DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Баетов А.К., Керимбеков А.

ЭКИ ӨЛЧӨМДҮҮ ВЕКТОРДУК БАШКАРУУ АРКЫЛУУ ОПТИМИЗАЦИЯ МАСЕЛЕСИН ЧЫГАРУУ: МАСЕЛЕНИН КОЮЛУШУ ЖАНА ОПТИМАЛДУУЛУКТУН ШАРТЫ

Баетов А.К., Керимбеков А.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С ДВУМЕРНЫМ ВЕКТОРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ: ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

A.K. Baetov, A. Kerimbekov

THE SOLUTION OF THE OPTIMIZATION PROBLEM WITH TWO-DIMENSIONAL VECTOR CONTROL: PROBLEM STATEMENT AND OPTIMALITY CONDITIONS

УДК: 517.97

Бул иште эки өлчөмдүү вектордук башкаруунун жардамы менен термелүү процесстерин оптималдаштыруунун сызыктуу эмес маселелеринин чыгарылыштары изилденди. Оптималдаштыруунун маселелеринин жалгыз чыгарылышынын жеткиликтүү шарттары табылды жана аны каалагандай тактыкта чыгаруу түзүүнүн алгортми иштелип чыкты. Сунушталган ыкма маселени чечүүнү ырааттуу колдонулушун оптималдаштыруунун милдеттерин долбоордук иштеп чыгууларды түрдүү шарттарда априордук жазылуучу тышкы таасирлердин объекти; жылдарга комплекстүү көйгөйдү биргелешкен оптималдаштыруу жана андан ары типичные кырдаалда оптималдуу долбоорлоо бөлүштүрүлгөн системасынын шартында интервалдык белгисиздиктин анын параметрдик мүнөздөмөлөрүн жана тышкы өзгөрүүлөрдүн маселелерин чыгарууга жардамы тиет. Өнүктүрүүчү ыкма алдын ала жол-жобосун параметрдөөдө изделип жаткан чечимдеринде пайдаланылат, белгилүү болгон аналитикалык шарттары оптималдуулукка таянган; андан кийинки операциянын так редукциялык атайын милдеттерине математикалык программалаштыруу; альтернансдык касиеттер сызыктуу эмес чебышевдик жакындатылган жана фундаменталдык мыйзам ченемдүүлүктү белгилеген предметтик жаатындагы таянуу.

Негизги сөздөр: *эки өлчөмдүү вектордук башкаруу, термелүү системалары, термелүү процесси, квадраттык функционал, максимум принциби, интервалдык белгисиздик, аналитикалык шарттар.*

В этой работе исследованы вопросы разрешимости задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при двумерном векторном управлении. Найдены достаточные условия однозначной разрешимости задачи оптимизации, и разработан алгоритм построения её решения со сколь угодной точностью. Предлагаемый метод её решения последовательно распространяется на задачи оптимизации проектных разработок в условиях априори фиксируемых внешних воздействий на объект; на комплексную проблему совместной оптимизации и далее на типичные ситуации оптимального проектирования распределённой системы в условиях интервальной неопределённости её параметрических характеристик и внешних возмущений. Развиваемый подход использует предварительную процедуру параметризации искомых решений, опирающуюся на известные аналитические условия оптимальности; последующую операцию точной редукции к специальным задачам математического программирования; альтернансные свойства их экстремалей, подобные известным результатам теории нелинейных чебышёвских приближений, и фундаментальные закономерности предметной области.

Ключевые слова: *двумерное векторное управления, колебательные системы, колебательные процессы, квадратичный функционал, принцип максимума, интервальная неопределённость, аналитические условия.*

In this paper, the solvability problems of the problem of nonlinear optimization of oscillatory processes with two-dimensional vector control are investigated. Sufficient conditions for the unique solvability of the optimization problem are found, and an algorithm for constructing its solution with arbitrary accuracy is developed. The proposed method of its solution consistently apply to the problem of optimizing the design in terms of a priori fixed by external influences on the object; on the complex problem of joint optimization further, for typical situations the optimal design of a distributed system in the interval of uncertainty of its parameters and external disturbances. The developed approach uses a preliminary parameterization procedure for the desired solutions based on known analytical optimality conditions; the subsequent operation of exact reduction to special problems of mathematical programming; the alternance properties of their extremals, similar to the known results of the theory of nonlinear Chebyshev approximations, and the fundamental laws of the subject area.

Key words: *two-dimensional vector control, oscillatory systems, oscillatory process, quadratic functional, maximum principle, interval uncertainty, analytical conditions.*

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J[u(t)]=\int_0^1\left[V(2,x)-(1+x)\right]^2dx+\beta\int_0^2\left(u_1^2(t)+u_2^2(t)\right)dt,\quad \beta>0 \quad , \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи [3]

$$V_{tt}=V_{xx}+g_0t^2x\left(e^{u_1^2(t)-4}+e^{u_2^2(t)-9}\right),\qquad 0<x<1,\ 0<t\le 2 \quad , \tag{2}$$

$$V(0,x)=x(1-x),\ V_t(0,x)=0\quad 0<x<1 \quad , \tag{3}$$

$$V_x(t,0)=0,\ V_x(t,1)+\alpha V(t,1)=0,\ 0<t\le 2,\ \alpha>0 \quad , \tag{4}$$

$\left(u_1(t),u_2(t)\right)\in H^2(0,2)=H(0,2)\times H(0,2)$ – вектор функция управления; H – гильбертово пространство.

Слабо обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса находим по формуле

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_n\cos\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\sin\lambda_n\tau g_n(\tau)\,f[\tau,u_1(\tau),u_2(\tau)]d\tau\right)z_n(x) \quad . \tag{5}$$

Вычислим численное значение следующих величин:

$$\lambda_n tg\lambda_n=\alpha$$

Таблица 1

λ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
Значение $\alpha=\left(\frac{1}{2}\right)$	0.653271	3.29231	6.36162	9.47749	12.606	15.7397	18.876	22.0139	25.1526	28.292
Значение λ_n^2	0.426763	10.8393	40.4702	89.8227	158.912	247.739	356.305	484.61	632.654	800.438

Таблица 2

λ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
Значение $\alpha=(1)$	0.860334	3.42562	6.4373	9.52933	12.6453	15.7713	18.9024	22.0365	25.1724	28.3096
Значение λ_n^2	0.740174	11.7349	41.4388	90.8082	159.903	248.733	357.301	485.607	633.652	801.436

$$\psi_n=\int_0^1 x(1-x)z_n(x)dx,\quad z_n(x)=\sqrt{\frac{2\left(\lambda_n^2+\alpha^2\right)}{\left(\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha\right)}}\cos\lambda_n x$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Таблица 3

ψ	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}
Значение $\alpha=\left(\frac{1}{2}\right)$	0.16589	-0.0131	-0.070889	-0.00019744	-0.02026	-2.5837e-005	-0.010763	-6.2759e-006	-0.0078062	-1.5734e-006
Значение ψ_n^2	0.02752	0.00017162	0.0050253	3.8982e-008	0.00041049	6.6755e-010	0.00011584	3.9386e-011	6.0936e-005	2.4756e-012

Таблица 4

ψ	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}
Значение $\alpha=(1)$	0.16603	-0.023679	-0.067823	-0.00042932	-0.020044	-5.8149e-005	-0.010719	-1.4758e-005	-0.0077933	-4.2572e-006
Значение ψ_n^2	0.027566	0.0005607	0.0045999	1.8432e-007	0.00040176	3.3813e-009	0.0001149	2.178e-010	6.0736e-005	1.8124e-011

$$g_n=\int_0^1 t^2 x z_n(x)dx, \quad z_n(x)=\sqrt{\frac{2\left(\lambda_n^2+\alpha^2\right)}{\left(\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha\right)}}\cos\lambda_n x$$

Таблица 5

g	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}
Значение $\left(\alpha=\frac{1}{2}\right)$	$0.47983t^2$	$-0.31863t^2$	$0.016614t^2$	-0.041082	0.0038272	-0.016315	0.0013537	-0.0097062	0.00045413	-0.0074403
Значение g_n^2	0.23024	0.10152	0.00027603	0.0016877	1.4647e-005	0.00026619	1.8326e-006	9.4211e-005	2.0624e-007	5.5358e-005

Таблица 6

g	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}
Значение $(\alpha=1)$	0.4625	-0.33998	0.03176	-0.047564	0.0075543	-0.018448	0.0026878	-0.010495	0.00090205	-0.0076283
Значение g_n^2	0.2139	0.11559	0.0010087	0.0022623	5.7068e-005	0.00034035	7.224e-006	0.00011015	8.137e-007	5.819e-005

$$\xi_n=\int_0^1 (1+x)z_n(x)dx, \quad z_n(x)=\sqrt{\frac{2\left(\lambda_n^2+\alpha^2\right)}{\left(\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha\right)}}\cos\lambda_n x$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Таблица 7

ξ	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}
Значение $\left(\alpha=\frac{1}{2}\right)$	1.4773	-0.3811	0.033339	-0.048326	0.0076624	-0.018551	0.0027094	-0.010522	0.00090904	-0.007637
Значение ξ_n^2	2.1824	0.14527	0.0011115	0.0023354	5.8712e-005	0.00034414	7.3406e-006	0.0001107	8.2635e-007	5.8324e-005

Таблица 8

ξ	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}
Значение $(\alpha=1)$	1.4549	-0.45028	0.063934	-0.061785	0.01514	-0.022886	0.005383	-0.012118	0.0018072	-0.0080189
Значение ξ_n^2	2.1168	0.20275	0.0040875	0.0038173	0.00022922	0.00052376	3.2659e-006	6.4302e-005	0.94594	0.94564

Условия, обеспечивающие монотонность функции $f[t,u_1(t),u_2(t)]$ выполняются, т.е.

$$\frac{\partial f[t,u_1(t),u_2(t)]}{\partial u_1(t)}=2u_1(t)e^{u_1^2(t)-4}\neq 0,\qquad \frac{\partial f[t,u_1(t),u_2(t)]}{\partial u_2(t)}=2u_2(t)e^{u_2^2(t)-9}\neq 0 \tag{6}$$

Функция принципа максимума имеет вид

$$\Pi[t,\omega(t,x),u(t)]=\int_0^1\omega(t,x)g(t,x)f\left[t,u_1(t),u_2(t)\right]dx-\beta\sum_{k=1}^{m}u_k^2(t)=$$

$$=\int_0^1\omega(t,x)g(t,x)dx\left(e^{u_1^2(t)-4}+e^{u_2^2(t)-9}\right)-\beta\sum_{k=1}^{2}u_k^2(t) \tag{7}$$

Первое условие оптимальности определяется следующими соотношениями

$$\int_0^1 g(t,x)\omega(t,x)dx\frac{\partial f\left[t,u_1(t),u_2(t)\right]}{\partial u_1}-2\beta u_1(t)=0$$

$$\int_0^1 g(t,x)\omega(t,x)dx\frac{\partial f\left[t,u_1(t),u_2(t)\right]}{\partial u_2}-2\beta u_2(t)=0,$$

или

$$\int_0^1 g(t,x)\omega(t,x)dx\left(2u_1(t)e^{u_1^2(t)-4}\right)-2\beta u_1(t)=0$$

$$\int_0^1 g(t,x)\omega(t,x)dx\left(2u_2(t)e^{u_2^2(t)-9}\right)-2\beta u_2(t)=0 \tag{8}$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$$f_{u_1}\left(\frac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_1}=\left(2u_1(t)e^{u_1^2(t)-4}\right)\left(\frac{u_1(t)}{\left(2u_1(t)e^{u_1^2(t)-4}\right)}\right)_{u_1}=$$

$$=\left(2u_1(t)e^{u_1^2(t)-4}\right)\left(\frac{e^{u_1^2(t)-4}}{2}\right)_{u_1}=\left(2u_1^2(t)e^{u_1^2(t)-4}\right)e^{u_1^2(t)-4}=2u_1^2(t)>0,$$

$$\begin{vmatrix}-2\beta f_{u_1}\left(\frac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_1} & -2\beta f_{u_1}\left(\frac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_2}\\ -2\beta f_{u_2}\left(\frac{u_2}{f_{u_2}}\right)_{u_1} & -2\beta f_{u_2}\left(\frac{u_2}{f_{u_2}}\right)_{u_2}\end{vmatrix}=(-2\beta)^2 f_{u_1}f_{u_2}\begin{vmatrix}\left(\frac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_1} & \left(\frac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_2}\\ \left(\frac{u_2}{f_{u_2}}\right)_{u_1} & \left(\frac{u_2}{f_{u_2}}\right)_{u_2}\end{vmatrix}=$$

$$=4\beta^2\begin{vmatrix}2u_1^2(t) & 0\\ 0 & 2u_2^2(t)\end{vmatrix}=16\beta^2u_1^2(t)u_2^2(t)>0, \tag{9}$$

где $\omega(t,x)$ определяется по формуле

$$\omega(t,x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_n\cos\lambda_n t+\int_0^T\sin\lambda_n(T-\tau)g_n(\tau)\,f\left[\tau,u_1(\tau),u_2(\tau)\right]d\tau-\xi_n\right]\times$$
$$\times\sin\lambda_n(T-t)z_n(x). \tag{10}$$

Теперь учитывая значение интеграла

$$\int_0^1 g(t,x)\omega(t,x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)\omega_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)\omega_n(t)$$

и условия (6),(10) первое условие оптимальности перепишем в виде

$$\beta e^{4-u_1^2(t)}=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)\omega_n(t)=$$
$$=-2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_n\cos\lambda_n t+\int_0^T\sin\lambda_n(T-\tau)g_n(\tau)\,f\left[\tau,u_1(\tau),u_2(\tau)\right]d\tau-\xi_n\right]\times$$
$$\times\sin\lambda_n(T-t)g_n(t)\beta e^{9-u_2^2(t)}=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)\omega_n(t)=$$
$$=-2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_n\cos\lambda_n t+\int_0^T\sin\lambda_n(T-\tau)g_n(\tau)\,f\left[\tau,u_1(\tau),u_2(\tau)\right]d\tau-\xi_n\right]\times$$
$$\times\sin\lambda_n(T-t)g_n(t). \tag{11}$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Поскольку, согласно (9), второе условие оптимальности выполняется для любых управлений $u_1(t)$ и $u_2(t)$, в частности и для оптимальных управлений $u_1^0(t)$ и $u_2^0(t)$, то векторное оптимальное управление $u^0(t)=\left(u_1^0(t),u_2^0(t)\right)$ определяется как решение системы нелинейных интегральных уравнений (11).

Литература:

1. Баетов А.К. Приближенное решение нелинейной задачи оптимального управления с распределенными параметрами [Текст] / А.К.Баетов,А.К. Керимбеков // Вестник КГУ им. И.Арабаева. - 2013. - С.252-258.
2. Керимбеков А. О разрешимости одной задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при минимизации квадратичного функционала [Текст] / А.Керимбеков, А.К.Баетов // Международная конференция. КГУСТА им. Н.Исанова, Бишкек, 2012. - С. 240-143.
3. Керимбеков А. О разрешимости одной задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов[Текст] /А. Керимбеков, А.К. Баетов // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий - аль-хорезмий 2012». - Ташкент, 2012. - С. 301-305.
4. Керимбеков А. О разрешимости одной задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов [Текст] / А.Керимбеков, А.К. Баетов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек, 2012. - Выпуск 44. - С.114-117
5. Краснов М.В. Интегральные уравнения [Текст] / М.В. Краснов. - М.: Наука, 1975. - 303 с.