

Саадабаев А., Солтонкулова Ж.М.

БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ ВОЛЬТЕРРДИН ИНТЕГРАЛДЫК  
ТЕҢДЕМЕСИНИН ЖАКЫНДАШТЫРЫЛГАН ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Саадабаев А., Солтонкулова Ж.М.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО  
УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

A. Saadabaev, J.M. Soltonkulova

APPROXIMATE SOLUTION OF THE INTEGRAL  
EQUATION VOLTERRA FIRST KIND

УДК: 517.968.72+74

Биринчи түрдөгү Вольтеррдин интегралдык теңдемесинин чыгарылышы корректүү эмес коюлган маселелерге жатат [1,2,3]. Биринчи түрдөгү Вольтеррдин интегралдык теңдемесинин чыгарылышы үчүн калыптандыруучу оператор, так чыгарылышы үзгүлтүксүз туундуга ээ деген шарттын негизинде [4,5] эмгектеринде тургузулган. Бул макалада биринчи түрдөгү Вольтеррдин интегралдык теңдемесинин чыгарылышы үчүн калыптандыруучу оператор тургузулган, качан так чыгарылышы дифференцирленбеген, башкача айтканда  $[0,1]$  сегментинде үзгүлтүксүз функция болгон учурда. Сызыктуу эмес теңдеме үчүн калыптандыруучу оператор [7]де тургузулган.  $C[0,1]$  – үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинин нормасы боюнча жакындаштырылган чыгарылыштын так чыгарылышка жыйналуусу далилденген. Жакындаштырылган жана так чыгарылыштын ортосундагы баалоо алынган.

**Негизги сөздөр:** интегралдык теңдеме, Вольтеррдин теңдемеси, сингулярдуу-козголуучу теңдеме, ядро, резольвента, биринчи түрдөгү теңдеме.

Решение интегрального уравнения первого рода Вольтерра принадлежит к некорректно поставленным задачам [1,2,3]. Регуляризирующий оператор для решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода построена в работах [4,5], при условии, что точное решение имеет непрерывную производную. В данной работе для решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода построена регуляризирующий оператор в случае, когда точное решение не дифференцируема, а является непрерывной функцией на сегменте  $[0,1]$ . Для нелинейного уравнения регуляризирующий оператор построен в [7]. Доказана сходимость приближенного решения к точному решению по норме пространства  $C[0,1]$  – непрерывных функций. Получена оценка между точным и приближенным решениям. Доказана скорость сходимости приближенного решения к точному решению по норме  $C[0,1]$ .

**Ключевые слова:** интегральное уравнение, уравнение Вольтерра, сингулярно-возмущенное уравнение, ядро, резольвента, уравнение первого рода.

Solving an integral equation of the first kind of Volterra belongs to incorrectly posed problems [1,2,3]. The regularizing operator for solving the Volterra integral equation of the first kind was constructed in [4, 5], provided that the exact solution has a continuous derivative. In this paper, for solving the Volterra integral equation of the first kind, a regularizing operator is constructed in the case when the exact solution is not differentiable, but is a continuous function on the  $[0,1]$  segment. For a nonlinear equation, the regularizing operator was constructed in [7]. The convergence of the approximate solution to the exact solution in the norm of the  $C[0,1]$  space of continuous functions is proved. The estimate between exact and approximate solutions is obtained. The rate of convergence of the approximate solution to the exact solution in the norm  $C[0,1]$  is proved.

**Key words:** integral equation, Volterra equation, singularly perturbed equation, core, resolvent, equation of the first kind.

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$\int_0^t K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0,1], \quad (1)$$

где  $K(t,s)$  – ядро интегрального уравнения, заданная функция,  $y(t)$  – известная функция,  $x(t)$  – искомая функция.

Предположим, что  $K(t,t) = a(t) > 0$ , на сегменте  $[0,1]$ .

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение второго рода

$$\varepsilon x_\varepsilon(t) + \int_0^t K(t,s)x_\varepsilon(s)ds = y(t). \quad (2)$$

Дифференцируя обе части (2) по  $t$ , получаем

$$\varepsilon x'_\varepsilon(t) + a(t)x_\varepsilon(t) + \int_0^t K_t(t,s)x_\varepsilon(s)ds = y'(t) \quad (3)$$

Полагая  $t = 0$  в обе части (2), получаем

$$x_\varepsilon(0) = \frac{y(0)}{\varepsilon}. \quad (4)$$

Пусть  $y(0) = 0$ , то решение уравнения (3) удовлетворяет условию  $x_\varepsilon(0) = 0$ .

Решение задачи (3), (4) представимо в виде [6]

$$x_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a(\tau) d\tau} \left( y'(s) - \int_0^s K_s(s,\tau)x(\tau) d\tau \right) ds.$$

Отсюда

$$x_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a(\tau) d\tau} y'(s) ds - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a(\tau) d\tau} \int_0^s K_s(s,\tau)x(\tau) d\tau ds \quad (5)$$

Заменяя порядок интегрирования во втором слагаемом в (5), получаем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a(\tau) d\tau} \int_0^s K_s(s,\tau)x(\tau) d\tau ds = \\ = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \left( \int_\tau^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a(\tau) d\tau} K_s(s,\tau) ds \right) x(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

Интегрируя по частям первом слагаемом и меняя порядок интегрирования во втором выражении, предыдущее уравнение (6) запишем в виде

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a(\tau) d\tau} y'(s) ds - \\ - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \left( \int_\tau^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a(\tau) d\tau} K_s(s,\tau) ds \right) x(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

Оценим ядро интегрального уравнения (7)

$$H(t, \tau, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_\tau^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a(\tau) d\tau} K_s(s,\tau) ds.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |H(t, \tau, \varepsilon)| &= \left| -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a(\tau) d\tau} K_s(s, \tau) ds \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \max_{0 \leq s, \tau \leq 1} |K_s(s, \tau)| \int_{\tau}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a d\tau} ds = \frac{1}{\varepsilon} K_1 \int_{\tau}^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)} ds = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} K_1 \frac{\varepsilon}{\alpha} \left( 1 - e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-\tau)} \right) \leq \frac{K_1}{\alpha}, \end{aligned}$$

где

$$K_1 = \max_{0 \leq s, \tau \leq 1} |K_s(s, \tau)|, \quad \alpha = \min_{0 \leq t \leq 1} a(t) > 0.$$

Таким образом, ядро интегрального уравнения (7) непрерывна по  $0 \leq t, \tau \leq 1$  и ограничена при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Тогда, уравнение (7) имеет единственное непрерывное решение.

Обозначим через  $R(t, \tau, \varepsilon)$  резольвента ядра  $H(t, \tau, \varepsilon)$ . В этом случае решение уравнения (7) представимо в виде

$$\begin{aligned} x_{\varepsilon}(t) &= \frac{1}{\varepsilon} y(t) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a(\tau) d\tau} y(s) ds + \\ &+ \int_0^t R(t, \tau, \varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon} y(\tau) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^{\tau} a(\tau) d\tau} y(s) ds \right) d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть функция  $x_0(t)$  является решение интегрального уравнения

$$\int_0^t K(t, s) x_0(s) ds \equiv y_0(t)$$

или дифференцируя по  $t$  обе части последнего уравнения, получаем

$$K(t, t) x_0(t) + \int_0^t K_t(t, s) x_0(s) ds \equiv y'(t). \quad (9)$$

Через  $R_0(t, s)$  обозначим резольвента ядра  $\frac{-K_t(t, s)}{a(t)}$ . Тогда решение уравнения (9) представимо в виде

$$x_0(t) = \frac{y'(t)}{a(t)} + \int_0^t R_0(t, s) \frac{y'(s)}{a(s)} ds.$$

Ядро интегрального уравнения (7), представимо в виде

$$\begin{aligned} H(t, \tau, \varepsilon) &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t K_s(s, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a(\tau) d\tau} ds = -\int_{\tau}^t \frac{K_s(s, \tau)}{a(s)} d e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a(\tau) d\tau} = \\ &= -\frac{K_t(t, \tau)}{a(t)} + \frac{K_{\tau}(\tau, \tau)}{a(\tau)} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t a(\tau) d\tau} + \int_{\tau}^t \left( \frac{K_s(s, \tau)}{a(s)} \right)_s e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a(\tau) d\tau} ds. \quad (10) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что резольвента ядра  $H(t, \tau, \varepsilon)$  представимо в виде

$$R(t, \tau, \varepsilon) = R_0(t, \tau) + R_1(t, \tau, \varepsilon), \text{ причем функция } R(t, \tau, \varepsilon) \text{ имеем оценку } |R(t, \tau, \varepsilon)| \leq c_1 e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-\tau)}$$

где  $c_1$  – постоянная зависящая от  $K(t, s), K_t(t, s), \alpha = \min_{0 \leq t \leq 1} a(t) > 0$ .

Решение (8) можно записать в виде

$$x_0(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a(\tau) d\tau} y'(s) ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t R(t, \tau, \varepsilon) \int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a(\tau) d\tau} y'(s) ds d\tau \quad (11)$$

Интегральное уравнение (7) используя (11) запишем в виде

$$\begin{aligned} x_{\varepsilon}(t) &= \frac{y'(t)}{a(t)} - \int_0^t \left( \frac{y(s)}{a(s)} \right)' e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a(\tau) d\tau} ds - \int_0^t \frac{K_{\tau}(t, \tau)}{a(t)} x_{\varepsilon}(\tau) d\tau + \\ &+ \left( \int_0^t \left( \frac{K_{\tau}(\tau, \tau)}{a(\tau)} \right) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t a(\tau) d\tau} + \int_{\tau}^t \left( \frac{K_s(s, \tau)}{a(s)} \right)_s e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a(\tau) d\tau} ds \right) x_{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (12) \end{aligned}$$

Через  $R(t, \tau)$  обозначим резольвента ядра  $\frac{K_t(t, \tau)}{a(t)}$ . Введем обозначение

$$H_0(t, \tau, \varepsilon) = \frac{K_{\tau}(\tau, \tau)}{a(\tau)} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t a(\tau) d\tau} + \int_{\tau}^t \left( \frac{K_s(s, \tau)}{a(s)} \right)_s e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a(\tau) d\tau} ds.$$

Справедлива оценка

$$|H_0(t, \tau, \varepsilon)| \leq K_0 e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-\tau)} + K_1 \varepsilon.$$

Решение уравнения (12) представимо в виде

$$\begin{aligned} x_{\varepsilon}(t) &= \frac{y'(t)}{a(t)} + \int_0^t R(t, \tau) \frac{y'(\tau)}{a(\tau)} d\tau - \int_0^t R(t, \tau) \int_0^{\tau} \left( \frac{y(s)}{a(s)} \right)' e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^{\tau} a(\tau) d\tau} ds d\tau + \\ &+ \int_0^t H_0(t, \tau, \varepsilon) x_{\varepsilon}(\tau) d\tau + \int_0^t R(t, \tau) \int_0^{\tau} H_0(\tau, s, \varepsilon) x_{\varepsilon}(s) ds d\tau \quad (13) \end{aligned}$$

Учитывая, что точное решение (5) представимо в виде

$$x_0(t) = \frac{y'(t)}{a(t)} + \int_0^t R(t, \tau) \frac{y'(\tau)}{a(\tau)} d\tau$$

предыдущее уравнение можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) = x_0(t) - \int_0^t R(t, \tau) \int_0^\tau \left( \frac{y(s)}{a(s)} \right)' e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^\tau a(\tau) d\tau} ds d\tau + \\ + \int_0^t \left( H_0(\tau, s, \varepsilon) + \int_\tau^t R(t, \tau) H_0(\tau, s, \varepsilon) d\tau \right) x_\varepsilon(s) ds \end{aligned} \quad (14)$$

Ядро интегрального уравнения (14) имеет оценку

$$|H_1(t, s, \varepsilon)| \leq |H_0(t, s, \varepsilon)| + |R(t, \tau)| |H_0(t, s, \varepsilon)| |t - \tau| \leq K_2 e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)} + \varepsilon K_3,$$

где  $K_2, R_0, K_3$  – известные постоянные зависящие от заданных функций.

Пусть  $R(t, s, \varepsilon)$  резольвента ядра  $H_1(t, s, \varepsilon)$ . Тогда решение уравнения (14) представимо в виде

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) = x_0(t) + \int_0^t R(t, \tau) \int_0^\tau \left( \frac{y(s)}{a(s)} \right)' e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^\tau a(\tau) d\tau} ds d\tau + \\ + \int_0^t R_1(t, s, \varepsilon) (y_\varepsilon(s, \tau) + x_0(s)) ds, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$y_\varepsilon(t, \tau) = \int_0^t R(t, \tau) \int_0^\tau \left( \frac{y(s)}{a(s)} \right)' e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^\tau a(\tau) d\tau} ds d\tau$$

причем

$$\begin{aligned} |y_\varepsilon(t, \tau)| &\leq R_0 \int_0^t y_0 \int_0^\tau e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(\tau-s)} ds d\tau = R_0 y_0 \int_0^t \frac{\varepsilon}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(\tau-s)} \Big|_{s=0}^{s=\tau} d\tau = \\ &= R_0 y_0 \frac{\varepsilon}{\alpha} \int_0^t \left( 1 - e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\tau} \right) d\tau \leq R_0 y_0 \frac{\varepsilon}{\alpha}. \end{aligned}$$

Учитывая эту оценку из (15), получаем оценку

$$|x_\varepsilon(t) - x_0(t)| \leq \varepsilon c_0, \quad (16)$$

где  $c_0$  некоторое постоянное зависящая от  $R_0, y_0, \alpha, K_3, K_2$ .

Из (16) следует, что решение уравнения (7) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  сходиться к точному решению уравнения первого рода (1) по норме пространства  $C[0,1]$ .

**Доказана.**

**Теорема.** Пусть выполнены условия:

- 1) правая часть  $y(t)$  удовлетворяет:  $y(0) = 0$  и имеет непрерывную производную  $y'(t)$  на сегменте  $[0,1]$ ,
- 2) ядро  $K(t,s)$  имеет непрерывную производную по аргументу  $t$  и  $K(t,t) > 0$ , на сегменте  $[0,1]$ .

Тогда решения уравнения (2) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  сходятся к точному решению уравнения (1), причем скорость сходимости удовлетворяет неравенству (16).

**Литература:**

1. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. - Новосибирск, СО АН СССР, 1962.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - Москва: Наука, 1982.
3. Саадабаев А. Об обобщенном интегральном уравнения Абеля I рода. В сб. Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Фрунзе, 1981.
4. Саадабаев А. Об обобщенном интегральном уравнении Абеля I рода. В сб., «Исследование по интегро-дифференциальным уравнениям». вып. 13. - Фрунзе, 1980.
5. Саадабаев А., Солтонкулова Ж.М. Асимптотика решения задачи Коши для нелинейных систем сингулярно-возмущенного в случае одного нулевого корня. Тезисы докладов Международной конференции посвященной 80-летию профессора Касымова К.К. - Алма-Ата, 2015. - 21 декабря.
6. Петровский И.Т. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - Москва: Наука, 1990.
7. Саадабаев А. Сходимость методы Ньютона в нелинейных некорректных задачах. / Известия вузов, №1-2. - Б., 2003.