DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 6, 2019

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Асанов А., Тойгонбаева А.К.

ФРЕДГОЛЬМ-СТИЛЬТЬЕСТИН БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЕЧИМДЕРИНИН РЕГУЛЯРИЗАЦИЯСЫНЫН ПАРАМЕТРИН ТАНДОО

Асанов А., Тойгонбаева А.К.

ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА-СТИЛЬТЬЕСА ПЕРВОГО РОДА

A. Asanov, A.K. Toygonbaeva

THE CHOICE OF REGULARIZATION PARAMETER OF SOLUTIONS OF LINEAR FREDGOLM-STIELTJES INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND

УДК: 517. 968

Математикалык маселелердин арасында корректтүү эмес коюлган маселелердин классын бөлүп алууга болот, алардын чечимдери баштапкы берилгендердин өтө кичине өзгөрүүсүнө туруксуз болушат. Мындай маселелердин негизги класстарынын бири болуп биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелер эсептелет. Көпчүлүк теориялык жана практикалык маселелерде Фредгольмдун биринчи түрдөгү интегралдык жана оператордук теңдемелери пайда болот, аларга келтирүүчү маселелер, мисалы дифференциалдык теңдемелерге тескери маселелер жана колдонмо маселелер: жарыктын нурдануусунун спектралдык курамын изилдөө жөнүндө; сферикалык же оссимметриялык плазмалык түзүлүштөрдү диагностикалоо менен байланышкан эксперименталдык маалыматтарды обработкалоо маселелери ж.б. Регуляризациялоо методдорунун жардамында корректтүү эмес коюлган маселелерине, баштапкы берилгендердин өтө кичине өзгөрүүсүнө туруктуу болгон жакындаштырылган чечимдерди тургузуу мүмкүнчүлүгү пайда болот. М.М. Лаврентьев биринчи түрдөгү оператордук теңдемелерди изилдеген. Ал берилген теңдемени ага жакын болгон теңдеме менен алмаштырууну сунуштаган, тендеменин оң жагынын өзгөрүүсүнө туруктуу болгон жана анын каалаган мааниси үчүн жашаган чечимге ээ боло турган. Макала Фредгольм-Стильтьестин биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелердин чечимдерин $L_{2,\varphi}[a,b]$ мейкиндигинде регуляризациялоо маселелерине арналган. Бул изилдөөдө Фредгольм-Стильтьестин биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелеринин бир классы үчүн регуляризациялоочу операторлор М.М. Лаврентьев боюнча тургузулган жана регуляризациялоо параметри тандалган. Проблеманын актуалдуулугу Фредгольм-Стильтьестин биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелердин чечимдеринин регуляризациясын жана жалгыздыгын изилдөөдө жаңы жолдорду табууда. Алынган жыйынтык интегралдык теңдемелер теориясында маанилүү салымга ээ жана аны түрдүү колдонмо маселелерди жакындаштырып чыгарууда колдонсо болот.

Негизги сөздөр: *чечим, сызыктуу, интегралдык теңдемелер, Фредгольм-Стильтьес, биринчи түрү, тандоо, параметр, регуляризация, регуляризациялоочу оператор.*

Среди математических задач можно выделить класс некорректно поставленных задач, у которых решения неустойчивы к малым изменениям исходных данных. Одним из важных классов таких задач являются интегральные уравнения первого рода. Во многих теоретических и прикладных задачах возникают интегральные и операторные уравнения Фредгольма, к которым в частности приводятся обратные задачи для дифференциальных уравнений, а также прикладные задачи: об изучении спектрального состава светового излучения; обработки экспериментальных данных, связанных с диагностикой сферической или оссиметрических плазменных образований и т.д. При помощи методов регуляризации становится возможным построение приближенных решений, устойчивых к малым изменениям данных, для некорректных задач. М.М. Лаврентьев изучал операторные уравнения первого рода, он предложил заменить исходное уравнение близким ему уравнением, для

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

которого задача нахождения решения будет устойчивой к малым изменениям правой части и разрешима для любой правой части. Статья посвящена исследованию вопросов регуляризации решений интегрального уравнения Фредгольма-Стильтьеса первого рода в пространстве $L_{2,\varphi}[a,b]$. *В данном исследовании для решения одного класса линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и выбран параметр регуляризации. Актуальность проблемы обусловлена потребностями в разработке новых подходов для регуляризации и единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода. Полученный результат является важным вкладом в теорию интегральных уравнений и может быть применен для приближенного решения различных прикладных задач.*

Ключевые слова: *решение, линейные, интегральные уравнения, Фредгольм-Стильтьес, первый род, выбор, параметр, регуляризация, регуляризирующий оператор.*

Among mathematical problems it is possible to allocate a class of incorrectly set problems at which decisions are unstable to small changes of initial data. One of the important classes of such problems are integral equations of the first kind. In many theoretical and applied problems, Fredholm integral and operator equations arise, to which inverse problems for differential equations are given, as well as applied problems: on the study of the spectral composition of light radiation; processing of experimental data related to the diagnosis of spherical or ossimetric plasma formations, etc. With the help of regularization methods, it becomes possible to construct approximate solutions resistant to small data changes for incorrect problems. M.M. Lavrentiev studied operator equations of the first kind, he proposed to replace the original equation with an equation close to him, for which the problem of finding a solution will be stable to small changes in the right part and solvable for any right part. The article is devoted to the study of regularization of solutions of the Fredholm-Stiltjes integral equation of the first kind in space. In this paper, regularizing operators according To M.M. Lavrentiev are constructed to solve one class of linear Fredholm-Stiltjes equations of the first kind and the regularization parameter is chosen. The relevance of the problem is due to the need to develop new approaches for regularization and uniqueness of solutions of linear integral Fredholm-Stiltjes equations of the first kind. The obtained result is an important contribution to the theory of integral equations and can be applied to approximate solutions of various applied problems.

Key words: *solution, linear, integral equations, Fredholm-Stiltjes, first genus, choice, parameter, regularization, regularizing operator.*

Төмөнкү көрүнүштөгү теңдемени карайбыз

$$Ku \equiv \int_a^b K(t,s)u(s)d\varphi(s) = f(t),\ t \in [a,b], \tag{1}$$

мында $\varphi(t)$ – [a,b] кесиндисинде өсүүчү үзгүлтүксүз функция, $\phi'(t) \in C[a,b]$,

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s),\ a \le s \le t \le b, \\ B(t,s),\ a \le t \le s \le b. \end{cases} \tag{2}$$

$A(t,s)$, $B(t,s)$ жана $f(t)$ берилген функциялар, $u(t)$ – изделүүчү функция жана

$$\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2\, d\varphi(s)d\varphi(t) < +\infty$$

.

Интегралдык теңдемелер үчүн түрдүү маселелер [1-3,5-6] авторлордун эмгектеринде изилденген. Тагыраак айтканда, [1] жана [4] эмгектеринин негизинде [5-6] эмгектеринде жалгыздык теоремасы жана М.М. Лаврентьев боюнча регуляризациялоочу операторлор тургузулган.

$L_{2,\phi}(a,b)$ аркылуу

$$\int_a^b |v(s)|^2\, d\varphi(s) < +\infty.$$

шартын канааттандырган бардык $v(t)$ функциялардын мейкиндигин белгилейбиз. $v(t) \in L_{2,\phi}(a,b)$ үчүн норманы төмөнкү формула боюнча аныктайбыз

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$$\|v(t)\|_{L_{2,\phi}} = \left(\int_a^b |v(s)|^2 \, d\varphi(s)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(2)нин негизинде (1) теңдемени төмөндөгүдөй көрүнүштө жазып алабыз:

$$\int_a^t A(t,s)u(s)d\phi(s) + \int_t^b B(t,s)u(s)d\phi(s) = f(t), \qquad t \in [a,b]. \tag{3}$$

(3)нүн эки жагын тең $u(t)$ га көбөйтүп, t боюнча a дан b га чейин интегралдайбыз

$$\int_a^b\int_a^t A(t,s)u(s)u(t)d\varphi(s)d\varphi(t) + \int_a^b\int_t^b B(t,s)u(s)u(t)d\varphi(s)d\varphi(t) = \int_a^b f(t)u(t)d\varphi(t) \,. \tag{4}$$

Дирихленин формуласын колдонуудан кийин

$$\int_a^b\int_a^t [A(t,s) + B(s,t)]u(s)u(t)d\varphi(s)d\varphi(t) = \int_a^b f(t)u(t)d\varphi(t)$$

алынат. Белгилөө кийребиз

$$H(t,s) = \frac{1}{2}[A(t,s) + B(s,t)].$$

Анда акыркы катыш

$$2\int_a^b\int_a^t H(t,s)u(s)\varphi'(s)dsu(t)\varphi'(t)dt = \int_a^b f(t)u(t)d\varphi(t). \tag{5}$$

көрүнүшүнө келет. Ядрого шарт коёбуз: $H(t,s) \in C(G)$, мында $G = \{(t,s): \quad a \le s \le t \le b\}$.

$$M(t,s) = \begin{cases} H(t,s)\sqrt{\varphi'(t)\varphi'(s)}, & a \le s \le t \le b, \\ H(s,t)\sqrt{\varphi'(t)\varphi'(s)}, & a \le t \le s \le b, \end{cases} \tag{6}$$

көрүнүшүндө аныкталган $M(t,s)$ жаңы функциясын киргизебиз.

(6)дан $M(t,s) = M(s,t)$ аткарыла тургандыгы көрүнүп турат. Ал эми $H(t,s) \in C(G)$ болгондуктан, анда $M(t,s) \in L_2\left([a,b]^2\right)$. Мындан

$$M(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i}, \tag{7}$$

келип чыгат, мында $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ – $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots$ модулдары өсүү тартибинде жайгашкан $M(t,s)$ ядросунун өздүк маанилери жана $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots$ – тиешелүү ортонормаланган өздүк функциялар, б.а.

$$\varphi_i(t) = \lambda_i \int_a^b M(t,s)\varphi_i(s)ds, \qquad i = 1,2,\ldots$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Айталы $M(t,s)$ – толук ядро болсун, мында $0<\lambda_1\leq \lambda_2\leq\ldots$. α параметринен көз каранды M_α корректтүүлүктөрдүн көптүктөрүнүн түркүмү

$$M_\alpha = \left\{ u(t)\in C[a,b] : \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha |u_i|^2 \leq c \right\},$$

мында $c>0, 0<\alpha<\infty, u_i = \int_a^b u(t)\varphi_i(t)\sqrt{\varphi'(t)}dt,\ (i=1,2,\ldots).$

$$\varepsilon u(t,\varepsilon) + \int_a^b K(t,s)u(s,\varepsilon)d\phi(s) = f(t),\ t\in(a,b), \varepsilon>0, \tag{8}$$

теңдеменин чечими M_α көптүгүндө (1) теңдеменин регуляризациялоочу чечими боло тургандыгын көрсөтөбүз.

Чындыгында,

$$u(t,\varepsilon) = u(t) + \xi(t,\varepsilon),$$

ордуна коюусун (8) теңдемеге колдонуп, мында $u(t)\in M_\alpha$ – (1) теңдеменин чечими,

$$\varepsilon\xi(t,\varepsilon) + \int_a^b K(t,s)\xi(s,\varepsilon)d\varphi(s) = -\varepsilon u(t). \tag{9}$$

тендемесин алабыз.

Мындан,

$$M(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i},$$

эске алып жана (9) теңдемени $\xi(t,\varepsilon)$ га көбөйтүп, андан соң интегралдап

$$\varepsilon\|\xi(t,\varepsilon)\|_{L_2,\varphi}^{\ 2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\xi_i(\varepsilon)|^2}{\lambda_i} \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} |u_i||\xi_i(\varepsilon)|, \tag{10}$$

алабыз, мында $\xi_i(\varepsilon)$ – $\xi(t,\varepsilon)\sqrt{\varphi'(t)}$ функциясы үчүн $\{\varphi_i(t)\}_1^\infty$ ортонормаланган система боюнча Фурьенин коэффициенттери. $p=q=\frac{1}{2}$ үчүн Гёльдердин барабарсыздыгын, (10) дан төмөндөгүнү алабыз

$$\|\xi(t,\varepsilon)\|_{L_{2,\varphi}} \leq \|u(t)\|_{L_{2,\varphi}}, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\xi_i(\varepsilon)|^2}{\lambda_i} \leq \varepsilon \|u(t)\|_{L_2,\phi}^{\ 2} \leq \frac{\varepsilon c}{\lambda_1^\alpha}, \varepsilon>0. \tag{12}$$

экинчи жактан

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_i||\xi_i(\varepsilon)| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\xi_i(\varepsilon)|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}} \lambda_i^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}} |u_i|^{\frac{1}{1+\alpha}} |\xi_i(\varepsilon)|^{\frac{1}{1+\alpha}} |u_i|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Барабардыгынын оң жагына $p=\dfrac{2(1+\alpha)}{\alpha},\ q=2(1+\alpha),\quad m=2(1+\alpha), n=\dfrac{2(1+\alpha)}{\alpha}$ үчүн Гёльдердин жалпыланган барабарсыздыгын колдонгондон кийин

$$\sum_{i=1}^{\infty}|u_i\|\xi_i(\varepsilon)|\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|\xi_i(\varepsilon)|^2}{\lambda_i}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{\alpha}|u_i|^2\right)^{\frac{1}{q}}\|\xi(t,\varepsilon)\|_{L_{2,\varphi}}^{\frac{2}{q}}\|u(t)\|_{L_{2,\varphi}}^{\frac{2}{p}}.$$

$u(t)\in M_\alpha$ болгондуктан, (11) жана (12) ден алабыз

$$\sum_{i=1}^{\infty}|u_i||\xi_i(\varepsilon)|\le\left(\frac{\varepsilon c}{\lambda_1^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}}c^{\frac{1}{q}}\|u(t)\|_{L_{2,\phi}}^{\frac{2}{q}}\|u(t)\|_{L_{2,\phi}}^{\frac{2}{p}}.$$

$p=\dfrac{2(1+\alpha)}{\alpha},\ q=2(1+\alpha)$ ордуна коюп

$$\sum_{i=1}^{\infty}|u_i\|\xi_i(\varepsilon)|\le c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}\left(\frac{c}{\lambda_1^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\varepsilon c}{\lambda_1^{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}} \tag{13}$$

алабыз, б.а.

$$\sum_{i=1}^{\infty}|u_i\|\xi_i(\varepsilon)|\le c\lambda_1^{-\frac{\alpha(1+2\alpha)}{2(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}. \tag{14}$$

(14) нү эске алып (10) дан алабыз

$$\|u(t,\varepsilon)-u(t)\|_{L_{2,\varphi}}\le c^{\frac{1}{2}}\lambda_1^{-\frac{\alpha(1+2\alpha)}{4(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}},\ 0<\alpha<\infty. \tag{15}$$

Төмөндөгүдөй теорема 1 далилденди.

Теорема 1. Мейли $M(t,s)$ (7) формула боюнча аныкталган оң толук ядро болсун, $f(t)\in K(M_\alpha), u(t)$ – (1) теңдеменин чечими, $u(t,\varepsilon)$ – (8) теңдеменин чечими. Анда (15) баалоо туура болот.

$f_\delta(t)\in L_{2,\phi}(a,b)$ функциясы $\|f(t)-f_\delta(t)\|_{L_{2,\phi}}\le\delta.$ шартын канааттандырсын деп эсептейбиз.

Экинчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемени карайбыз

$$\varepsilon u_\delta(t,\varepsilon)+\int_a^b K(t,s)u_\delta(s,\varepsilon)d\phi(s)=f_\delta(t),\qquad t\in[a,b],\quad 0<\varepsilon. \tag{16}$$

Белгилөө кийребиз $v_\delta(t,\varepsilon)=u(t,\varepsilon)-u_\delta(t,\varepsilon),$ (16) дан (8)ни кемитип

$$\varepsilon v_\delta(t,\varepsilon)+\int_a^b K(t,s)v_\delta(s,\varepsilon)d\phi(s)=f(t)-f_\delta(t),\quad t\in[a,b]. \tag{17}$$

алабыз. (17) теңдемени $v_\delta(t,\varepsilon)$ га көбөйтүп, интегралдайбыз

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$$\varepsilon\|v_\delta(t,\varepsilon)\|_{L_2,\phi}^{\;2}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|v_{\delta i}(\varepsilon)|^2}{\lambda_i}\le\sum_{i=1}^{\infty}|f_{\delta i}||v_{\delta i}(\varepsilon)| \tag{18}$$

мында $v_{\delta i}(\varepsilon)$ жана $f_{\delta i}$ - $v_\delta(t,\varepsilon)\sqrt{\phi'(t)}$ жана $f(t)-f_\delta(t)$ функциялары үчүн $\{\varphi_i(t)\}_1^\infty$ ортонормаланган система боюнча Фурьенин коэффициенттери. Гёльдердин барабарсыздыгын $p=q=\frac{1}{2}$ үчүн колдонуп, (18)ден алабыз

$$\|v_\delta(t,\varepsilon)\|_{L_{2,\phi}}\le\frac{1}{\varepsilon}\|f(t)-f_\delta(t)\|_{L_{2,\phi}}\le\frac{\delta}{\varepsilon}. \tag{19}$$

(15) жана (19) эске алабыз, анда

$$\|u_\delta(t,\varepsilon)-u(t)\|_{L_{2,\phi}}\le\|v_\delta(t,\varepsilon)\|_{L_{2,\phi}}+\|u(t,\varepsilon)-u(t)\|_{L_{2,\phi}}\le\frac{\delta}{\varepsilon}+c^{\frac{1}{2}}\lambda_1^{-\frac{\alpha(1+2\alpha)}{4(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}},\quad 0<\alpha<\infty.$$

Эгерде $\varepsilon=\delta^{\frac{1}{2}}$, анда

$$\left\|u_\delta(t,\delta^{\frac{1}{2}})-u(t)\right\|_{L_{2,\phi}}\le\delta^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}}\lambda_1^{-\frac{\alpha(1+2\alpha)}{4(1+\alpha)}}\delta^{\frac{\alpha}{8(1+\alpha)}}. \tag{20}$$

Демек, теорема 2 далилденди.

Теорема 2. Мейли $M(t,s)$ (7) формула боюнча аныкталган оң толук ядро болсун, $f(t)\in K(M_\alpha)$, $u(t)$ – (1) теңдеменин чечими, $u_\delta(t,\delta^{\frac{1}{2}})$ – (16) теңдеменин чечими, $\varepsilon=\delta^{\frac{1}{2}}$. Анда (20) баалоо туура.

Адабияттар:

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. - Москва: Наука, 1980.
2. Горбунов В.К., Редукция линейных интегральных уравнений с равномерной погрешностью в правой части. // Журнал Вычислит. матем. и матем. физики. - 1985. - Т. 25. - №2. - С. 210-223.
3. Денисов А.М., О приближенном решении уравнения Вольтерра первого рода, связанного с одной обратной задачей для уравнения теплопроводности //Вестник Московскогоуниверситета, Сер. 15. - Выч. матем. и кибернетика, 1980. - №3. - С. 49-52.
4. Асанов А. Производная функции по возрастающей функции. // Журнал Естественных наук 1, КТУМ. - Б., 2001. - С. 18-64.
5. Асанов А., Тойгонбаева А.К. О единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Б.: Илим, 2009. - Вып. 40. - С.103-107.
6. Асанов А., Тойгонбаева А.К. Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Б.: Илим, 2012. - Вып.44. - С. 59-67.