поезда, используем координаты соответствующих точек:

$$\begin{cases} 360 = v \cdot 0,5 + s_0, \\ 0 = v \cdot 9,5 + s_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 360 = v \cdot 0,5 + s_0, \\ 360 = -9v, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_0 = 360 - v \cdot 0,5, \\ v = -40, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_0 = 380, \\ v = -40. \end{cases}$$

Таким образом, расстояние, на котором от Ленска находится второй поезд определяется уравнением $s = -40t + 380$. Знак минус перед величиной скорости указывает на то, что этот поезд движется в направлении противоположном направлению движения первого поезда.

Для того чтобы определить координаты точки встречи поездов осталось решить соответствующую систему:

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$$\begin{cases} s = 60t, \\ s = -40t + 380, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 60t, \\ 60t = -40t + 380, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = 60t, \\ 100t = 380, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 60 \cdot 3{,}8 = 228, \\ t = 3{,}8. \end{cases}$$

Выяснилось, что они встретились в 3,8 часов, что равно 3 часам 48 минутам на расстоянии 228 км от Ленска.

3. Использование методов аналитической геометрии позволяет внести ясность и в другие задачи, обычно рассматриваемые в школьном курсе алгебры. В частности, к задачам на совместную работу.

Задача 5. *Динара начала полоть грядку в 1 час 20 минут. В 1,5 час с другого конца грядки, к работе приступил Мухтар. В котором часу они закончат полоть эту грядку? Известно, что Динара может одна прополоть такую грядку за 1 час, Мухтар – за 40 минут.*

Решение: Также как и в задачах на движение с постоянной скоростью, по умолчанию, предполагается, что имеет место постоянная производительность труда. Поэтому, и здесь можно говорить о том, что между выполненной работой и временем описывается линейной функцией $y = kx + b$.

В данном случае функцию запишем в виде $a = pt + a_0$. Здесь, *a – объем выполненной работы; p – производительность труда; t – время;* a_0 *– «объем выполненной работы» в нулевой момент времени*.

Таким образом, на координатной плоскости (*t; a*), работа выполненная Динарой описывается прямой *DE*, определяемой точками *D*(*80; 0)* и *E(140; A*), а Мухтаром - прямой *MN*, определяемой точками *M*(*90; A*) и *N*(*130*; *0*). Здесь время выражено в минутах, объем всей работы обозначен *A*.

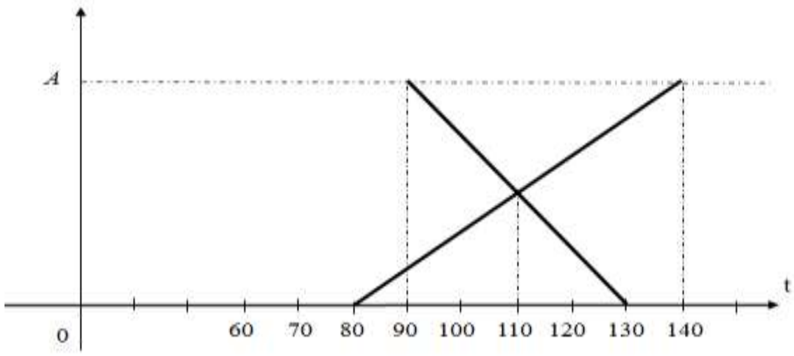

Рис. 5.

Для того, чтобы получить уравнение прямой *DE* в виде $a = pt + a_0$, воспользуемся координатами точек *D* и *E*:

$$\begin{cases} 0 = p \cdot 80 + a_0, \\ A = p \cdot 140 + a_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = p \cdot 80 + a_0, \\ A = p \cdot 60, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -p \cdot 80, \\ p = A/60, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -80A/60 = -4A/3, \\ p = A/60. \end{cases}$$

Итак, производительность труда Динары равна *A/60* и объем выполненной ею работы описывается уравнением *a = At/60 - 4A/3.*

Для того, чтобы получить уравнение прямой *MN*, описывающей работу Мухтара, в уравнение *MN* подставим координаты соответствующих точек:

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$$\begin{cases} A = p\cdot 90 + a_0, \\ 0 = p\cdot 130 + a_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -p\cdot 40, \\ 0 = p\cdot 130 + a_0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = -A/40, \\ a_0 = -130p3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -A/40, \\ a_0 = 130A/40 = 13A/4. \end{cases}$$

Отрицательное значение производительности труда указывает на то, что Мухтар работает в «обратном направлении».

Итак, работа Мухтара определяется уравнением $a = -At/40 + 13A/4.$

Для того, чтобы определить момент окончания совместной работы, осталось решить соответствующую систему:

$$\begin{cases} a = At/60 - 4A/3, \\ a = -At/40 + 13A/4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = At/60 - 4A/3, \\ At/60 - 4A/3 = -At/40 + 13A/4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = At/60 - 4A/3, \\ t/60 + t/40 = 4/3 + 13/4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = At/60 - 4A/3, \\ 5t/120 = 55/12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = A/2, \\ t = 110. \end{cases}$$

Выяснилось, что работа будет закончена, когда часы покажут 1 час 50 минут, что соответствует 110 минутам.

Задача 6. *Дастан в 1 час приступил к выполнению некоторой работы, рассчитывая закончить ее в 4 часа. Однако, в 2 часа ему начала помогать Ксения и они закончили работу в 3 часа 30 минут. Сколько времени понадобится Ксении для того чтобы в одиночку выполнить такую работу?*

Решение: Также, как и в задачах на движение с постоянной скоростью, по умолчанию, предполагается, что имеет место постоянная производительность труда. Поэтому, и здесь можно говорить о том, что между выполненной работой и временем описывается линейной функцией $y = kx + b$.

В данном случае функцию запишем в виде $a = pt + a_0$. Здесь, *a – объем выполненной работы; p – производительность труда; t – время;* a_0 *– «объем выполненной работы» в нулевой момент времени*.

Таким образом, на координатной плоскости (*t; a*), работа Дастана описывается прямой *DN*, определяемой точками *D* (*1; 0)* и *N(4; A*). Здесь, время выражено в часах, объем всей работы обозначен *A*.

Используем координаты точек *D* и *N*:

$$\begin{cases} 0 = p\cdot 1 + a_0, \\ A = p\cdot 4 + a_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = p\cdot 1 + a_0, \\ A = p\cdot 3, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -p\cdot 1, \\ p = A/3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -A/3, \\ p = A/3. \end{cases}$$

Итак, производительность труда Дастана равна *A/3,* его работа описывается уравнением $a = At/3 - A/3,$ к моменту окончания совместной работы он выполнил работу в объеме $a = A\cdot 3{,}5/3 - A/3 = 2{,}5A/3 = 5A/6.$

Ксения попадает в точку окончания совместной работы *K(3,5; 5A/6)*, начав работу с «противоположного конца» *S(2; A)*:

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

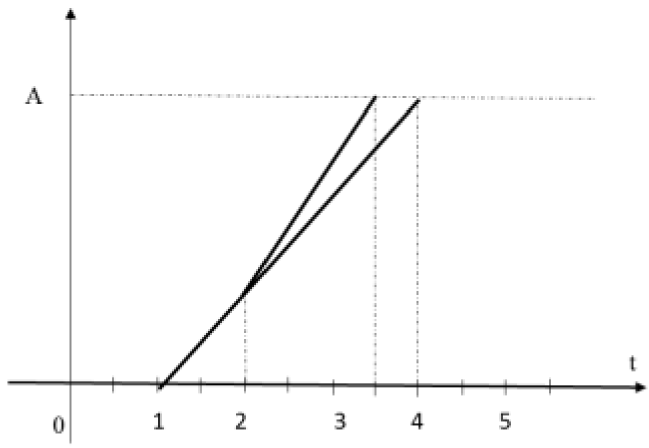

Рис. 6.

$$\begin{cases} A = p \cdot 2 + a_0, \\ 5A/6 = p \cdot 3{,}5 + a_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = p \cdot 2 + a_0, \\ A/6 = -p \cdot 1{,}5, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A - p \cdot 2 = a_0, \\ p = -A/9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -A/9, \\ a_0 = A - (-A/9)2 = 11A/9. \end{cases}$$

Итак, работа Ксении определяется уравнением $a = -At/9 + 11A/9$.

Для того чтобы определить момент окончания работы, выполненной Ксенией единолично, осталось подставить конечную координату: $0 = -At/9 + 11A/9 \Leftrightarrow t/9 = 11/9 \Leftrightarrow t = 11$.

Выяснилось, что Ксенией может единолично выполнить такую работу за: $11 – 2 = 9$ часов.

4. В завершение этой работы продемонстрируем, как аналитическая геометрия помогает в решении известной олимпиадной задачи.

Задача 7. *Часы показывают 2 часа. В какой момент времени минутная стрелка догонит часовую?*

Решение: Так как минутная и часовая стрелки двигаются с одинаковой скоростью, и здесь можно использовать линейную функцию $y = kx + b$. Обозначив через y количество делений на циферблате, t – время измеренное в часах ($t < 12$), получим, что движение часовой стрелки описывается уравнением $y = 5t$, а движение минутной стрелки в период времени от 2 часов до 3 часов – уравнением $y = 60(t-2)$.

Поэтому, момент времени, когда минутная стрелка догонит часовую определяется системой

уравнений $\begin{cases} y = 5t, \\ y = 60(t-2). \end{cases}$

Решив эту систему, получим решение задачи

$$\begin{cases} y = 5t, \\ y = 60(t-2), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5t, \\ y = 60t - 120, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5t, \\ 5t = 60t - 120, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5t, \\ 120 = 55t, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10\dfrac{10}{11}, \\ t = 120/55 = 2\dfrac{2}{11}. \end{cases}$$

Итак, минутная стрелка догонит часовую в 2 часа и $10\dfrac{10}{11}$ минут.

Замечание. Несложно понять, что движение минутной стрелки в период времени от n часов до $n+1$ часов описывается уравнением $y = 60(t-n)$ ($t, n < 12$).

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Литература:

1. Stillwell, John. Analytic Geometry // Mathematics and its History. Second Edition. Springer Science + Business Media Inc., 2004.
2. Зубелевич Г.И. Сборник задач Московских математических олимпиад. - М.: «Просвещение», 1971.
3. Урдалетова А.Б., Кыдыралиев С.К., Керимкулова Э.Дж. Треугольники на языке аналитической геометрии. / Республиканский научно-теоретический журнал «Известия вузов Кыргызстана», №6. - Бишкек, 2018. - С. 3-16.
4. Урдалетова А.Б., Кыдыралиев С.К., Керимкулова Э.Дж. Один раз отрежь, семь раз измерь. / Республиканский научно-теоретический журнал «Известия вузов Кыргызстана», №3. - Бишкек, 2018. - С. 3-6.

Рецензент: к.э.н. Аманалиева М.О.