DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Каримов С.К., Анарбаева Г.М.

СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН МАСЕЛЕНИН ЧЕЧИМИН ИЗИЛДӨӨ

Каримов С.К., Анарбаева Г.М.

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ ЗАДАЧИ

S.K. Karimov, G.M. Anarbaeva

INVESTIGATION OF THE SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED TASKS

УДК: 517.928

Бул жумушта сингулярдык козголгон маселенин чечими туруктуулук шарты өзгөргөн учурда изилденет. Ошону менен бирге критикалык чекит болгон учур да, башкача айтканда, чечимдин кармалуусунун чектүү чекиттери да каралат. Бул жумушта ушул мезгилге чейин чечилбеген маселелер изилденет. Чечим регулярдуу эмес учурда каралат, тактап айтканда, интеграл астындагы функция аймактын чек арасында өзгөчө чекиттерге ээ болгон учурда изилденет. Каралуучу маселенин чечими чектелген экендиги далилиденет. Изилденүүчү маселенин чечиминин асимптотикалык ажыралмасы тургузулат. Кичине параметрдин жетишээрлик кичине болгон маанилеринде козголгон маселенин чечими козголбогон маселенин чечимине жакын боло тургандыгы автордук методдор менен далилденген. Сингулярдык козголгон маселелердин чечимдеринин асимптотикасын изилдөөнүн жыйынтыктары жана натыйжалары сызыктуу эмес термелүүлөр, жарым өткөргүчтүү приборлор теориясындагы стационардуу жана стационардуу эмес маселелерди чечүү, физикалык жана техникалык акустикадагы радиотехниканын түрдүү тармагындагы жумуштарда, гидро жана аэродинамикада ж.б. багыттагы маселелерде колдонулат.

***Негизги сөздөр**: сингулярдык козголгон маселе, кичине параметр, регулярдык эмес учур, өздүк маанилер, аналитикалык функция, маселе, баалоо, интеграл, чечим, функция, барабардык, кесинди, интегралдоо жолу.*

В работе исследуется решение сингулярно-возмущенных задач в случае смены условия устойчивости. А также рассматриваются случаи критической точки, то есть конечные точки время задержки. В настоящей работе будут исследованы до сих пор неразрешенные задачи. Решение изучается в нерегулярном случае – подинтегральная функция имеет особые точки, которые расположены на границах области. Доказывается, что решение рассматриваемой задачи ограничено. Строится асимптотические разложения решения рассматриваемой задачи. Авторскими методами доказываются, что решение возмущенной задачи остаётся близким к решению невозмущенной задачи в рассматриваемом интервале при достаточно малых значениях малого параметра. Результаты по исследованию асимптотики решения сингулярно-возмущенных задач, и их приложений могут быть применены в теории нелинейных колебаний, при решении стационарных и нестационарных задач теории полупроводниковых приборов, в различных отраслях работ радиотехники физической и технической акустики, в гидро и аэродинамике и др.

***Ключевые слова**: сингулярно возмущенная система, малый параметр, нерегулярный случай, собственные значения, аналитическая функция, задача, оценка, интеграл, решение, функция, равенство, отрезок, путь интегрирования.*

In this work we have studied solution of singularly perturbed problems in case of change in the stability condition. Cases of a critical point were considered, that are the end points of delay times. In this paper we have investigated unresolved problems. Solution was studied in the irregular case which has singular points located on the boundaries of the region. Solution of the problem under bounded consideration was proved. Asymptotic expansions of the problem solution under consideration have been constructed. The author's methods prove that the solution of the perturbed problem remains close to the solution of the unperturbed problem in the considered interval for sufficiently small values of the small parameter. Results of this study of the asymptotic solution of singularly perturbed problems and their applications can be applied in the theory of nonlinear oscillations, in solving stationary and non-stationary problems in the theory of semiconductor devices, in various fields of radio engineering of physical and technical acoustics, in hydro and aerodynamics, etc.

***Key words:** small parameter, singularly perturbed system, irregular case, eigenvalues, analytic function, problem, estimation, integral, solution, function, equality, segment, path integration.*

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Рассмотрим сингулярно возмущенную задачу, изученную в работе [1]

$$\varepsilon\dot{z} = A(t)z + h(t), \tag{1}$$

$$z(t_0,\varepsilon) = z_0(\varepsilon), \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ – малый параметр,

$A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & a\cos t \\ -a\cos t & \sin t \end{pmatrix}$; $0 < a,\ a \neq 1$; $h(t) -$ заданная аналитическая функция; $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 - const$. Матрица $A(t)$ имеет собственные значения: $\lambda_1(t) = \sin t + ia\cos t$; $\lambda_2(t) = \sin t - ia\cos t$; $-\dfrac{\pi}{2} \leq t_0 < 0$.

Невозмущенная система

$$A(t)\tilde{z} + h(t) = 0 \tag{3}$$

имеет решение $\tilde{z}(t) = -A^{-1}(t)h(t) \equiv g(t)$, причем $g(t)$ имеет особенности в точках, где $\lambda_1(t) = 0$ или $\lambda_2(t) = 0$.

$$A^{-1}(t) = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \sin t & -a\cos t \\ a\cos t & \sin t \end{pmatrix},$$

$$\Delta(t) = sin^2 t + a^2 cos^2 t.$$

Пусть $K = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $z = g(t) + Kx$.

Тогда задача (1), (2) эквивалентна задаче:

$$\varepsilon\dot{x} = D(t)x + \varepsilon f(t), \tag{4}$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x_0(\varepsilon) = O(\varepsilon), \tag{5}$$

где $f(t) = -K^{-1}\dot{g}(t)$; $K^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$;

$D(t) = diag\left(\lambda_1(t), \lambda_2(t)\right)$.

Задача (4), (5) равносильна задаче:

$$x(t,\varepsilon) = E(t,t_0,\varepsilon)x_0(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau)d\tau, \tag{6}$$

где $E(t,\tau,\varepsilon) = exp\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{\tau}^{t} D(s)\,ds\right)$.

Пусть $h(t) = colon\big(h_1(t), h_2(t)\big)$; $h_k(t) -$ аналитические функции;

$$x_0(\varepsilon) = colon\left(x_1^{(0)}(\varepsilon), x_2^{(0)}(\varepsilon)\right);\ x(t,\varepsilon) = colon\big(x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon)\big).$$

$$H_0 = \left\{(t_1,t_2): Re\int_{t_0}^{t} \lambda_k(s)ds \leq O(k = 1,2)\right\}.$$

$$K_\varepsilon = \left\{(t_1,t_2): Re\int_{t_0}^{t} \lambda_k(s)ds \leq \varepsilon\ln\varepsilon\,(k = 1,2)\right\}.$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Тогда

$$f(t) = -K^{-1}\left(-A^{-1}(t)h(t)\right)' = \left(K^{-1}A^{-1}(t)h(t)\right)' = colon\left(f_1(t), f_2(t)\right),$$

где $f_1(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{h_1(t)-ih_2(t)}{\lambda_1(t)}\right)'$, $f_2(t) = \frac{-i}{2}\left(\frac{h_1(t)+ih_2(t)}{\lambda_2(t)}\right)'$.

1) Пусть $h_1(t) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)\varphi(t)$, $h_2(t) = \frac{i}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)\varphi(t)$,

где $\varphi(t)$ −любая аналитическая функция на H_0. Тогда $f_1(t) = \frac{1}{2}\varphi'(t)$; $f_2(t) = -\frac{i}{2}\varphi'(t)$. Следовательно $f_k(t) = O(1)$ на H_0, т.е. имеет место регулярный случай.

Из (6) получим

$$x_k(t,\varepsilon) = E_k(t,t_0,\varepsilon)x_k^{(0)}(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E_k(t,\tau,\varepsilon)f_k(\tau)d\tau \ (k = 1,2) \qquad (7)$$

где $E_k(t,\tau,\varepsilon) = exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda_k(s)\,ds\right)$.

Пусть $k = 1$; $t = t_1 + it_2$; $\tau = \tau_1 + i\tau_2$; t_1, t_2; τ_1, τ_2 − действительные переменные.

Справедлива

$$Re\int_{t_0}^{\tau}\lambda_1(s)\,ds = -\cos\tau_1[ch\tau_2 + ash\tau_2] + \cos t_0;$$

$$\left|\int_{t_0}^{t} E_1(t,\tau,\varepsilon)[h_1(\tau) - ih_2(\tau)]d\tau\right| \le$$

$$\le O(1)\left|\int_l exp\frac{1}{\varepsilon}[-\cos t_1(cht_2 + asht_2) + \ + \cos\tau_1(ch\tau_2 + ash\tau_2)]\sqrt{d\tau_1^2 + d\tau_2^2}\right|,$$

где l − путь интегрирования, соединяющий точки t_0, t.

Пусть $A(t_0,0)$; $B(0,\tilde{\alpha}_0)$; $C(-t_0,0)$; $D(0,\alpha_0)$; $A_1(t_0,\alpha_0)$; $T_1(t_1,\alpha_0)$; $T(t_1,t_2)$;

$l_1 = p[A, A_1]$ − отрезок прямой, соединяющий точки A, A_1;

$l_2 = p[A_1, T_1]$; $l_3 = p[T_1, T]$; $l = l_1 \cup l_2 \cup l_3$, где

$\tilde{\alpha}_0 = -\ln(1-a) + \ln\left(cos\,t_0 + \sqrt{cos^2 t_0 - (1-a^2)}\right)$; $\alpha_0 = -\tilde{\alpha}_0$.

Заметим что

$H_0 = \left\{(t_1,t_2): Re\int_{t_0}^{t}\lambda_k(s)ds \le 0 \ (k = 1,2)\right\}$ = [АВСД] − криволинейный четырехуголник с вершинами в точках А, В, С, Д причем $\lambda_1(0,\alpha_0) = 0$;

$\lambda_2(0,\tilde{\alpha}_0) = 0$.

Справедливо равенство:

$$x_1(t,\varepsilon) = E_1(t,t_0,\varepsilon)x_1^{(0)}(\varepsilon) + \int_{l_1} E_1(t,\tau,\varepsilon)f_1(\tau)d\tau + \int_{l_2} E_1(t,\tau,\varepsilon)f_1(\tau)d\tau + \ + \int_{l_3} E_1(t,\tau,\varepsilon)f_1(\tau)d\tau,$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$$x_2(t,\varepsilon) = E_2(t,t_0,\varepsilon)x_2^{(0)}(\varepsilon) + \int_{\tilde{l}_1} E_2(t,\tau,\varepsilon)f_2(\tau)d\tau + \int_{\tilde{l}_2} E_2(t,\tau,\varepsilon)f_2(\tau)d\tau + \quad + \int_{\tilde{l}_3} E_2(t,\tau,\varepsilon)f_2(\tau)d\tau,$$

где $\tilde{l} = \tilde{l}_1 \cup \tilde{l}_2 \cup \tilde{l}_3$, $l = l_1 \cup l_2 \cup l_3 -$ симметрично относительно действительной оси.

Заметим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{l_1} E_1(t,\tau,\varepsilon)f_1(\tau)d\tau = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\tilde{l}_1} E_2(t,\tau,\varepsilon)f_2(\tau)d\tau = 0.$$

Поэтому справедливо равенство:

$$x_1(t,\varepsilon) = E_1(t,t_0,\varepsilon)x_1^{(0)}(\varepsilon) + \int_{l_1} E_1(t,\tau,\varepsilon)f_1(\tau)d\tau +$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{h_1(t) - ih_2(t)}{\lambda_1(t)} - \frac{h_1(t_0+i\alpha_0) - ih_2(t_0+i\alpha_0)}{\lambda_1(t_0+i\alpha_0)} \cdot\cdot E_1(t,t_0+i\alpha_0,\varepsilon)\right] +$$
$$+\frac{1}{2\varepsilon}\int_{t_{0+i\alpha_0}}^{t} E_1(t,\tau,\varepsilon)[h_1(\tau) - ih_2(\tau)]d\tau, \qquad (8)$$

$$x_2(t,\varepsilon) = E_2(t,t_0,\varepsilon)x_2^{(0)}(\varepsilon) + \int_{\tilde{l}_1} E_2(t,\tau,\varepsilon)f_2(\tau)d\tau$$
$$- \quad \frac{i}{2}\left[\frac{h_1(t) + ih_2(t)}{\lambda_2(t)} - \frac{h_1(t_0+i\tilde{\alpha}_0) + ih_2(t_0+i\tilde{\alpha}_0)}{\lambda_1(t_0+i\tilde{\alpha}_0)} \cdot\cdot E_2(t,t_0+i\tilde{\alpha}_0,\varepsilon)\right]$$
$$- \quad \frac{i}{2\varepsilon}\int_{t_{0+i\tilde{\alpha}_0}}^{t} E_2(t,\tau,\varepsilon)[h_1(\tau) + ih_2(\tau)]d\tau, \qquad (9)$$

причем для $(t_1,t_2) \in H_0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E_1(t,t_0+i\alpha_0,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} E_2(t,t_0+i\tilde{\alpha}_0,\varepsilon) = 0.$$

Из $(8), (9)$ следует, что предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x_k(t,\varepsilon)$$

зависит от поведения интеграла

$$\int_{t_0}^{t} E_k(t,\tau,\varepsilon)d\tau \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0.$$

Теперь будем оценивать интеграл: $I_1(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t} E_k(t,\tau,\varepsilon)[h_1(\tau) \mp ih_2(\tau)]d\tau$.

Так как $h_k(t)(k = 1,2) -$ аналитическая функция на рассматриваемом множестве, то можно предполагать, что $h_k(t) = O(1)$ при тех значениях t, где она принимает.

Пусть

$$R(t,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t}\lambda_1(s)ds\right) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left[-\cos t_1\left(cht_2 + asht_2\right) + \cos t_0\right]\right).$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Тогда $\left|I_1(t,\varepsilon)\right| \le O(1)R(t,\varepsilon)\left|\int\limits_l \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int\limits_{t_0}^{\tau}\lambda_1(s)d\tau\right)\cdot|d\tau|\right|$, где $l = l_1 \cup l_2 \cup l_3$.

Здесь $\operatorname{Re}\int\limits_{t_0}^{\tau}\lambda_1(s)ds = -\cos\tau_1[ch\tau_2 + ash\tau_2] + \cos t_0$.

Теперь будем оценивать следующие интегралы

$$I_1^{(1)}(\varepsilon) = \left|\int\limits_{l_1}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int\limits_{t_0}^{\tau}\lambda_1(s)d\tau\right)\cdot|d\tau|\right|;\ I_1^{(2)}(\varepsilon) = \left|\int\limits_{l_2}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int\limits_{t_0}^{\tau}\lambda_1(s)d\tau\right)\cdot|d\tau|\right|;$$

$$I_1^{(3)}(t,\varepsilon) = R(t,\varepsilon)\left|\int\limits_{l_3}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int\limits_{t_0}^{\tau}\lambda_1(s)d\tau\right)\cdot|d\tau|\right|.$$

Так как $l_1 : \tau_1 = t_0; 0 \ge \tau_2 \ge \alpha_0$, то $I_1^{(1)}(\varepsilon) = \int\limits_{\alpha_0}^{0}\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\cos t_0(ch\tau_2 + ash\tau_2 - 1)\right]d\tau_2$.

Пусть $\varphi(x) = chx + ashx - 1$. Тогда $\varphi'(x) = shx + achx;\ \varphi''(x) = chx + ashx > 0$ при любом x и $\varphi'(\alpha_0) = 0 \le \varphi'(x) \le a = \varphi'(0)$, следовательно, $\varphi(x)$ возрастает на отрезке $[\alpha_0, 0]$. Так как $\varphi(0) = 0$, то отрезок $[\alpha_0, 0]$ будем делить на две части: $[\alpha_0, 0] = [\alpha_0, -\delta] \cup [-\delta, 0]$, где $\delta - const$, причем $0 < \delta < \tilde{\alpha}_0$. Пусть $\varphi(-\delta) = -b, b > 0$. Тогда

$$\int\limits_{\alpha_0}^{-\delta}\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\cos t_0(ch\tau_2 + ash\tau_2 - 1)\right]d\tau_2 \le \int\limits_{\alpha_0}^{-\delta}\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\cos t_0 \cdot b\right]d\tau_2 = \exp\left(-\frac{b}{\varepsilon}\cos t_0\right)(\tilde{\alpha}_0 - \delta) = O(\varepsilon).$$

$$\int\limits_{-\delta}^{0}\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\cos t_0(ch\tau_2 + ash\tau_2 - 1)\right]d\tau_2 = \frac{\varepsilon}{\cos t_0}\int\limits_{-\delta}^{0}(sh\tau_2 + ach\tau_2)^{-1}d\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\cos t_0(ch\tau_2 + ash\tau_2 - 1)\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\cos t_0}\left[\frac{1}{a} - (-sh\delta + ach\delta)^{-1}\cdot\exp\left(-\frac{b}{\varepsilon}\cos t_0\right)\right] + \frac{\varepsilon}{\cos t_0}\int\limits_{-\delta}^{0}(ch\tau_2 + ash\tau_2)(sh\tau_2 + ach\tau_2)^{-2} \times$$

$$\times\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\cos t_0(ch\tau_2 + ash\tau_2 - 1)\right]d\tau_2 = O(\varepsilon).$$

Таким образом, получена оценка $I_1^{(1)}(\varepsilon) = O(\varepsilon)$.

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Для $l_2:\tau_2=\alpha_0; t_0\le\tau_1\le t_1$. Поэтому $I_1^{(2)}(\varepsilon)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\exp\frac{1}{\varepsilon}[\cos\tau_1(ch\alpha_0+ash\alpha_0)-\cos t_0]d\tau$. Имеет место равенство $ch\alpha_0+ash\alpha_0=\cos t_0=\sqrt{1-a^2}$. Следовательно,

$I_1^{(2)}(\varepsilon)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\cos t_0(\cos\tau_1-1)\right]d\tau_1$. Так как

$$-\frac{\tau_1^2}{2}\le\cos\tau_1-1\le-\frac{\tau_1^2}{2}\left(1-\frac{\tau_1^2}{12}\right), \text{то} \int\limits_{t_0}^{t_1}\exp\left(-\frac{\tau_1^2\cos t_0}{2\varepsilon}\right)\le I_1^{(2)}(\varepsilon)\le\int\limits_{t_0}^{t_1}\exp\left[-\frac{\cos t_0\cdot\tau_1^2\left(1-\frac{\tau_1^2}{12}\right)}{2\varepsilon}\right]d\tau_1$$

.

Пусть $c_0=\frac{\cos t_0}{2\varepsilon}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{2\varepsilon}=\frac{\gamma_0^2}{\varepsilon}, \gamma_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-a^2\right)^{\frac{1}{4}}$;

$b_0=\frac{\cos t_0}{2\varepsilon}\left(1-\frac{t_0^2}{12}\right)=\frac{1}{2\varepsilon}\left(1-a^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t_0^2}{12}\right)=\frac{\beta_0^2}{\varepsilon}$,

$\beta_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-a^2\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(1-\frac{t_0^2}{12}\right)^{\frac{1}{2}}$. Тогда $\int\limits_{t_0}^{t_1}\exp\left(-c_0\tau_1^2\right)d\tau_1\le I_1^{(2)}(\varepsilon)\le\int\limits_{t_0}^{t_1}\exp\left(-b_0\tau_1^2\right)d\tau_1$;

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\exp\left(-c_0\tau_1^2\right)d\tau_1=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\gamma_0}\int\limits_{\sqrt{c_0}t_0}^{\sqrt{c_0}t_1}\exp\left(-x^2\right)dx=O\left(\sqrt{\varepsilon}\right); \int\limits_{t_0}^{t_1}\exp\left(-b_0\tau_1^2\right)d\tau_1=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\beta_0}\int\limits_{\sqrt{b_0}t_0}^{\sqrt{b_0}t_1}\exp\left(-x^2\right)dx=O\left(\sqrt{\varepsilon}\right);$$

Получена оценка:

$I_1^{(2)}(\varepsilon)=O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$. Эта оценка неулучшаемая.

Для $l_3:\tau_1=t_1; \alpha_0\le\tau_2\le t_2; |d\tau|=d\tau_2$.

Следовательно,

$$I_1^{(3)}(t,\varepsilon)=R(t,\varepsilon)\left|\int\limits_{l_3}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int\limits_{t_0}^{\tau}\lambda_1(s)ds\right)\cdot|d\tau_2|\right|=\int\limits_{\alpha_0}^{t_2}\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\cos t_1(cht_2+asht_2-ch\tau_2-ash\tau_2)\right]d\tau_2=$$

$$=\int\limits_{\alpha_0}^{t_2}\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\cos t_1(sh\xi+ach\xi)(t_2-\tau_2)\right]d\tau_2, \text{где } \tau_2<\xi<t_2.$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Пусть $y=\psi(x)\equiv shx+achx; y'=\psi'(x)=chx+ashx>0$ при любом x, следовательно, $\psi(x)-$ возрастающая функция на любом отрезке, причем $\psi(\alpha_0)=0.$

$x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1-a^2}\right)-\ln(1+a); x'_y=\frac{1}{\sqrt{y^2+1-a^2}}. \psi(\alpha_0)=0; \psi(\tilde{\alpha}_0)=\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}$. Таким образом,

$y=\psi(x)\equiv shx+achx; x=\varphi(y)\equiv\ln\left(y+\sqrt{y^2+1-a^2}\right)-\ln(1+a)$ взаимно-обратные однозначные функции, причем обе – строго возрастающие функции. Если $x\in[\alpha_0,\tilde{\alpha}_0]$, то $y\in\left[0,\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}\right]$ и наоборот. Пусть $0<\delta<<1$. Тогда если $y=\delta$, то

$$x=\ln\left(\delta+\sqrt{\delta^2+1-a^2}\right)-\ln(1+a)=\alpha_0+\gamma=\alpha_0+\ln\left(\frac{\delta}{\sqrt{1-a^2}}+\sqrt{1+\left(\frac{\delta}{\sqrt{1-a^2}}\right)^2}\right)=$$

$$=\alpha_0+\ln\left(\frac{\delta\delta_1}{\sqrt{1-a^2}}+1\right),$$

$$\delta_1=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\sqrt{1-a^2}}-\frac{1}{8}\left(\frac{\delta}{\sqrt{1-a^2}}\right)^3+\ldots - \text{знакочередующийся сходящий ряд.}$$

$$\gamma=\ln\left(1+\frac{\delta_1\cdot\delta}{\sqrt{1-a^2}}\right)=\frac{\delta\cdot\delta_1}{\sqrt{1-a^2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta\cdot\delta_1}{\sqrt{1-a^2}}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{\delta\cdot\delta_1}{\sqrt{1-a^2}}\right)^3-\ldots.$$

Пусть $\delta_2=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta\delta_1}{\sqrt{1-a^2}}+\frac{1}{3}\left(\frac{\delta\cdot\delta_1}{\sqrt{1-a^2}}\right)^2+\ldots$. Тогда $\gamma=\frac{\delta\cdot\delta_1\delta_2}{\sqrt{1-a^2}}=\delta\cdot\tilde{\delta}_0$, где $\tilde{\delta}_0=\frac{\delta_1\delta_2}{\sqrt{1-a^2}}$.

Таким образом, $\gamma=\tilde{\delta}_0\delta$; $\delta=\tilde{\beta}_0\gamma$; $\tilde{\beta}_0=\frac{1}{\tilde{\delta}_0}$, $0<\tilde{\delta}_0, 0<\tilde{\beta}_0$ – ограниченные величины.

Остается оценить интеграл

$$I_1^{(3)}(t,\varepsilon)=\int_{l_3} exp\frac{1}{\varepsilon}[-cost_1(cht_2+asht_2)+\cos t_1(ch\tau_2+ash\tau_2)]d\tau_2.$$

$$I_1^{(3)}(t_2,\varepsilon)=\int_{\alpha_0}^{t_2} exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}cost_1(sh\xi+ach\xi)(t_2-\tau_2)\right]d\tau_2\le t_2-\alpha_0;$$

1) Если $\alpha_0\le t_2\le\alpha_0+\varepsilon^\gamma$, где $0<\gamma-const$, то

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$$I_1^{(3)}(t_2,\varepsilon)=O(\varepsilon^{\gamma}).$$

2) Если $t_2 \ge \alpha_0+\varepsilon^{\gamma}$ и $\delta_0 - const,$ причем $0<\delta_0<1,$ то

$$I_1^{(3)}(t_2,\varepsilon)=I_1^{(3)}(\alpha_0+\delta_0\varepsilon^{\gamma},\varepsilon)+\breve{I}_1^{(3)}(t_2,\varepsilon), \qquad \text{где}$$

$$I_1^{(3)}(\alpha_0+\delta_0\varepsilon^{\gamma},\varepsilon)=\int_{\alpha_0}^{\alpha_0+\delta_0\varepsilon^{\gamma}} exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}cost_1(cht_2+asht_2-ch\tau_2-ash\tau_2)\right]d\tau_2=$$

$$=R(t_2,\varepsilon)\cdot\int_{\alpha_0}^{\alpha_0+\delta_0\varepsilon^{\gamma}} exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}cost_1(ch(\alpha_0+\delta_0\varepsilon^{\gamma})+ash(\alpha_0+\delta_0\varepsilon^{\gamma})-ch\tau_2- \quad -ash\tau_2)\right]d\tau_2=$$

$$=R(t_2,\varepsilon)\int_{\alpha_0}^{\alpha_0+\delta_0\varepsilon^{\gamma}} exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}cost_1(sh\xi+ach\xi)(\alpha_0+\delta_0\varepsilon^{\gamma}-\tau_2)\right]d\tau_2=$$

$$=R(t_2,\varepsilon)O(\varepsilon^{\gamma}).\ \text{Здесь}\ \alpha_0\le\tau_2<\xi<\alpha_0+\delta_0\varepsilon^{\gamma};$$

$$R(t_2,\varepsilon)=exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}cost_1\big(cht_2+asht_2-ch(\alpha_0+\delta_0\varepsilon^{\gamma})-ash(\alpha_0+\delta_0\varepsilon^{\gamma})\big)\right]=$$

$$=\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}cost_1(sh\xi+ach\xi)(t_2-\alpha_0-\delta_0\varepsilon^{\gamma})\right]=$$

$$=\begin{cases} O(1)\text{при }\ \gamma=\dfrac{1}{2};\\ O(\varepsilon^{1+n})\ \text{при}\ \ 0<\gamma<\dfrac{1}{2};\ \ n-\text{любое натуральное число},\alpha_0+\delta_0\varepsilon^{\gamma}<\xi<t_2.\end{cases}$$

Таким образом, получена оценка:

$$I_1^{(3)}(\alpha_0+\delta_0\varepsilon^{\gamma},\varepsilon)=\begin{cases} O\big(\sqrt{\varepsilon}\big)\text{при }\ \gamma=\dfrac{1}{2};\\ O(\varepsilon^{1+\gamma+n})\ \text{при}\ \ 0<\gamma<\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Далее имеет место оценка:

$$\breve{I}_1^{(3)}(t_2,\varepsilon)=\int_{\alpha_0+\delta_0\varepsilon^{\gamma}}^{t_2} exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}cost_1(cht_2+asht_2-ch\tau_2-ash\tau_2)\right]d\tau_2=$$

$$=\int_{\alpha_0+\delta_0\varepsilon^{\gamma}}^{t_2} exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}cost_1(sh\xi+ach\xi)(t_2-\tau_2)\right]d\tau_2,\ \ \text{где}$$

$$\alpha_0+\delta_0\varepsilon^{\gamma}\le\tau_2<\xi<t_2;\ \ sh\xi+ach\xi\ge\widetilde{\beta_0}\delta_0\varepsilon^{\gamma}.$$

Поэтому $\quad \breve{I}_1^{(3)}(t_2,\varepsilon)=O(\varepsilon^{1-\gamma}).$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Окончательно получена оценка:

$$I_1^{(3)}(t_2,\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon}) \text{при } \alpha_0 \le t_2 \le \alpha_0 + \varepsilon^\gamma \left(\gamma = \frac{1}{2}\right).$$

$$I_1^{(3)}(t_2,\varepsilon) = O(\varepsilon^{1-\gamma}) \text{ при } t_2 \ge \alpha_0 + \varepsilon^\gamma \left(0 < \gamma \le \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, получена следующая оценка

$$|I_1(t,\varepsilon)| = O(1)\left[R(t,\varepsilon) \cdot I_1^{(1)}(\varepsilon) + R(t,\varepsilon) I_1^{(2)}(\varepsilon) + I_1^{(3)}(\varepsilon)\right].$$

Если

$$Re \int_{t_0}^{t} \lambda_1(s)ds \le \varepsilon \ln \varepsilon, \text{ то } R(t,\varepsilon) = \varepsilon.$$

Поэтому $|I_1(t,\varepsilon)| = O(1) I_1^{(3)}(t,\varepsilon)$.

Пусть $\delta_0, \delta - const$, причем $0 < \delta_0 < 1$; $0 < \delta \ll 1; \alpha_1 = \alpha_0 + \delta_0 \delta$.

Тогда при $t_2 \ge \alpha_0 + \delta$;

$$I_1^{(3)}(t_2,\varepsilon) = \int_{\alpha_0}^{t_2} exp\left[-\frac{1}{\varepsilon} cost_1(cht_2 + asht_2 - ch\tau_2 - ash\tau_2)\right] d\tau_2 =$$

$$= I_{11}^{(3)}(t_2,\varepsilon) + I_{12}^{(3)}(t_2,\varepsilon), \qquad \text{где}$$

$$I_{11}^{(3)}(t_2,\varepsilon) = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} exp\left[-\frac{1}{\varepsilon} cost_1(cht_2 + asht_2 - ch\tau_2 - ash\tau_2)\right] d\tau_2 =$$

$$= \tilde{R}(t_2,\varepsilon) \cdot \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} exp\left[-\frac{1}{\varepsilon} cost_1(ch\alpha_1 + ash\alpha_1 - ch\tau_2 - ash\tau_2)\right] d\tau_2 =$$

$$= \tilde{R}(t_2,\varepsilon) \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} exp\left[-\frac{1}{\varepsilon} cost_1(sh\xi + ach\xi)(\alpha_0 + \delta_0\delta - \tau_2)\right] d\tau_2 =$$

$$= O(1)\tilde{R}(t_2,\varepsilon). \text{ Здесь}$$

$$\tilde{R}(t_2,\varepsilon) = exp\left[-\frac{1}{\varepsilon} cost_1(cht_2 + asht_2 - ch\alpha_1 - ash\alpha_1)\right] =$$

$$= exp\left[-\frac{1}{\varepsilon} cost_1(sh\xi + ach\xi)(t_2 - \alpha_1)\right] = O(\varepsilon^{1+n}),$$

$$\alpha_1 < \xi < t_2; \ t_2 - \alpha_1 \ge (1-\delta_0)\delta;$$

n –любое натуральное число.

Таким образом, имеет место оценка

$$I_{11}^{(3)}(t_2,\varepsilon) = O(\varepsilon^{1+n}) \text{ при } t_2 \ge \alpha_0 + \delta. \qquad (10)$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Рассмотрим теперь величины

$$\tilde{I}_{12}(t_2,\varepsilon)=\int_{\alpha_1}^{t_2}E_1(t,\tau,\varepsilon)[h_1(\tau)-ih_2(\tau)]\,d\tau_2.$$

Справедлива

$$\left|\tilde{I}_{12}(t_2,\varepsilon)\right|=\left|\int_{\alpha_1}^{t_2}E_1(t,\tau,\varepsilon)[h_1(\tau)-ih_2(\tau)]\,d\tau_2\right|\le$$

$$\le O(1)I_{12}(t_2,\varepsilon),\qquad \text{где}$$

$$I_{12}(t_2,\varepsilon)=\int_{\alpha_1}^{t_2}exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\cos t_1(cht_2+asht_2-ch\tau_2-ash\tau_2)\right]d\tau_2;$$

$$\tilde{I}_{12}(t_2,\varepsilon)=-\varepsilon\frac{h_1(t_1+it_2)-ih_2(t_1+it_2)}{\lambda_1(t_1+it_2)}+\quad+\varepsilon E_1(t,\alpha_1,\varepsilon)\frac{h_1(t_1+i\alpha_1)-ih_2(t_1+i\alpha_1)}{\lambda_1(t_1+i\alpha_1)}+$$

$$+\varepsilon\int_{\alpha_1}^{t}E_1(t,\tau,\varepsilon)d\frac{h_1(t_1+i\tau_2)-ih_2(t_1+i\tau_2)}{\lambda_1(t_1+i\tau_2)};$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}E_1(t,\alpha_1,\varepsilon)=0;\ \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\alpha_1}^{t_2}E_1(t,\tau,\varepsilon)d\frac{h_1(t_1+i\tau_2)-ih_2(t_1+i\tau_2)}{\lambda_1(t_1+i\tau_2)}=0.$$

Поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\alpha_0}^{t_2}E_1(t,\tau,\varepsilon)[h_1(\tau)-ih_2(\tau)]\,d\tau=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}E_1(t,\tau,\varepsilon)[h_1(\tau)-ih_2(\tau)]\,d\tau+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\alpha_1}^{t_2}E_1(t,\tau,\varepsilon)[h_1(\tau)-ih_2(\tau)]\,d\tau=-\frac{h_1(t_1+it_2)-ih_2(t_1+it_2)}{2\,\lambda_1(t_1+it_2)}.$$

Здесь учтена оценка (10).

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $\delta-const$, причем $0<\delta\ll 1; t_2\ge\alpha_0+\delta$

$$(\,t_2\le-\alpha_0-\delta);\ \ Re\int_{t_0}^{t}\lambda_k(s)ds\le\varepsilon\ln\varepsilon\ \ (k=1,2).$$

Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение на H_0 и при $t_2\ge\alpha_0+\delta$ (или $t_2\le-\alpha_0-\delta$) справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}x_1(t,\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{h_1(t)-ih_2(t)}{2\,\lambda_1(t)}-\frac{h_1(t_0+i\alpha_0)-ih_2(t_0+i\alpha_0)}{2\,\lambda_1(t_0+i\alpha_0)}\cdot\cdot E_1(t,t_0+i\alpha_0,\varepsilon)\right]-$$

$$-\frac{h_1(t_1+it_2)-ih_2(t_1+it_2)}{2\,\lambda_1(t_1+it_2)}=0\ \text{при}\ t_2\ge\alpha_0+\delta.$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x_2(t,\varepsilon) = -\frac{i}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{h_1(t)+ih_2(t)}{\lambda_2(t)} - \frac{h_1(t_0+i\tilde{\alpha}_0)+ih_2(t_0+i\tilde{\alpha}_0)}{\lambda_2(t_0+i\tilde{\alpha}_0)}\cdot E_2(t,t_0+i\tilde{\alpha}_0,\varepsilon)\right]+$$

$$+\frac{i}{2}\frac{h_1(t_1+it_2)+ih_2(t_1+it_2)}{\lambda_1(t_1+it_2)} = 0 \text{ при } t_2 < -\alpha_0-\delta.$$

Таким образом, в нерегулярном случае предельный пререход имеет место на множестве

$$H_c = \left\{(t_1,t_2): Re\int_{t_0}^{t}\lambda_k(s)ds \le \varepsilon\ln\varepsilon \quad (k=1,2); \alpha_0+\delta \le t_2 \le -\alpha_0-\delta\right\}. \qquad (11)$$

В формуле (11) величина $\delta -$ постоянная и $0<\delta\ll 1$. Теперь докажем более сильный результат чем теоремы 1. Для этого поступим следующим образом.

Пусть γ, p –постоянные, причем $0<\gamma<\frac{1}{4}$; $0<\mathrm{p}<\frac{1}{2}$ и $2\gamma>\mathrm{p}$.

$A_2(-\varepsilon^\gamma, a_0)$; $A_3(-\varepsilon^\gamma, a_0+\varepsilon^\gamma)$; $A_4(\varepsilon^\gamma, a_0+\varepsilon^\gamma)$; $A_5(\varepsilon^\gamma, a_0)$;

если $|t_1|\ge\varepsilon^\gamma$, то $T_1(t_1,a_0)$; если $|t_1|\le\varepsilon^\gamma$, то $T_1^*(t_1,a_0+\varepsilon^\gamma)$;

$$l_1=\mathrm{p}[A,A_1];\ l_k=\mathrm{p}[A_{k-1},A_k] \quad (k=2,3,4,5);\ l_6=\mathrm{p}[A_6,T_1];\ l_7=p[T_1,T].$$

Будем оценивать величины

$$I_1(t,\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)f_1(\tau)d\tau.$$

Путь интегрирование l будем определять следующим образом:

Если $t_1\le-\varepsilon^\gamma$, то $l=l_1\cup l_2^*\cup l_3^*$, где $l_2^*=\mathrm{p}[A_1,T_1]$; $l_3^*=p[T_1,T]$.

Если $|t_1|\le\varepsilon^\gamma$, то $l=l_1\cup l_2\cup l_3\cup l_4^*\cup l_5^*$, где $l_4^*=\mathrm{p}[A_3,T_1^*]$; $l_5^*=\mathrm{p}[T_1^*,T]$.

Если $t_1\ge\varepsilon^\gamma$, то

$$l=\bigcup_{k=1}^{7} l_k.$$

Если теперь выбирать γ,p так, чтобы имело место неравенство $2\gamma>\mathrm{p}$, то нетрудно показать справедливость оценки:

$$|I_1(t,\varepsilon)|\le O(1)\left|\int_l exp\left[\frac{1}{\varepsilon}Re\int_\tau^t\lambda_1(s)ds\right]\frac{|d\tau|}{\tau_1^2+(\tau_2-a_0)^2}\right| = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}-2\gamma}\right)$$

для $(t_1,t_2)\,\epsilon\, H_{0\varepsilon}=$

$$=\left\{(t_1,t_2): Re\int_{t_0}^{t}\lambda_k(s)ds\le-\varepsilon^{\mathrm{p}}\ (k=1,2);\ \text{причем если } |t_1|\le\varepsilon^\gamma, \quad \text{то } |t_2|\le-a_0-\varepsilon^\gamma\right\}.$$

Пусть

$$H_0^*=\left\{(t_1,t_2): Re\int_{t_0}^{t}\lambda_k(s)ds<0\ \ (k=1,2)\right\}.$$

Тогда $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} H_{0\varepsilon}=H_0^*$.

В самом деле, пусть $t=t_1+it_2$, $t^*=t_1^*+it_2^*$, где t_1,t_2,t_1^*,t_2^* – действительные; $t^*\epsilon\, H_0^*$; $t\epsilon\,\Gamma$ – граница открытой области H_0^*;

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$$r^* = \min_{t\epsilon\Gamma} | t^* - t|; \ \ 0 < r < r^*; \ \ 0 < \mathrm{p}_1 \leq \mathrm{p} < \frac{1}{2}; 0 < \varepsilon^{\mathrm{p}_1} \leq r \ (0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1 < 1).$$

Тогда

$$Re \int_{t_0}^{t^*} \lambda_k(s) ds \leq -r \leq -\varepsilon^{\mathrm{p}}.$$

Теперь будем выбирать γ, p так, чтобы имело место $0 < \gamma < \frac{1}{4}$, $2\gamma > \mathrm{p}$.

Далее учитывая, что r не зависит от ε, можно допустить если $|t_1| \leq \varepsilon^{\gamma}$, то $|t_2| \leq -a_0 - \varepsilon^{\gamma}$. Таким образом, $t^* \epsilon \ H_{0\varepsilon}$. Имеет место

Теорема 2.

Для решения $z(t, \varepsilon) = g(t) + Kx(t, \varepsilon)$ задачи (1), (2) на H_0 справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t, \varepsilon) = 0 \ \text{ при } \ (t_1, t_2) \ \epsilon \ H_0^* .$$

Литература:

1. Каримов С. Оценка первого приближения решения одной простой начальной задачи сингулярно возмущенной системы. / Вестник ОшГУ. - Ош, 2017. - №2. - С. 97- 109.