

**КУРУЛУШ**  
**СТРОИТЕЛЬСТВО**  
**CONSTRUCTION**

*Маруфий А.Т., Эгенбердиева А.А.*

**ВИНКЛЕРДИК СЕРПИЛГИЧ НЕГИЗДЕ  
ЖАЙГАШКАН ЧЕКСИЗ УСТУНДУН ТАТААЛ  
ШАРТТАРДА ИШТӨӨДӨГҮ ИЙИЛҮҮСҮ**

*Маруфий А.Т., Эгенбердиева А.А.*

**ИЗГИБ БЕСКОНЕЧНОЙ БАЛКИ НА УПРУГОМ  
ВИНКЛЕРОВСКОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ СЛОЖНЫХ  
УСЛОВИЙ ЕЁ РАБОТЫ**

*A.T. Marufiy, A.A. Egenberdieva*

**BENDING OF THE INFINITE BEAM ON  
ELASTIC VINCLER BASIS TAKING INTO ACCOUNT  
THE COMPLEX CONDITIONS OF ITS WORK**

УДК: 624.073.02

*Чөгүп кетүүчү жер кыртышында жайгашкан имараттардын жана курулмалардын пайдубалдарын долбоорлоодо, долбоорлоочу пайдубалдардын конструкциялары негиз менен толук эмес контактта болгон маселелери менен кездешет. Жүктөм аракет кылганда жана пайдубалдардын конструкциялары негиз менен толук эмес контактта болгондо, жетишерлик ийкемдүү устундун борбордук бөлүгүндөгү эсепти чексиз устундун эсептөө схемасы боюнча караса болот. Бул иште винклердик серпилгич негизде жайгашкан чексиз устундун ортонку тегиздигинде узунунан таасир эткен күчтөрдүн аракетиндеги жана устундун борбордук бөлүгүндө жайгашкан траншея түрүндөгү негиз менен толук эмес контактта болгондогу устундун ийилүүсүнүн математикалык моделдөөсү келтирилген. Бул факторлорду эске алуусу төртүнчү тартиптеги кадимки дифференциалдуу теңдемелердин жаңы классын алууга мүмкүнчүлүк берет. Аналитикалык чечилиши Фурьенин интегралдык өзгөртмөлөрүнүн жалпы чечилүү усулун колдонуу менен алынган. Ар кандай аналитикалык чечим долбоорлонуучу конструкциялардын жумуштарынын реалдуу шарттарына жакындаштырылган натыйжасы болуп саналат.*

**Негизги сөздөр:** *устун, ийилүү, серпилгичтүү негиз, толук эмес контакт, эсеп, жалпыланган чечимдер, Фурьенин өзгөртмөлөрү.*

*При проектировании ленточных фундаментов на просадочных грунтах, проектировщики сталкиваются с задачами неполного контакта конструкций фундаментов с грунтовым основанием, так как эти грунты дают большую просадку при их замачивании. При действии нагрузки и неполного контакта конструкций фундаментов с основанием в центральной части довольно гибкой балки расчет сводится к расчетной схеме бесконечной балки. В этой работе приведено математическое моделирование задачи изгиба бесконечной балки на упругом винклеровском основании с учетом действия продольных усилий, приложенных в срединной плоскости балки и неполного контакта с основанием в виде траншеи, расположенной в центральной части. Учет этих факторов позволило получить новый класс обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Аналитическое решение получено методом обобщенных решений с использованием интегральных преобразований Фурье. Любое аналитическое решение является результатом, приближающимся к реальным условиям работы проектируемых конструкций.*

**Ключевые слова:** *балка, изгиб, упругое основание, неполный контакт, расчет, обобщенные решения, преобразование Фурье.*

*When designing strip foundations on subsiding soils, designers face the problems of incomplete contact of foundation structures with a ground base, since these soils give a large subsidence when soaked. Under the action of load and incomplete contact of the structures of the foundations with the base in the central part of a rather flexible beam, the calculation is reduced to the design scheme*

of an endless beam. This paper presents a mathematical modeling of the problem of bending an infinite beam on an elastic Winkler base, taking into account the action of longitudinal forces applied in the median plane of the beam and incomplete contact with the base in the form of a trench located in the central part. Accounting for these factors allowed us to obtain a new class of fourth-order ordinary differential equations. The analytical solution is obtained by the method of generalized solutions using integral Fourier transforms. Any analytical solution is the result, approaching the actual working conditions of the designed structures.

**Key words:** beam, bending, elastic foundation, incomplete contact, calculation, generalized solutions, Fourier transform.

**Введение.** В процессе эксплуатации зданий и сооружений под их фундаментами может образоваться провал, т.е. неполный контакт конструкций фундамента с грунтом. Эти факторы необходимо учитывать при проектировании зданий и сооружений. При действии нагрузки и расположения участка провала в центре гибкой балки, она может быть рассчитана по расчетной схеме бесконечной балки.

**Цель исследования.** Математическое моделирование задачи изгиба бесконечной балки на упругом основании с учетом сложных условий её работы.

**Метод исследования.** Математическое моделирование произведено на основе метода обобщённых решений.

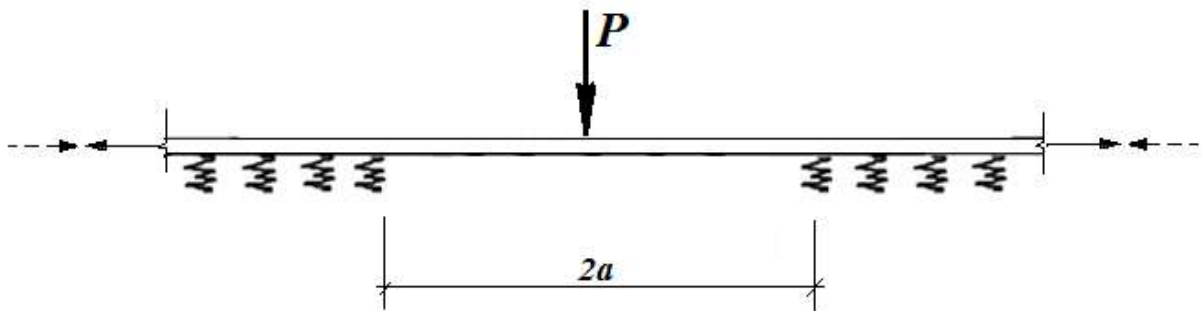
Рассмотрим балку на упругом винклеровском основании, находящуюся под действием нагрузки и участка, где нет контакта с основанием в центральной части. Кроме внешней симметричной нагрузки действуют продольные (сжимающие или растягивающие) усилия, которые приложены в срединной оси балки (рис. 1) [1,2,3,4,5].

Прогибы балки (рис. 1) определяются из решения следующего дифференциального уравнения [6]:

$$EJ \frac{d^4 W(x)}{dx^4} + K\theta(x-a)W(x) - N_x \frac{d^2 W(x)}{dx^2} = P(x), \quad (1)$$

где  $E$  – модуль упругости материала балки;  $J$  – момент инерции балки;  $P(x)$  – функция приложенной нагрузки;  $W(x)$  – прогиб балки;  $\theta(x-a)$  – функция Хевисайда:

$$\theta(x-a) = \begin{cases} 0 & (x \leq a) \\ 1 & (x \geq a) \end{cases}. \quad (2)$$



**Рис. 1.** Бесконечная балка на упругом основании с одновременным учетом неполного контакта с основанием и продольных усилий, приложенных в срединной оси балки.

Перейдем к безразмерным координатам и функциям:

$$\eta = \beta x,$$

где  $x$  – действительная координата,  $\eta$  – приведенная координата.

Тогда,

$$\frac{dW(x)}{dx} = \frac{dW(\eta)}{d\eta}, \quad \eta_x = \frac{dW(\eta)}{d\eta} \cdot \beta; \quad \frac{d^2W(x)}{dx^2} = \frac{d^2W(\eta)}{d\eta^2} \cdot \beta^2, \dots, \quad \frac{d^4W(x)}{dx^4} = \frac{d^4W(\eta)}{d\eta^4} \cdot \beta^4.$$

$$W(\eta) = W\left(\frac{\eta}{\beta}\right); \quad \theta(\eta - a_1) = \theta\left(\frac{\eta - a_1}{\beta}\right); \quad P(\eta) = \frac{4P\left(\frac{\eta}{\beta}\right)}{K}; \quad \beta = \left(\frac{K}{4EJ}\right)^{\frac{1}{4}}; \quad \beta^2 = \sqrt{\frac{K}{EJ}} \cdot \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Подставим эти выражения в (1), что позволит записать это уравнение в безразмерных координатах и функциях:

$$EJ \cdot \beta^4 \frac{d^4W(\eta)}{d\eta^4} + K\theta\left(\frac{\eta}{\beta} - a\right)W(\eta) - N_x \cdot \beta^2 \frac{d^2W(\eta)}{d\eta^2} = P\left(\frac{\eta}{\beta}\right). \quad (4)$$

Подставив  $\beta = \left(\frac{K}{4EJ}\right)^{\frac{1}{4}}; \beta^2 = \sqrt{\frac{K}{EJ}} \cdot \frac{1}{2}$  в выражение (4) получим:

$$\frac{K}{4} \cdot \frac{d^4W(\eta)}{d\eta^4} + K\theta(\eta - a_1)W(\eta) - \frac{N_x}{2} \cdot \sqrt{\frac{K}{EJ}} \beta^2 \frac{d^2W(\eta)}{d\eta^2} = P\left(\frac{\eta}{\beta}\right). \quad (5)$$

Выражение (5) умножим на  $\frac{4}{K}$ :

$$\frac{d^4W(\eta)}{d\eta^4} + 4\theta(\eta - a_1)W(\eta) - \frac{2N_x}{\sqrt{KEJ}} \cdot \frac{d^2W(\eta)}{d\eta^2} = \frac{4P\left(\frac{\eta}{\beta}\right)}{K}.$$

Обозначим через  $\alpha = \frac{N_x}{\sqrt{KEJ}}, \quad a_1 = a \cdot \beta$ .

В результате получим следующее уравнение:

$$\frac{d^4W(\eta)}{d\eta^4} + 4\theta(\eta - a_1)W(\eta) - \frac{2\alpha d^2W(\eta)}{d\eta^2} = P(\eta). \quad (6)$$

Применив *cos*-преобразованием Фурье к уравнению (6) получим [7]:

$$\lambda^4 W(\lambda) + 4 \int_0^{\infty} W(x) \cos \lambda x dx - 2\alpha \lambda^2 W(\lambda) = P(\lambda), \quad (7)$$

где  $W(\lambda)$  и  $P(\lambda)$  – являются трансформантами Фурье функций прогиба и нагрузки, описываемые следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} W(\lambda) &= \int_0^{\infty} W(x) \cos \lambda x dx \\ P(\lambda) &= \int_0^{\infty} q(x) \cos \lambda x dx \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Применив к уравнению (7) обратное *cos*-преобразование Фурье определим функцию прогиба рассматриваемой балки (рис. 1):

$$W(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\lambda) \cos \lambda x}{\lambda^4 - 2\alpha\lambda^2 + 1} d\lambda + \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{\lambda^4 + 4 - 2\alpha\lambda^2} \cdot \int_0^a W(t) \cos \lambda t dt d\lambda. \quad (9)$$

В интегральном уравнении (9) неизвестным является функция прогибов  $W_{\infty}(x)$ .

В зависимости от приложенной нагрузки функция прогибов записывается в явном виде. При действии сосредоточенной силы в первом слагаемом формулы (9)  $P_0(\lambda) = \frac{1}{2} \beta P$  и  $W_{\infty}(x)$  примет вид:

$$W_{\infty}(x) = \frac{P}{8EJ\beta^3} e^{-x} (\cos x + \sin x). \quad (10)$$

При действии равномерно распределенной нагрузки с интенсивностью  $q$ , действующий на участке балки длиной  $2c$ ,  $W_{\infty}(x)$  примет вид:

$$W_{\infty}(x) = \frac{P}{8EJ\beta^4} \left[ 1 - e^{-c} (\cos c \cos xchx + \sin c \sin xshx) \right] \text{ при } x \leq c \quad (11)$$

$$W_{\infty}(x) = \frac{P}{8EJ\beta^4} e^{-x} (\cos x \cos cchc + \sin x \sin cshc) \text{ при } c \leq x$$

В уравнении (9) первый интеграл второго слагаемого является ядром  $K(x, t)$  интегрального уравнения:

$$K(x, t) = \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x \cos \lambda t}{\lambda^4 + 4 - 2\alpha\lambda^2} d\lambda. \quad (12)$$

В результате решения этого интеграла определим ядро  $K(x, t)$  в явном виде:

$$K(x, t) = \begin{cases} \varphi_{1\leftarrow}(x)\psi_{1\leftarrow}(t) + \varphi_{2\leftarrow}(x)\psi_{2\leftarrow}(t) & (x \leq t) \\ \varphi_{1\rightarrow}(x)\psi_{1\rightarrow}(t) + \varphi_{2\rightarrow}(x)\psi_{2\rightarrow}(t) & (x \geq t) \end{cases}. \quad (13)$$

где,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1\leftarrow}(x) &= \cos xchx; & \varphi_{2\leftarrow}(x) &= \sin xshx \\ \varphi_{1\rightarrow}(x) &= e^{-x} \cos x; & \varphi_{2\rightarrow}(x) &= e^{-x} \sin x \\ \psi_{1\leftarrow}(t) &= e^{-t} (\cos t + \sin t); & \psi_{2\leftarrow}(t) &= e^{-t} (\sin t - \cos t) \\ \psi_{1\rightarrow}(t) &= \cos tcht - \sin tsht; & \psi_{2\rightarrow}(t) &= \cos tcht + \sin tsht \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

С учетом этого интегральное уравнение примет следующий вид [7]:

$$W(x) - \int_0^a W(t)K(x,t)dt = W_\infty(x). \quad (15)$$

При этом рассмотрим два случая:

В первом случае прогиб определяется на участке полностью контактирующей с основанием ( $a \leq x$ ). Во втором случае прогиб находится на участке, где нет основания под балкой ( $0 \leq x \leq a$ ).

С учетом выражений (13) и (15) формула прогибов для первого случая примет вид:

$$W(x) = W_\infty(x) + C_{1>} \varphi_{1>}(x) + C_{2>} \varphi_{2>}(x), \quad (16)$$

$$\text{где } C_{i>} = \int_0^a W(t)\psi_{i>}(t)dt \quad (i = 1, 2). \quad (17)$$

Умножая последовательно обе части уравнения (16) на  $\psi_{1>}(x)$  и  $\psi_{2>}(x)$ , проинтегрировав от 0 до  $a$ , получим следующую систему уравнений [8,9]:

$$\left. \begin{aligned} C_{1>}(1 - \Phi_{1>1>}) - C_{2>}\Phi_{2>1>} &= \Phi_{1>} \\ -C_{1>}\Phi_{1>2>} + C_{2>}(1 - \Phi_{2>2>}) &= \Phi_{2>} \end{aligned} \right\}. \quad (18)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi_{i>} &= \int_0^a W_\infty(t)\psi_{i>}(t)dt \quad (i = 1, 2) \\ \Phi_{1>1>} &= \int_0^a \varphi_{1>}(t)\psi_{1>}(t)dt; \quad \Phi_{2>1>} = \int_0^a \varphi_{2>}(t)\psi_{1>}(t)dt \\ \Phi_{1>2>} &= \int_0^a \varphi_{1>}(t)\psi_{2>}(t)dt; \quad \Phi_{2>2>} = \int_0^a \varphi_{2>}(t)\psi_{2>}(t)dt \end{aligned} \quad (19)$$

Решение системы (18) дает искомые значения коэффициентов  $C_{i>}$ :

$$C_{i>} = O_i \cdot O^{-1}, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} O &= (1 - \Phi_{1>1>})(1 - \Phi_{2>2>}) - \Phi_{1>2>}\Phi_{2>1>}; \\ O_1 &= \Phi_{1>}(1 - \Phi_{2>2>}) + \Phi_{2>}\Phi_{2>1>}; \\ O_2 &= \Phi_{2>}(1 - \Phi_{1>1>}) + \Phi_{1>}\Phi_{1>2>}. \end{aligned} \quad (21)$$

Прогиб рассматриваемой балки на участке  $2 a$ , где нет основания, определяется формулой (16) с коэффициентами  $C_{i>}$ , которые определяются по формулам (20) и (21), а входящие в эти выражения функции  $\Phi_{i>K>}$  ( $i, K = 1, 2$ ), как следует из (14) и (19) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
\Phi_{1>1>} &= \frac{1}{8} [2a + \sin 2a + 2 \cos^2 a (1 - e^{-2a})]; \\
\Phi_{2>1>} &= \frac{1}{8} [2 - 2a + \sin 2a - \cos 2a - e^{-2a} (1 + \sin 2a)]; \\
\Phi_{1>2>} &= \frac{1}{8} [2 + 2a + \sin 2a - \cos 2a - e^{-2a} (1 - \sin 2a)]; \\
\Phi_{2>2>} &= \frac{1}{8} [2a - \sin 2a + 2 \sin^2 a (1 + e^{-2a})].
\end{aligned} \tag{22}$$

Функции  $\Phi_{i>j>}(x)$  зависят от вида нагрузки. В частности, когда действует сосредоточенная сила эти функции записываются в явном виде:

$$\begin{aligned}
\Phi_{1>} &= \frac{1}{32} [3 + 2 \sin 2a - e^{-2a} (2 + \sin 2a + \cos 2a)]; \\
\Phi_{2>} &= \frac{1}{32} [3 + 4a - 2 \cos 2a + e^{-2a} (\sin 2a - \cos 2a)].
\end{aligned} \tag{23}$$

При действии сосредоточенной силы выражения деформаций и внутренних усилий в поперечных сечениях балки принимают вид [8,9]:

$$\begin{aligned}
W(x) &= \frac{P}{2EJ\beta^3} \left[ \frac{e^{-x}}{4} (\cos x + \sin x) + C_{1>} e^{-x} \cos x + C_{2>} e^{-x} \sin x \right]; \\
\varphi(x) &= \frac{P}{2EJ\beta^2} \left[ -\frac{e^{-x}}{2} \sin x - C_{1>} e^{-x} (\cos x + \sin x) + C_{2>} e^{-x} (\cos x - \sin x) \right]; \\
M(x) &= -\frac{P}{2\beta} \left[ -\frac{e^{-x}}{2} (\cos x - \sin x) + 2C_{1>} e^{-x} \sin x - 2C_{2>} e^{-x} \cos x \right]; \\
Q(x) &= -\frac{P}{2} \left[ e^{-x} \cos x + 2C_{1>} e^{-x} (\cos x - \sin x) + 2C_{2>} e^{-x} (\cos x + \sin x) \right],
\end{aligned} \tag{24}$$

а при действии распределенной нагрузки на участке  $2c$  функции  $\Phi_{1>}, \Phi_{2>}$  запишутся в явном виде:

$$\begin{aligned}
\Phi_{1>} &= \frac{1}{64} \left\{ 8 \cos cshc - e^{-c} \cos c (\cos 2csh2c + sh2c + 2c + \sin 2c) + \right. \\
&+ e^{-c} \sin c (sh2c - 2c + \sin 2c - \sin 2cch2c) + \cos cchc \left[ \cos 2c - \cos 2a - e^{-2c} \cos 2c + \right. \\
&+ e^{-2a} \cos 2a - \sin 2a + \sin 2c - 2(a - c) - e^{-2c} + e^{-2a} \left. \right] + \\
&+ \left. \sin cshc \left[ 2(a - c) + \sin 2c - \sin 2a + e^{-2a} - e^{-2c} + e^{-2a} \sin 2a - e^{-2c} \sin 2c - \cos 2c + \cos 2a \right] \right\}; \\
\Phi_{2>} &= \frac{1}{64} \left\{ 8 \sin cchc + e^{-c} \cos c (\cos 2csh2c + sh2c + 2c + \sin 2c) - \right. \\
&- e^{-c} \sin c (sh2c + \sin 2c - 2c - \cos 2csh2c) - \cos cchc \left[ \sin 2a - \sin 2c + 2(a - c) + \right. \\
&+ e^{-2c} - e^{-2a} + e^{-2a} \sin 2a - e^{-2c} \sin 2c + \cos 2c - \cos 2a \left. \right] -
\end{aligned} \tag{25}$$

$$-\sin cshc \left[ \cos 2c - \cos 2a + e^{-2c} \cos 2c - e^{-2a} \cos 2a + 2(a-c) + \sin 2c - \sin 2a + e^{-2a} - e^{-2c} \right].$$

Выражения (24) примут вид:

$$W(x) = \frac{q}{2EJ\beta^4} \left\{ -\frac{e^{-x}}{4} (\cos x \cos cshc + \sin x \sin cshc) + C_{1>} e^{-x} \cos x + C_{2>} e^{-x} \sin x \right\} \quad (a < x, c < a);$$

$$\varphi(x) = \frac{q}{2EJ\beta^3} \left\{ -\frac{e^{-x}}{4} [\cos x (\cos cshc - \sin cshc) + \sin x (\cos cshc + \sin cshc) - C_{1>} e^{-x} (\cos x + \sin x) + C_{2>} e^{-x} (\cos x - \sin x)] \right\}; \quad (26)$$

$$M(x) = \frac{q}{2\beta^2} \left\{ \frac{e^{-x}}{2} (\cos x \sin cshc - \sin x \cos cshc) - 2C_{1>} e^{-x} \sin x + 2C_{2>} e^{-x} \cos x \right\};$$

$$Q(x) = -\frac{q}{2\beta} \left\{ \frac{e^{-x}}{2} [\cos x (\cos cshc + \sin cshc) + \sin x (\sin cshc - \cos cshc)] + 2C_{1>} e^{-x} (\cos x - \sin x) + 2C_{2>} e^{-x} (\cos x + \sin x) \right\}.$$

На участке  $(0 \leq x \leq a)$  балки, где отсутствует основание, интегральное уравнение относительно прогибов имеет вид [8,9]:

$$W(x) = W_\infty(x) + \sum_{i=1}^2 \left[ \varphi_{i>}(x) \int_0^x W(t) \psi_{i>}(t) dt + \varphi_{i<}(x) \int_x^a W(t) \psi_{i<}(t) dt \right]. \quad (27)$$

Интервал  $(0, a)$  делим на  $n$  частей и заменяя интегралы конечными суммами, используя формулу Симпсона определим прогибы в различных точках. При этом можем записать значение прогиба в точке  $x_k = \frac{a}{n} k$ :

$$W(x_k) = W_\infty(x_k) + \sum_{i=1}^2 \left[ \varphi_{i>}(x_k) \frac{x_k}{k} \sum_{j=1}^k \psi_{1>}(x_{j-1}) W(x_{j-1}) + \varphi_{i<}(x_k) \frac{a-x_k}{n-k} \sum_{\xi=k}^{n-1} \psi_{1<}(x_\xi) W(x_\xi) \right], \quad (28)$$

при  $k=0$  первое слагаемое обращается в нуль.

Система уравнений относительно прогибов балки зависит от значений параметров  $k$ . [8,9]:

$$\begin{aligned} C_{11}y(0) + C_{12}y(x_1) + C_{13}y(x_2) + C_{14}y(x_3) &= f_1; \\ C_{21}y(0) + C_{22}y(x_1) + C_{23}y(x_2) + C_{24}y(x_3) &= f_2; \\ C_{31}y(0) + C_{32}y(x_1) + C_{33}y(x_2) + C_{34}y(x_3) &= f_3; \\ C_{41}y(0) + C_{42}y(x_1) + C_{43}y(x_2) + C_{44}y(x_3) &= f_4. \end{aligned} \quad (29)$$

Входящие в систему коэффициенты и правые части имеют следующий вид:

$$C_{4-j,k} = \sum_{i=1}^2 \varphi_{i>}(x_j) \psi_{i>}(x_{k-1}); \quad (j=3, 2, 1; k=1, 2, \dots, j);$$

$$C_{j+1,k+1} = \sum_{i=1}^2 \varphi_{i\leftarrow}(x_{k-1})\psi_{i\leftarrow}(x_{k-1}); \quad (j=3;k=1,2,3; \quad j=2;k=2,3; \quad j=1;k=3); \quad (30)$$

$$C_{5-k,k} = \sum_{i=1}^2 \varphi_{i\leftarrow}(x_{k-1})\psi_{i\leftarrow}(x_{k-1}) - \frac{n-(k-1)}{a-x_{k-1}}; \quad (k=1,2,3,4);$$

$$f_{5-k} = - \left\{ \sum_{i=1}^2 \varphi_{i\leftarrow}(x_{k-1})\psi_{i\leftarrow}(x_4)y(x_4) + \frac{n-(k-1)}{a-x_{k-1}}W_{\infty}(x_{k-1}) \right\}; \quad (k=1,2,3,4).$$

Входящее выражение  $W_{\infty}(x_{k-1})$  в правой части системы уравнений (30), которое, как следует из (12), будет иметь различные значения при действии на балку распределенной нагрузки в зависимости от расположения точки  $x_k$ .

Принимаем  $W(x) = W(a)$ , значение  $W(a)$ , известно из предыдущего решения.

Используя (27), запишем следующие выражения производных функций прогиба, которые потребуются для определения значений углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил [10].

$$W^{(p)}(x) = W_{\infty}^{(p)}(x) + \sum_{i=1}^2 \left[ \varphi_{i\rightarrow}^{(p)}(x) \int_b^x W(t)\psi_{i\rightarrow}(t)dt + \varphi_{i\leftarrow}^{(p)}(x) \int_x^a W(t)\psi_{i\leftarrow}(t)dt \right] + T_p(x). \quad (31)$$

Здесь  $p$  - номер производной ( $p=1,2,3; i=1,2$ )

$$T_1(x) = \sum_{i=1}^2 [\varphi_{i\rightarrow}(x)\psi_{i\rightarrow}(x) - \varphi_{i\leftarrow}(x)\psi_{i\leftarrow}(x)]W(x). \quad (32)$$

Далее

$$T_2(x) = \sum_{i=1}^2 \left\{ [2(\varphi'_{i\rightarrow}(x)\psi_{i\rightarrow}(x) - \varphi'_{i\leftarrow}(x)\psi_{i\leftarrow}(x) + (\varphi_{i\rightarrow}(x)\psi'_{i\rightarrow}(x) - \varphi_{i\leftarrow}(x)\psi'_{i\leftarrow}(x))]W(x) + (\varphi_{i\rightarrow}(x)\psi_{i\rightarrow}(x) - \varphi_{i\leftarrow}(x)\psi_{i\leftarrow}(x))W'(x) \right\}; \quad (33)$$

$$T_3(x) = \sum_{i=1}^2 \left\{ [3(\varphi''_{i\rightarrow}(x)\psi_{i\rightarrow}(x) - \varphi''_{i\leftarrow}(x)\psi_{i\leftarrow}(x) + 3(\varphi'_{i\rightarrow}(x)\psi_{i\rightarrow}(x) - \varphi'_{i\leftarrow}(x)\psi_{i\leftarrow}(x) + (\varphi_{i\rightarrow}(x)\psi_{i\rightarrow}(x) - \varphi_{i\leftarrow}(x)\psi_{i\leftarrow}(x))]W(x) + [3(\varphi'_{i\rightarrow}(x)\psi_{i\rightarrow}(x) - \varphi'_{i\leftarrow}(x)\psi_{i\leftarrow}(x) + 2(\varphi_{i\rightarrow}(x)\psi'_{i\rightarrow}(x) - \varphi_{i\leftarrow}(x)\psi'_{i\leftarrow}(x))]W'(x) + (\varphi_{i\rightarrow}(x)\psi_{i\rightarrow}(x) - \varphi_{i\leftarrow}(x)\psi_{i\leftarrow}(x))W''(x) \right\}. \quad (34)$$

На основании вышеизложенного получим значения функций производных в различных точках интервала:

$$W^{(p)}(x_k) = W_{\infty}^{(p)}(x_k) + \sum_{i=1}^2 \left[ \varphi_{i\rightarrow}^{(p)}(x_k) \frac{x_k}{k} \sum_{j=1}^k \psi_{i\rightarrow}(x_{j-1})W(x_{j-1}) + \varphi_{i\leftarrow}^{(p)}(x_k) \frac{a-x_k}{n-k} \sum_{\xi=k}^{n-1} \psi_{i\leftarrow}(x_{\xi})W(x_{\xi}) \right] + T_p(x_k). \quad (35)$$

После решения получаемых таким образом систем уравнений, значения деформаций балки и усилий в ней могут быть получены, используя выше приведенные формулы. Так, например, прогиб балки при действии на неё сосредоточенной силы [1,8]:



$$W(x) = \frac{P}{2EJ\beta^3} \left\{ \frac{e^{-k}}{4} (\cos x + \sin x) + \sum_{i=1}^2 \left[ \varphi_{i>}(x_k) \frac{x_k}{k} \sum_{j=1}^k \varphi_{i>}(x_{j-1}) W(x_{j-1}) + \varphi_{i<}(x_k) \frac{a-x_k}{n-k} \sum_{\xi=k}^{n-1} \psi_{i<}(x_{\xi}) W(x_{\xi}) \right] \right\}; \quad (x = x_k),$$

при действии распределенной нагрузки:

$$W(x) = \frac{q}{2EJ\beta^4} \left\{ \frac{1}{4} [1 - e^{-c} (\cos c \cos xchx + \sin c \sin xshx)] + \sum_{i=1}^2 \left[ \varphi_{i>}(x_k) \frac{x_k}{k} \sum_{j=1}^k \psi_{i>}(x_{j-1}) W(x_{j-1}) + \varphi_{i<}(x_k) \frac{a-x_k}{n-k} \sum_{\xi=k}^{n-1} \psi_{i<}(x_{\xi}) W(x_{\xi}) \right] \right\}; \quad (0 \leq x \leq c)$$

$$W(x) = \frac{q}{2EJ\beta^4} \left\{ -\frac{e^{-x}}{4} (\cos x \cos cchc + \sin x \sin cshc) + \sum_{i=1}^2 \left[ \varphi_{i>}(x_k) \frac{x_k}{k} \sum_{j=1}^k \psi_{i>}(x_{j-1}) W(x_{j-1}) + \varphi_{i<}(x_k) \frac{a-x_k}{n-k} \sum_{\xi=k}^{n-1} \psi_{i<}(x_{\xi}) W(x_{\xi}) \right] \right\}; \quad (c \leq x \leq a).$$

**Вывод:** В статье произведено математическое моделирование задачи изгиба бесконечной балки на упругом основании с учетом сложных условий её работы.

#### Литература:

1. Маруфий А.Т. Результаты расчета задачи изгиба бесконечной балки на двухпараметрическом упругом основании с двумя траншеями, расположенными в центральной части под балкой при действии симметричной нагрузки [Текст] / А.Т. Маруфий, А.А. Эгенбердиева. / Вестник КГУСТА, №1. - Бишкек, 2018. - 110-116 с.
2. Маруфий А.Т. Математическое моделирование задачи об изгибе бесконечной балки на двухпараметрическом упругом основании с одним участком неполного контакта с основанием при действии кососимметричной нагрузки [Текст] / А.Т. Маруфий, Э.С. Рысбекова, А.А. Эгенбердиева. - Бишкек: НИЖ. / Наука и инновационные технологии. - 2016. - №1. - С. 257-260.
3. Маруфий А.Т. Изгиб бесконечной плиты на упругом основании с учетом неполного контакта с основанием в виде перекрестных траншей [Текст] / А.Т. Маруфий, М.А. Айтиев, У.С. Джусуев. - Б.: Известия НАН КР. - 2011. - №2. - С. 45-48.
4. Маруфий А.Т. Расчет плит на упругом основании при отсутствии основания под частью плиты // А.Т. Маруфий // «Основания, фундаменты и механика грунтов». - М., 1999. - №4. - С. 27-31.
5. Травуш В.И. Об одном методе решения задач изгиба конструкций, лежащих на винклеровском основании [Текст]/В.И. Травуш // Сб. трудов «Вопросы архитектуры и строительства зданий для зрелищ, спорта и учреждений культуры». - М.- 1976. - №4. - С. 83-89.
6. Маруфий, А.Т. Изгиб бесконечной плиты, лежащей на винклеровском основании с учетом поперечной и продольной нагрузок [Текст] / А.Т. Маруфий, А.Т. Турганбаев // Научный вестник ФерГУ. - 1996. - №3. - С. 51-53.
7. Маруфий А.Т. Численная реализация задачи об изгибе бесконечной балки на двухпараметрическом упругом основании с одним участком неполного контакта с основанием. Симметричная нагрузка [Текст] / А.Т. Маруфий, А.А. Эгенбердиева. / Известия КГТУ, №3(39). - Бишкек, 2016. - С. 422-426.
8. Фам Динь Ван. Расчет балок при неполном контакте с основанием: Автореферат дис. канд. техн. наук. - М.: МИСИ, 1993. - 26 с.
9. Травуш В.И. Изгиб бесконечной балки на винклеровском упругом основании при отсутствии основания под частью балки [Текст] / В.И.Травуш, Фам Динь Ван. // II Республиканская научно-техническая конференция. Научно-технический прогресс и экология. - Актау, 1992.
10. Маруфий А.Т. Изгиб бесконечной балки на двухпараметрическом упругом основании с одним участком неполного контакта с основанием [Текст] / А.Т. Маруфий, Э.С. Рысбекова и А.А. Эгенбердиева. / Вестник КГУСТА, №1. - Бишкек, 2016. - С. 252-256.