DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 5, 2019

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

MATHEMATICAL SCIENCES

Баетов А.К., Керимбеков А.

ЭКИ ӨЛЧӨМДҮҮ ВЕКТОРДУК БАШКАРУУ АРКЫЛУУ ОПТИМИЗАЦИЯ МАСЕЛЕСИН ЧЫГАРУУ: СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН СИСТЕМАСЫН ЧЫГАРУУ

Баетов А.К., Керимбеков А.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С ДВУМЕРНЫМ ВЕКТОРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ: РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

A.K. Baetov, A. Kerimbekov

THE SOLUTION OF THE OPTIMIZATION PROBLEM WITH TWO-DIMENSIONAL VECTOR CONTROL: SOLUTION OF A SYSTEM OF NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS

УДК: 517.97

Бул иште башкаруу параметрлеринин көз каранды болгон эки өзгөрмөлүү функция аркылуу мүнөздөлүүчү сырткы күчтөр таасир эткен учурдагы сызыктуу эмес оптимизациялоонун маселеси изилденди. Изилдөө профессор А.Керимбеков аркылуу иштелип чыккан метод аркылуу изилденди. Каралып жаткан маселенин өзгөчөлүгү болуп оптималдуу башкаруунун сызыктуу эмес интегралдык теңдемелердин системасы тең катыштуулук касиетке ээ болот. Бул жагдай вектордук оптималдык башкарууну аныктоодо бир гана сызыктуу эмес интегралдык теңдемени кароого мүмкүнчүлүк берет, башкача айтканда оптимизация маселесин толук чыгаруудагы процедураны жөнөкөйлөтүүгө мүмкүнчүлүк берет. Келтирилген сандык мисал теориялык жыйынтыктын туура экендигин көрсөтөт. Иш жүзүндө колдонмо мүнөздөгү көптөгөн милдеттер кездешет, мында тышкы таасир этүү функциясы туруктуу жана көчмө боло турган бир чекитте топтолгон. Тышкы таасирлердин тиркеме түйүнү чек арада топтолгон учурда чек ара башкармалары менен оптималдаштыруу милдети пайда болот.

Негизги сөз: *эки өлчөмдүү вектордук башкаруу, термелүү системалары, квадраттык фукционал, интегралдык теңдемелер, теңдемелер системасы, маселе, өзгөрмөлүү функция.*

В этой работе исследованы задачи нелинейной оптимизации в случае, когда действие внешней силы описывается функцией двух переменных от управляющих параметров. Исследование проводилось по методике, разработанной профессором А.Керимбековым. Одной из особенностей рассматриваемой задачи является то, что система нелинейных интегральных уравнений оптимального управления обладает свойством равных отношений. Это обстоятельство позволило рассматривать при определении векторного оптимального управления лишь одно нелинейное интегральное уравнение, т.е. позволило упростить процедуру построения решения задачи оптимизации в целом. Приведенный численный пример подтверждают теоретические выводы. На практике встречаются множество задач прикладного характера, где действие функции внешнего воздействия сосредоточено в одной точке, которая может быть как фиксированной, так и подвижной. В случаях, когда точка приложения внешних воздействий сосредоточена на границе появляется задача оптимизации с граничными управлениями.

Ключевые слова: *двумерное векторное управления, колебательные системы, квадратичный функционал, интегральные уравнения, система уравнений, задача, переменная функция.*

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

In this paper, non-linear optimization problems are investigated in the case when the action of an external force is described by a function of two variables of control parameters. The study was conducted according to the method developed by professor A.Kerimbekov. One of the features of the problem under consideration is that the system of nonlinear integral optimal control equations has the property of equal relations. This circumstance allowed to consider when determining the vector optimal control only one nonlinear integral equation, i.e. allowed to simplify the procedure for constructing a solution to the optimization problem as a whole. The given numerical example confirms the theoretical conclusions. In practice, there are many problems of an applied nature, where the action of the external action function is concentrated at a single point, which can be either fixed or mobile. In cases where the point of application of external influences is focused on the boundary, an optimization problem with boundary controls appears.

Key words: *two-dimensional vector control, oscillatory systems, quadratic functional, integral equations, system of equations, problem, variable function.*

Эта работа является продолжением задачи оптимизации рассмотренное в работе [1]. В работе [1] условие оптимальности записывалось в виде

$$\beta e^{4-u_1^2(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\omega_n(t) =$$

$$= -2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_n \cos\lambda_n t + \int_0^T \sin\lambda_n(T-\tau) g_n(\tau) f\left[\tau, u_1(\tau), u_2(\tau)\right] d\tau - \xi_n\right] \times$$

$$\times \sin\lambda_n(T-t) g_n(t) \beta e^{9-u_2^2(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\omega_n(t) =$$

$$= -2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_n \cos\lambda_n t + \int_0^T \sin\lambda_n(T-\tau) g_n(\tau) f\left[\tau, u_1(\tau), u_2(\tau)\right] d\tau - \xi_n\right] \times$$

$$\times \sin\lambda_n(T-t) g_n(t). \tag{1}$$

Для системы (1) выписываем соотношение равных отношений вида

$$\vartheta(t) = \frac{\beta u_1(t)}{2u_1(t)e^{u_1^2(t)-4}} = \frac{\beta u_2(t)}{2u_2(t)e^{u_2^2(t)-9}} \quad \text{или} \quad \vartheta(t) = \frac{\beta}{2}e^{4-u_1^2(t)} = \frac{\beta}{2}e^{9-u_2^2(t)}.$$

Отсюда имеем следующие равенства

$$u_1(t) = \varphi_1\left[t, \vartheta(t), \beta\right] = \pm\sqrt{\ln\left(\frac{\beta}{2\vartheta(t)}\right) + 4}, \qquad \left(u_1^2(t) = \ln\left(\frac{\beta}{2\vartheta(t)}\right) + 4\right)$$

$$u_2(t) = \varphi_2\left[t, \vartheta(t), \beta\right] = \pm\sqrt{\ln\left(\frac{\beta}{2\vartheta(t)}\right) + 9}, \qquad \left(u_2^2(t) = \ln\left(\frac{\beta}{2\vartheta(t)}\right) + 9\right). \tag{2}$$

Согласно равенствам (1) и (2) относительно функции $\vartheta(t)$ имеем интегральное уравнение следующего вида

$$\vartheta(t) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\lambda_n t\psi_n + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^T \sin\lambda_n(T-\tau) g_n(\tau)\left(\frac{\beta}{2\vartheta} + \frac{\beta}{2\vartheta}\right) d\tau - \xi_n\right] \sin\lambda_n(T-t) g_n(t)$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Это уравнение перепишем в виде

$$\vartheta(t)-\frac{8}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t)\int_0^T G_n(T,\tau)\vartheta(\tau)d\tau=2\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t)h_n, \qquad (3)$$

где $G_n(T,t)=g_n(t)\sin\lambda_n(T-t)$, $h_n=\xi_n-\cos\lambda_n t\psi_n$.

Уравнение (3) является линейным интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода. Разрешимость этого уравнения можно исследовать на основе принципа сжимающих отображений.

Оператор $G[\vartheta]$ при выполнении условия

$$\gamma(\beta)=\frac{1}{\beta}\frac{192g_0^2}{15}\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)<1 \qquad (4)$$

является сжимающим.

Операторное уравнение $\vartheta=G[\vartheta]$ в пространстве $H(0,T)$ имеет единственное решение.

Решение операторного уравнения $\vartheta=G[\vartheta]$ находим методом последовательных приближений, т.е.

$$\vartheta_i(t)=G\left[\vartheta_{i-1}(t)\right] \qquad i=1,2,3,...,$$

где $\vartheta_0(t)$ - произвольный элемент пространства $H(0,T)$. Известно, что приближенное решение $\vartheta_i(t)$ удовлетворяет оценке

$$\left\|\vartheta(t)-\vartheta_i(t)\right\|_H\le\frac{\gamma^i}{1-\gamma}\left\|G\left[\vartheta_0(t)\right]-\vartheta_0(t)\right\|_H=$$

$$=\frac{\gamma^i}{1-\gamma}\left\|G_0\left[\vartheta_0(t)\right]-\vartheta_0(t)+h(t)\right\|_H. \qquad (5)$$

В силу произвольности, если положить $\vartheta_0(t)=h(t)$, то неравенством (5) можно пользоваться в следующем виде

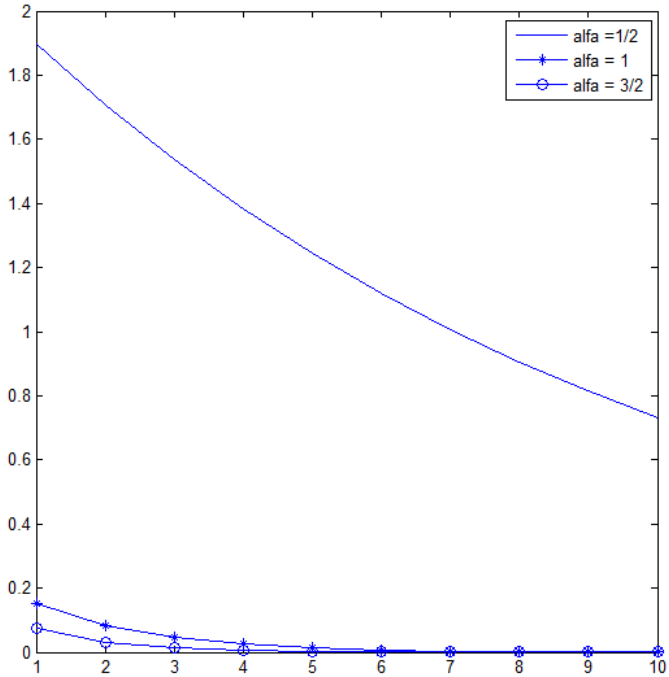
$$\left\|\vartheta(t)-\vartheta_i(t)\right\|_H\le\frac{\gamma^i}{1-\gamma}\left\|G_0\left[h(t)\right]\right\|_H. \qquad (5^1)$$

$g_0^2 = 0.014$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Таблица 1

	$\left\|\vartheta(t)-\vartheta_i(t)\right\|_H \le \frac{\gamma^i}{1-\gamma}\left\|G_0\left[h(t)\right]\right\|_H$	
i	$\alpha=1/2$	$\alpha=1$
1	4.2576	0.83166
2	2.2797	0.26927
3	1.2207	0.087184
4	0.65359	0.028228
5	0.34996	0.0091395
6	0.18738	0.0029592
7	0.10033	0.00095811
8	0.053722	0.00031021
9	0.028765	0.00010044
10	0.015402	3.252e-005



Точное решение операторного уравнения $\vartheta=G[\vartheta]$ находим по формуле

$$\vartheta^0(t)=\lim_{i\to\infty}\vartheta_i(t),\quad \vartheta_i(t)=G\left[\vartheta_{i-1}(t)\right],\quad i=1,2,3,\ldots,$$

где $\vartheta_i(t)$ - последовательные приближения.

Далее, по найденному решению уравнения $\vartheta=G[\vartheta]$, согласно (2),находим решение системы (1), т.е. оптимальное векторное управление $u^0(t)$ определим по формулам:

$$u_1^0(t)=\varphi_1\left[t,\vartheta^0(t),\beta\right]=\pm\sqrt{\ln\left(\frac{\beta}{2\vartheta^0(t)}\right)+4},$$

$$u_2^0(t)=\varphi_2\left[t,\vartheta^0(t),\beta\right]=\pm\sqrt{\ln\left(\frac{\beta}{2\vartheta^0(t)}\right)+9}. \qquad (6)$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

После того, как было найдено векторное оптимальное управление $u^0(t)$ решение задачи оптимизации находим в виде тройки $\left(u^0(t),\ V^0(t,x),\ J\left[u^0(t)\right]\right)$ по формулам

$$V^0(t,x) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\lambda_n t\psi_n + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau)g_n(\tau)e^{\left(u_1^0(\tau)\right)^2-4} + e^{\left(u_2^0(\tau)\right)^2-9}d\tau\right)z_n(x) \tag{7}$$

- оптимальный процесс,

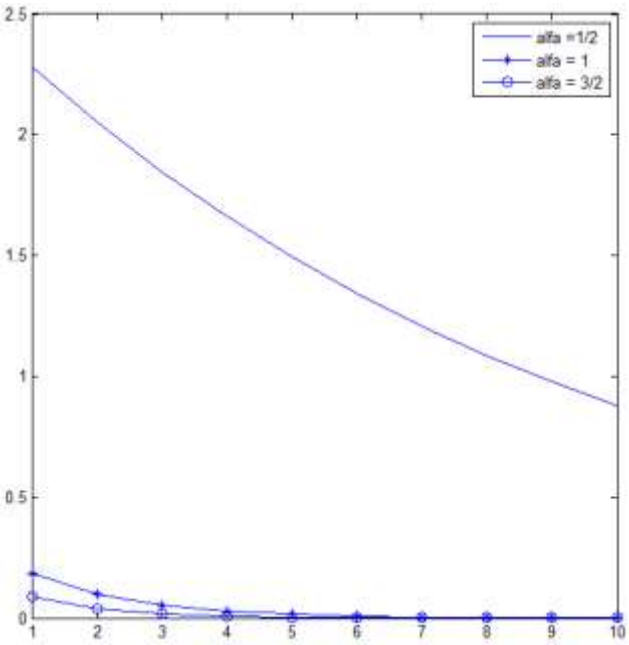
$$J[u^0(t)] = \int_0^T\left[V^0(T,x)-\xi(x)\right]^2 dx + \beta\int_0^T\sum_{k=1}^{m}\left(u_k^0(t)\right)^2 dt \tag{8}$$

- минимальное значение функционала.

Таблица 2

Сходимость по оптимальному управлению

	$\left\|u^0(t)-u^s(t)\right\|_H$		
S	$\alpha=1/2$	$\alpha=1$	
1	9.0732	1.7723	
2	4.8581	0.57383	
3	2.6013	0.18579	
4	1.3928	0.060155	
5	0.74578	0.019477	
6	0.39932	0.0063061	
7	0.21381	0.0020418	
8	0.11448	0.00066108	
9	0.0613	0.00021404	
10	0.032823	6.9301e-005	



DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Талица 3

Сходимость по оптимальному процессу

	$\left\|V^0(t,x)-V_s^0(t,x)\right\|_H$		
S	$\alpha=1/2$	$\alpha=1$	
1	19.9175	3.0254	
2	10.6647	0.97955	
3	5.7103	0.31715	
4	3.0576	0.10269	
5	1.6371	0.033248	
6	0.8766	0.010765	
7	0.46937	0.0034854	
8	0.25132	0.0011285	
9	0.13457	0.00036538	
10	0.072053	0.0001183	

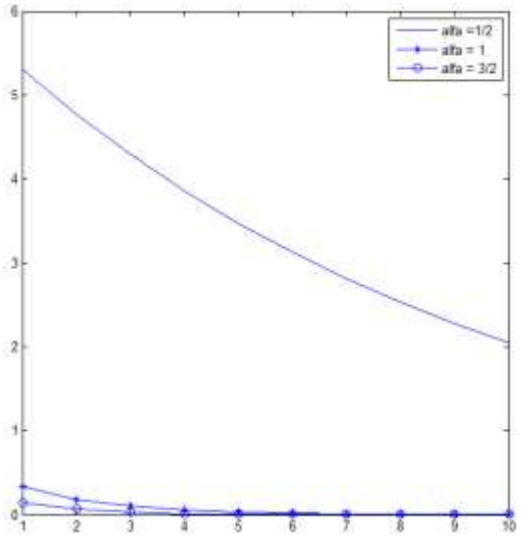
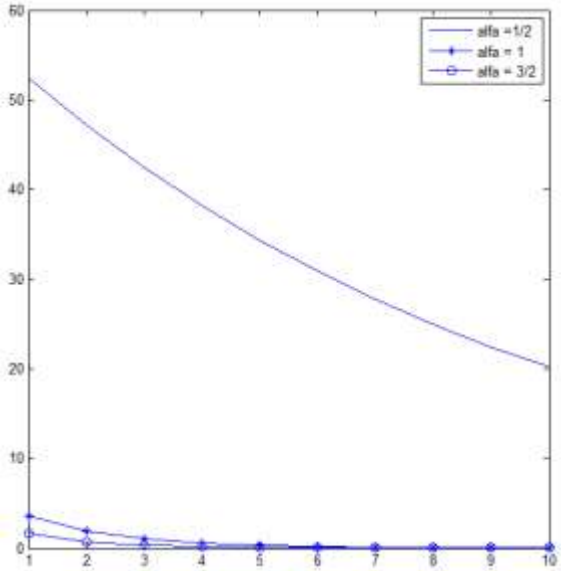


Таблица 4

Сходимость приближений минимального значения функционала

	$\left\|J\left[u^0\right]-J_s\left[u^s\right]\right\|$		
S	$\alpha=1/2$	$\alpha=1$	
1	204.0393	33.4854	
2	109.2513	10.8418	
3	58.4978	3.5103	
4	31.3222	1.1366	
5	16.7712	0.36799	
6	8.98	0.11915	
7	4.8083	0.038577	
8	2.5746	0.01249	
9	1.3785	0.004044	
10	0.73812	0.0013094	



Литература:

1. Баетов А.К., Керимбеков А. Решение задачи оптимизации с двумерным векторным управлением. Постановка задачи, условия оптимальности.
2. Баетов А.К. Приближенное решение нелинейной задачи оптимального управления с распределенными параметрами [Текст] / А.К. Баетов, А.К. Керимбеков // Вестник КГУ им. И.Арабаева. - 2013. - С. 252-258.
3. Керимбеков А. О разрешимости одной задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при минимизации квадратичного функционала [Текст] / А.Керимбеков, А.К.Баетов // Международная конференция. КГУСТА им. Н.Исанова. - Бишкек, 2012. - С. 240-243.
4. Керимбеков А.О разрешимости одной задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов [Текст] / А.О. Керимбеков, А.К. Баетов // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий - аль-хорезмий 2012». - Ташкент, 2012. - С. 301-305.
5. Керимбеков А. О разрешимости одной задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов [Текст] / А.Керимбеков, А.К. Баетов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек, 2012. - Выпуск 44. - С. 114-117.
6. Краснов М.В. Интегральные уравнения [Текст] / М.В. Краснов. - М.: Наука, 1975. - 303 с.