DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Каримов С., Абдилазизова А.А.

СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН ЧЕЧИМДЕРИНИН ӨЗГӨЧӨ КРИТИКАЛЫК УЧУРДАГЫ АСИМПТОТИКАЛЫК БААЛАРЫ

Каримов С., Абдилазизова А.А.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОСОБО КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

S. Karimov, A.A. Abdilazizova

ASYMPTOTIC ESTIMATE OF THE SOLUTION OF SINGULAR PERTURBED SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PARTICULARLY CRITICAL CASE

УДК: 517.928

Бул жумушта сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелер системасынын чечиминин бир калыпта жакындашуусу каалаган тактыкта өзгөчө учурда тургузулган. Туруктуулук шарты бузулган учурда сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелер системасы үчүн Кошинин баштапкы маселеси каралган. Сызыктуу эмес системанын матрицасы комплекстик түйүндөш өздүк маанилерге ээ болот. Экинчи тартиптеги сызыктуу эмес сингулярдык козголгон теңдеменин өзгөчө критикалык учурдагы маселеси изилденген, мында туруктуулук шартын аныктоочу өздүк маанилер (матрица коэффициенттери сызыктуу белгисиз функция болгон учурда) комплекстик тегиздикте чектелбеген аймактын чексиз алыстатылган чекитинде гана нөлгө ээ болот. Өзгөчө критикалык чекиттин чекебелинде козголгон жана козголбогон маселелердин чечимдеринин жакындыгы далилденген. Өзгөчө критикалык чекиттин чекебелине сингулярдык аймак аныкталган жана ал аймак үчүн баалоо алынган.

***Негизги сөздөр:** матрица, теңдеме, аналитикалык фунция, ийри сызыктуу төрт бурчтук, сингулярдык козголгон система, Кошинин баштапкы шарты, матрицанын өздүк маанилери, чечим, асимптотикалык, өзгөчө учур, бир калыпта жакындашуу.*

В данной работе построены равномерные приближения решения сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с любой степенью точностью в особо критическом случае. Рассматривается начальная задача Коши для сингулярно возмущенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости. Матрица нелинейной системы имеет комплексно сопряженные собственные значения. Исследовано задача для системы нелинейных сингулярно возмущенных уравнений второго порядка в особо критических случаях, когда собственные значения (матриц-коэффициентов при линейных неизвестных функциях), определяющие смены устойчивости в неограниченной области комплексной плоскости имеют нулей только на бесконечно удаленных точках. Доказывается близости решения возмущенной и невозмущенной задачи в окрестности особой критической точки. В окрестности особо критической точки определена область и на этой области получена оценка.

***Ключовые слова:** матрица, уравнения, аналитическая функция, криволинейный четырехугольник, сингулярно возмущенная система, начальное условие Коши, собственные значения матрицы, решение, асимптотическая, критический случай, равномерные приближения.*

In this article uniform approximations are constructed for solving singularly-perturbed system of differential equations with any degree of accuracy in a special critical case.Initially problem of Cauchy for singular perturbed system of ordinary differential equations in the case of change of stability is considered. The matrix of a nonlinear system has complex conjugate eigenvalues. The problem is investigated for a system of nonlinear singularly perturbed second-order equations in especially critical cases when the eigenvalues (matrix coefficients for linear unknown functions) that determine stability changes in an unbounded region of the complex plane have zeros only at infinitely distant points. The proximity of the solution of perturbed and nonperturbed problems in neighborhood of singular critical point is proved. In the vicinity of a particularly critical point, a region is defined and an estimate is obtained on this region.

***Keywords:** matrix, equations, analytic function, curved quadrilateral, singularly perturbed system, initial Cauchy problem, solution, eigenvalues of a matrix, asymptotic, critical case, uniform approximations.*

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon)=F(t,z), \tag{1}$$

$$z(t_0,\varepsilon)=z^0, \tag{2}$$

где z, F –2-мерные вектор - функции; $\varepsilon>0$ –малый параметр, $z^0-const$;

$[t_0,T]$ – отрезок действительной оси, $t_0<T; [t_0<T]\subset S_r$ – открытый круг радиуса $r>\frac{T_0-t_0}{2}+d$ $(d\in R, d>0)$ с центром в точке $\left(\frac{t_0+T_0}{2},0\right)$, $t\in S_r$. Пусть $F(t,z)$ – голоморфная вектор-функция переменных *t, z* в некоторой окрестности точки (t_0,b_0), причем $F(t_0,b_0)=0$ и при $t=t_0,\ z=b_0$, функциональный определитель $|\partial F/\partial z|\neq 0$.

Тогда вырожденная система $F(t,\tilde{z})=0$ имеет единственное голоморфное решение $\tilde{z}=g(t)$ в некоторой окрестности точки $t=t_0$, причем $\tilde{z}(t_0)=b_0=g(t_0)$.

Пусть $z=g(t)+y(t,\varepsilon)$, где $y(t,\varepsilon)$– новая неизвестная вектор - функция.

Тогда задача (1), (2) приводится к виду:

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon)=\varepsilon h(t)+A(t)y(t,\varepsilon)+F_1(t,y), \tag{3}$$

где $h(t)=-g'(t)$; $A(t)=\partial F/\partial z$ при $z=g(t)$; $F_1(t,y)$ – совокупность членов более высоких порядков чем, $A(t)y(t,\varepsilon)$ т.е., разлагающиеся в области $|y_j|<\delta$ $(j=1,2, 0<\delta-const)$ в ряды по степеням переменных y_1, y_2, причем разложения начинаются членами не ниже второго порядка.

Начальное условие для решения системы (3) имеет вид:

$$y(t_0,\varepsilon)=z(t_0,\varepsilon)-g(t_0)=y^0(\varepsilon)$$

$$y^0(\varepsilon)=z_0-b_0;\ \|y(t_0,\varepsilon)\|=O(\varepsilon).$$

Пусть для собственных значений $\lambda_j(t)$ матрицы *A(t)* имеют места неравенства $\operatorname{Re}\lambda_j(t_0)<0$, тогда как известно [4], что если *y(t,ε)* решение системы (3), удовлетворяющего условию

$$y(t_0,\varepsilon)=y^0(\varepsilon),\ \|y^0(\varepsilon)\|=O(1),$$

то это решение при $t=t_0+\delta$ будет удовлетворять условию

$$\|y(t_0+\delta,\ \varepsilon)\|=O(\varepsilon),$$

где δ - достаточно малое положительное число, независящее от *ε*.

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Таким образом, не нарушая общности, будем предполагать, что $y(t,\varepsilon)$ - решение системы (3), удовлетворяющее условию

$$y(t_0,\varepsilon)=y^0(\varepsilon),\ \left\|y^0(\varepsilon)\right\|=O(\varepsilon) \tag{4}$$

Теперь рассмотрим задачу (3), (4) вместо задачи (1), (2).

Пусть $\lambda_k(t)\neq\lambda_j(t)$ при $k\neq j$ и $\det A(t)\neq 0,$ для конечных $t.$ Тогда существует неособенная матрица $B_0(t)$ такая, что матрица $A(t)$ допускает преобразование в диагональную:

$$B_0^{-1}(t)A(t)\mathbf{B}_0(t)=D(\mathrm{t})=diag\,(\lambda_1(t),\lambda_2(t)).$$

Преобразование матрицы $A(t)$ в диагональную матрицу возможно в случае кратных собственных значений.

Пусть $y(t,\varepsilon)=B_0x(t,\varepsilon)$, где $x(t,\varepsilon)$ – новая неизвестная вектор-функция.

Тогда задача (3), (4) будет равносильна задаче:

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon)=D(t)x(t,\varepsilon)+\varepsilon\big[\,f(t)+B(t)x(t,\varepsilon)\big]+f(t,x(t,\varepsilon)), \tag{5}$$

$$x(t_0,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\,,\left\|x(t_0,\varepsilon)\right\|=O(\varepsilon), \tag{6}$$

где $D(t)=diag\,(\lambda_1(t),\,\lambda_2(t));$

$$f(t)=B_0^{-1}(t)h(t)=colon(f_1(t),\ f_2(t));\quad B(t)=-B_0^{-1}(t)\dot{B}_0(t)=\left(b_{kj}(t)\right)_1^2;$$

$$f(t,x(t,\varepsilon))=B_0^{-1}(t)F_1(t,B_0(t)x)=colon(f_1(t,x),\ f_2(t,x));\ x^0(\varepsilon)=B_0^{-1}(t_0)y^0(\varepsilon).$$

$f(t,x(t,\varepsilon)))$ разлагается в области $\Delta(t,x)$ в ряды по степеням переменных x_1,x_2 , причем разложения начинаются членами не ниже второго порядка.

Если преобразующая матрица не зависит от t, т.е. $B_0(t)=B_0$ – $const$, то в этом случае $B(t)\equiv 0$.

Если $A(t)=\begin{pmatrix}\sin t & \cos t\\ -\cos t & \sin t\end{pmatrix}$, то собственные значения матрицы $A(t)$ будут

$$\lambda_1(t)=\sin t+i\cos t,\quad \lambda_2(t)=\sin t-i\cos t.$$

$$\Delta(t,x)=\left\{(t,x)=(t,x_1,x_2):\ t\in S_r,\ \left|x_j\right|<\delta\ (j=1,2),\quad 0<\delta-const\right\},$$

$\Phi(S_r)$ - пространство аналитических функций в S_r.

I. Пусть

$$A(t)=\left(a_{kj}(t)\right)_1^2,\quad a_{kj}(t)\in\Phi(S_r);\quad f_k(t)\in\Phi(S_r);$$

$$b_{kj}(t)\in\Phi(S_r);\ \ f_k(t,x)\in\Phi(\Delta(t,x));(k,j=\overline{1,2});$$

Решение $x(t,\varepsilon)=colon(x_1(t,\varepsilon),\ x_2(t,\varepsilon))$ задачи (5), (6) будем искать в классе

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$x_k(t,\varepsilon)\in\Phi(S_r)$ $(k=\overline{1,2})$ по t.

II. Пусть $\lambda_k(t)$ собственные значения матрицы $A(t)$, причем среди $\lambda_k(t)$ могут оказаться кратные. Так как $a_{kj}(t)\in\Phi(S_r)$, то $\lambda_k(t)\in\Phi(S_r)$ $(k,j=1,2)$.

а) $\lambda_1(t)=\alpha(t)+i\beta(t)$; $\lambda_2(t)=\alpha(t)-i\beta(t)$, действительная часть которых меняет знаки: $\alpha(t)<0$ при $t_0\le t<a_0$; $\alpha(t)>0$ при $a_0<t\le T_0$; $\alpha(a_0)=0$ но $\beta(a_0)\ne 0$.

в) $\operatorname{Re}\lambda_j(t)<0$ при $t_0\le t\le T_0$ для $j=1,2$.

Теперь заменим задачи (5), (6) на эквивалентную задачу

$$x(t,\varepsilon)=E(t,t_0,\varepsilon)x^0(\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)[B(\tau)x(\tau,\varepsilon)+f(\tau)]d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)\,f(\tau,x(\tau,\varepsilon))d\tau, \qquad (7)$$

где $E(t,\tau,\varepsilon)=\exp\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}D(s)ds$; $\begin{matrix}\mathrm{P}(t,\varepsilon)=b_{11}(t)x_1(t,\varepsilon)+b_{12}(t)x_2(t,\varepsilon);\\ Q(t,\varepsilon)=b_{21}(t)x_1(t,\varepsilon)+b_{22}(t)x_2(t,\varepsilon);\end{matrix}$

$$\mathrm{E_k}(t,\tau,\varepsilon)=\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda_k(s)ds\right]\quad (k=1,2);\ f(t,x(t,\varepsilon))=\begin{pmatrix}f_1(t,x(t,\varepsilon))\\ f_2(t,x(t,\varepsilon))\end{pmatrix},$$

$p(t,\varepsilon)=f_1(t,x(t,\varepsilon))$; $q(t,\varepsilon)=f_2(t,x(t,\varepsilon))$.

Задачу (7) запишем в скалярном виде

$$x_1(t,\varepsilon)=x_1^0(\varepsilon)E_1(t,t_0,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E_1(t,\tau,\varepsilon)[f_1(\tau)+\mathrm{P}(\tau,\varepsilon)]d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}E_1(t,\tau,\varepsilon)p(\tau,\varepsilon)d\tau,$$

$$x_2(t,\varepsilon)=x_2^0(\varepsilon)\cdot E_2(t,t_0,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E_2(t,\tau,\varepsilon)[f_2(\tau)+Q(\tau,\varepsilon)]d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}E_2(t,\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau. \qquad (8)$$

Из (6) получаем

$$\left|x_1^{(0)}\right|=\left|x_1^{(0)}(\varepsilon)\right|=O(\varepsilon);\quad \left|x_2^{(0)}\right|=\left|x_2^{(0)}(\varepsilon)\right|=O(\varepsilon). \qquad (9)$$

Задачу (8) будем решать методом последовательных приближений.

Пусть

$t=t_1+it_2$, $\tau=\tau_1+i\tau_2$, где t_1,t_2,τ_1,τ_2 - действительные переменные.

$$\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t}\lambda_1(s)ds=\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t}\lambda_2(s)ds=\int_{t_0}^{t}\alpha(s)ds\le 0 \qquad (10)$$

при $t_0\le t\le T_0$, причем равенство имеет место только при $t=t_0$, $t=T_0$.

Тогда $u(t_0,0)=v(t_0,0)=u(T_0,0)=0$.

Основная задача здесь является доказательства существования решений возмущенной задачи и оценки близости решений возмущенной и невозмущенной задачи при $\varepsilon\to 0$ на промежутке $\left[t_0,T_0-\tilde{\delta}(\varepsilon)\right]$ где

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

непрерывная функция $\tilde{\delta}(\varepsilon) \geq 0$ при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \tilde{\delta}(\varepsilon) = 0$.

III. Случай, когда собственные значения имеют нулей только на бесконечно удаленных точках рассматриваемой области *H₀*

Мы предполагаем существование линий уровня, соединяющих любую точку отрезка $[t_0, a_0)$ с некоторой точкой отрезка $(a_0, T_0]$.

$$u_k(t_1, t_2) = \mathrm{Re}\int_{t_0}^{t} \lambda_k(s) ds \leq 0;$$

$$H_0 = \{(t_1, t_2): u_k(t_1, t_2) \leq 0 (k = 1,2)\}.$$

Будем считать, что если (t_1, t_2 – внутренняя точка области H_0, то гармоническая функция $Jm\lambda_k$ (t_1, t_2) > 0 и если (t_1 ,t_2) – граничная точка области H_0, то может иметь место $Jm\lambda_k$ (t_1 ,t_2) = 0.

Пусть $\delta - const$, причем $0 < \delta \ll 1$;

$$H_\delta = \{(t_1, t_2): t_0 - \delta \leq t_1 \leq T_0 + \delta;\ -\infty < t_2 < +\infty\}.$$

Для оценки последовательных приближений используем основную лемму работы [2].

Пусть $C_1 = \alpha(\varepsilon); C_2 = 2\alpha(\varepsilon)$.

Тогда $t_{01} = t_0 + \gamma_1(\varepsilon), T_1 = T_0 - \tilde{\gamma}_1(\varepsilon); t_{02} = t_0 + \gamma_2(\varepsilon), T_2 = T_0 - \tilde{\gamma}_2(\varepsilon)$.

В этом случае область Kобозначим через $K_0 \subset H_0$.

Величины a, b принимает значение $a = -\frac{\varepsilon^p}{T_2 - t_{01}}, b = -\varepsilon^p \frac{2T_0 - t_0 - \gamma_5 - 2\gamma_4}{T_2 - t_{01}}$.

1) Пусть $C_1 = -\varepsilon^p, C_2 = -2\varepsilon^p$, где $0 < p < 1, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Тогда $t_{01} = t_0 + \gamma_3(\varepsilon), T_1 = T_0 - \gamma_5(\varepsilon);\ t_{02} = t_0 + \gamma_4(\varepsilon), T_2 = T_0 - \gamma_4(\varepsilon)$

В этом случае область K обозначим через $S_\varepsilon \subset H_0$.

Величины a, b принимает значение $a = -\frac{\varepsilon^p}{T_2 - t_{01}}, b = -\varepsilon^p \frac{2T_0 - t_0 - \gamma_5 - 2\gamma_4}{T_2 - t_{01}}$.

2) Пусть $C_1 = \varepsilon ln\varepsilon;\ C_2 = 2\varepsilon ln\varepsilon\ (0 < \varepsilon \leq e^{-1})$.

Тогда $t_{01} = t_0 + \gamma_5(\varepsilon), T_1 = T_0 - \tilde{\gamma}_5(\varepsilon);\ t_{02} = t_0 + \gamma_6(\varepsilon), T_2 = T_0 - \gamma_6(\varepsilon)$.

В этой случае область Kобозначим через $K_\varepsilon \subset H_0$.

Величины a, bпринимает значение $a = \varepsilon ln\varepsilon \frac{1}{T_2 - t_{01}}, b = \varepsilon ln\varepsilon \frac{2T_0 - t_0 - \gamma_1(\varepsilon) - 2\gamma_6(\varepsilon)}{T_2 - t_{01}}$.

3) Пусть $C_1 = -\varepsilon, C_2 = -2\varepsilon$. Тогда$t_{01} = t_0 + \gamma_7(\varepsilon)$,

$$T_1 = T_0 - \gamma_7(\varepsilon);\ t_{02} = t_0 + \gamma_8(\varepsilon), T_2 = T_0 - \gamma_8(\varepsilon).$$

В этом случае область K обозначим через $Q_\varepsilon \subset H_0$.

Величины a, b принимает значение $a = -\frac{\varepsilon}{T_2 - t_0}, b = -\varepsilon \frac{2T_0 - t_0 - \gamma_7 - 2\gamma_8}{T_2 - t_{01}}$.

Пусть $\tilde{K} = \Delta \cup K$, где $\Delta = \{(t_1, t_2): t_0 \leq t_1 \leq t_{01}, t_2 = 0\}$.

Теперь будем оценивать $x(t, \varepsilon)$ для$\forall t \in \tilde{K}$. Здесь также путь интегрирования l определяется в зависимости от того, какому множеству принадлежит точки (t_1, t_2).

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Если $(t_1, t_2) \in\Delta$ $(t = t_1,\ t_2 = 0)$, тоl состоит из одного отрезка прямой, соединяющий точки $(t_0, 0)$ с точкой $(t_1, 0)(t_0 \le t_1 \le t_{01})$. В этом случае $Re\lambda_k(t) \le -\alpha, \alpha > 0 - const$.

Пусть $(t_1, t_2) \in K$. Тогда$l = \bigcup_{k=1}^{3} l_k$, где l_1 - отрезок прямой, соединяющий точки $(t_0, 0)$ с точкой $(t_{01}, 0)$; l_2 -отрезок кривой (K_0), соединяющий точки $(t_{01}, 0)$ с точкой $\left(t_1, t_2^* = \tilde{\varphi}(t_1)\right)$; l_3- отрезок прямой, соединяющий точки (t_1, t_2^*)с точкой (t_1, t_2). Заметим, чтоесли $(t_1, t_2) \in K$, то на кривой (K_0), при любом допустимом t_1имеет единственная точка $\left(t_1, t_2^* = \varphi(t_1)\right)$.

Для первых приближений $x_1^{(1)}(t,\varepsilon), x_2^{(1)}(t,\varepsilon)$ при $(t_1, t_2) \in K_0 \subset H_0$:

$$\left|x_k^{(1)}(t,\in)\right| \le c\frac{-\varepsilon}{\alpha(\varepsilon)} \qquad (k = 1,2), \tag{11}$$

где $0 < c - const; 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$; $\alpha(\varepsilon)$ - монотонно убывающая непрерывная функции при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ причем $\alpha(0) = 0$; $\Delta = \{(t_1, t_2) : t_0 \le t_1 \le t_0 + \gamma(\varepsilon), t_2 = 0\}$, $0 < \gamma(\varepsilon)$ - непрерывная функция при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, причем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma(\varepsilon) = 0.$

Если $\alpha(\varepsilon) = -\delta, \delta - const, 0 < \delta << 1$ то область K обозначается через $\tilde{H}_c$. В этом случае оценка (11) имеет вид:

$$\left|x_k^{(1)}(t,\varepsilon)\right| \le c\cdot\varepsilon, (k = 1,2) \tag{12}$$

где $0 < c - const; 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0; (t_1, t_2) \in \tilde{H}_c$.

Если $\alpha(\varepsilon) = -\varepsilon^p$, $p - const, 0 < p < 1,$ то область K обозначается через $\tilde{S}_\varepsilon$. В этом случае оценка (11) имеет вид:

$$\left|x_k^{(1)}(t,\varepsilon)\right| \le c\cdot\varepsilon^{2-p}, 0 < p < 1 \tag{13}$$

где $0 < c - const;\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0;\ (t_1, t_2) \in \tilde{S}_\varepsilon.$

Теперь рассмотрим оценки функции

$$x_k^{(2)}(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t} E_k(t,\tau,\varepsilon)\left[b_{k_1}(\tau)x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) + b_{k_2}x_2^{(1)}(\tau,\varepsilon)\right]d\tau + $$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} E_k(t,\tau,\varepsilon)\, f_k\left(\tau, x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon)x_2^{(1)}\right)d\tau, \kappa = 1,2. \tag{14}$$

где $\left|b_{kj}(t) = O(1)\right|$ $(k, j = 1,2)$, $(t_1, t_2) \in H_0$; $\left\|f\left(t, x_1^{(1)}(t,\varepsilon), x_2^{(1)}(t,\varepsilon)\right)\right\| \le \mu\cdot\left\|x^{(1)}(t,\varepsilon)\right\|^{1+\beta}$, в $\phi(\Delta(t,x))$, μ, β - положительные постоянные.

При $(t_1, t_2) \in K$ из (14) получим (15)

$$\left|x_k^{(2)}(t,\varepsilon)\right| \le c\cdot\frac{-\varepsilon}{\alpha(\varepsilon)}\left[1 + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{-\varepsilon}{\alpha(\varepsilon)}\right)^{\beta}\right]\left|\int_{e^*}\exp\frac{1}{\varepsilon}\left[u_k(t_1,t_2) - u_k(\tau_1,\tau_2)\right]d\tau\right| \tag{15}$$

где $e^* = e$ при $k = 1$; $e^* = \tilde{e}$ при $k = 2$;

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Далее при $(t_1,t_2)\in K$ получим

$$\int_e \exp\frac{1}{\varepsilon}\left[u_1(t_1,t_2)-u_1(\tau_1,\tau_2)\right]d\tau\Big| \le c\cdot\frac{-\varepsilon}{\alpha(\varepsilon)};$$

$$\int_{\tilde e} \exp\frac{1}{\varepsilon}\left[u_1(t_1,t_2)-u_1(\tau_1,\tau_2)\right]d\tau\Big| \le c\cdot\frac{-\varepsilon}{\alpha(\varepsilon)};$$

где $0<c-const.$

Теперь оценка (15) имеет вид:

$$\left|x_k^{(2)}(t,\varepsilon)\right| \le \left[c\cdot\frac{-\varepsilon}{\alpha(\varepsilon)}\right]^2\cdot\left[1+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{-\varepsilon}{\alpha(\varepsilon)}\right)^\beta\right]. \qquad (16)$$

Если $(t_1,t_2)\in \tilde H_c$ и $\beta=1,$ то из (16) получим оценка

$$\left|x_k^{(2)}(t,\varepsilon)\right| \le (c\cdot\varepsilon)^2,\ k=1,2 \text{ где } 0<c-const;\ 0<\varepsilon<\varepsilon_0. \qquad (17)$$

Если $(t_1,t_2)\in \tilde S_\varepsilon$ и $\beta\ge\dfrac{1}{1-p}$, то из (16) получим оценка

$$\left|x_k^{(2)}(t,\varepsilon)\right| \le \left(c\cdot\varepsilon^{1-p}\right)^2\ k=1,2 \text{ где } 0<c-const;\ 0<p<1; 0<\varepsilon<\varepsilon_0. \qquad (18)$$

Если $(t_1,t_2)\in \tilde K_\varepsilon$, то из (16) получим оценка

$$\left|x_k^{(2)}(t,\varepsilon)\right| \le (c\cdot\delta_0(\varepsilon))^2 \text{ только при } f(t,x)\equiv 0, \qquad (19)$$

где $0<c-const;\ \delta_0(\varepsilon)=\dfrac{1}{|\ln\varepsilon|};(0<\varepsilon\le\varepsilon_0).$

Так как для любого $a>0$ имеет место $\varepsilon^a=o(\delta_0(\varepsilon));$ то при любом $f(t,x)\ne 0,$ величина $\left|x_k^{(2)}(t,\varepsilon)\right|$ с верху неограниченные. Рассмотрим оценки функций при $(t_1,t_2)\in K$:

По методу полной математической индукции доказывается оценка

$$\left|x_k^{(n)}(t,\varepsilon)\right| \le \left[c\frac{-\varepsilon}{\alpha(\varepsilon)}\right]^n\cdot\left[1+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{-\varepsilon}{\alpha(\varepsilon)}\right)^\beta\right]^{n-1}\ k=1,2; n=1,2,3,... \qquad (20)$$

Если $(t_1,t_2)\in K$ и $\beta=1$ то из (20) получим оценка

$$\left|x_k^{(n)}(t,\varepsilon)\right| \le (c\cdot\varepsilon)^n\ k=1,2; n=1,2,3,... \qquad (21)$$

где $0<c-const; 0<\varepsilon\le\varepsilon_0.$

Если $(t_1,t_2)\in \tilde S_\varepsilon$ и $\beta\ge\dfrac{1}{1-p}$, то из (22) получим оценка

$$\left|x_k^{(n)}(t,\varepsilon)\right| \le \left(c\cdot\varepsilon^{1-p}\right)^n\quad (k=1,2; n=1,2,3,...) \qquad (22)$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

где $0 < c - const; 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$.

Если $0 < c - const; \delta_0(\varepsilon) = \dfrac{1}{|\ln \varepsilon|}$; $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$.

$$\left|x_k^{(n)}(t,\varepsilon)\right| \le \left(c \cdot \delta_0(\varepsilon)\right)^n \tag{23}$$

только при $f(t.x) \equiv 0$.

Так как для любого $a > 0$ имеет место $\varepsilon^a = 0(\delta_0(\varepsilon))$ то, при любого $f(t,x) \ne 0$ величина $\left|x_k^{(n)}(t,\varepsilon)\right|$ сверху неограниченная для $(t_1,t_2) \in \tilde{K}_\varepsilon$.

Имеют места следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть выполнены условия I, II, III и $\beta \ge 1$. Тогда решение задачи (5), (6), ((7)), представимое в виде $x(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(t,\varepsilon)$ на K существует, единственно и справедлива оценка (21).

Теорема 2. Пусть выполнены условия I, II, III и $\beta \ge \dfrac{1}{1-p}$. Тогда решение задачи (5), (6), ((7)), представимое в виде $x(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(t,\varepsilon)$. На $\tilde{S}_\varepsilon$ существует, единственно и справедлива оценка (22).

Теорема 3. Пусть выполнены I, II, III и $f(t,x) \equiv 0$ при $(t,\varepsilon) \in \Delta(t,x)$. Тогда решение задачи (5), (6), ((7)), представимое в виде $x(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(t,\varepsilon)$. На $\tilde{K}_\varepsilon$ существует, единственно и справедлива оценка (23).

Литература:

1. Каримов С.К. Равномерное приближение решения сингулярно-возмущенной задачи в особо критическом случае. - Ош, 2019. - 203.
2. Алыбаев К.С. Метод линия уровня исследования сингулярно-возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости: - Дисс. … д-ра физ. - мат. наук: 01.01.02. - Бишкек, 2001. - 204 с.
3. Азимбаев М.А. Устойчивость решений начальной задачи линейных сингулярно возмущенных уравнений. -Дисс.... канд. физ.мат. наук: 01.01.02. - Ош, 2010. - 112 с.
4. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М.: Наука, 1973. - 272 с.