DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Аблабеков Б.С., Муканбетова А.Т.

КИЧИ ПАРАМЕТРЛҮҮ ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕНДЕМЕ ҮЧҮН ЭКИНЧИ ТҮРДӨГҮ ЧЕКТИК МАСЕЛЕНИН ЧЫГАРЫМДУУЛУГУ ЖӨНҮНДӨ

Аблабеков Б.С., Муканбетова А.Т.

О РАЗРЕШИМОСТИ РЕШЕНИЙ ВТОРОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

B.S. Ablabekov, A.T. Mukanbetova

ON SOLVABILITY OF SOLUTIONS OF THE SECOND INITIAL-BOUNDARY PROBLEM FOR PSEUDOPARABOLIC EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER

УДК: 517.95

Математикалык физиканын тескери маселелерин изилдөөдө тиешелүү түз маселенин (биздин учурда экинчи түрдөгү чектик) айкын чыгарылышын жана анын касиеттерин билүү абдан зор ролду ойнойт. Макалада кичи параметрлүү псевдопараболалык тендеме үчүн экинчи түрдөгү чектик маселе каралган. Экинчи түрдөгү чектик маселесинин классикалык чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы тууралуу теорема далилденген. Чыгарылыштын жашашы жана жалгыздыгын далилдеш үчүн алгач, дүүлүккөн псевдопараболалык тендеме үчүн коюлган маселени эквиваленттүү маселеге өзгөртүп, андан кийин Фурьенин ыкмасы колдонулган. Чыгарылыш үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү мейкиндикте негизделген жана анын түзүлүшү катар түрүндө алынган. Мындан тышкары, кичи параметр нөлгө умтулганда псевдопараболалык тендеме үчүн экинчи түрдөгү чектик маселесинин чыгарылышы жылуулук өткөргүчтүн тендемеси үчүн тиешелүү маселенин чыгарылышына умтулушу көрсөтүлгөн.

Негизги сөздөр: *псевдопараболалык тендеме, экинчи түрдөгү чектик маселе, классикалык чыгарылыш, Фурьенин ыкмасы, кичи параметр.*

При исследовании обратных задач математической физики важную роль играет знание решений соответствующей прямой (в данном случае второй начально-краевой) задачи. В статье рассматривается вторая начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с малым параметром. Доказаны теоремы существования и единственности классического решения второй начально-краевой задачи. Для доказательства существования и единственности решения поставленной задачи сначала исходная задача преобразована к эквивалентной задаче, где начальные и граничные данные будет равны нулю. Затем применен метод Фурье. В пространстве непрерывно-дифференцируемых функций получено и обосновано решение и представлено в виде ряда. Показано сходимость решения начально-краевой задачи для возмущенного псевдопараболического уравнения к решению соответствующей задачи для уравнения теплопроводности, когда малый параметр стремится к нулю.

Ключевые слова: *псевдопараболическое уравнение, начально - краевая задача, классическое решение, метод Фурье, малый параметр.*

In the study of inverse problems of mathematical physics, an important role is played by the knowledge of the solutions of the corresponding direct (in this case, the second initial-boundary) problem. In this paper, we consider the second initial-boundary value problem for a pseudoparabolic equation with a small parameter. The theorems of existence and uniqueness of the classical solution of the second initial-boundary value problem are proved. To prove the existence and uniqueness of the solution of the problem posed, the original problem is first converted to an equivalent problem, where the initial and boundary data will be zero. Then applied the Fourier method. In the space of continuously differentiable functions, a solution is obtained, justified, and presented in the form of a series. The convergence of the solution of the initial-boundary problem for a perturbed pseudoparabolic equation to the solution of the corresponding problem for the heat equation, when a small parameter tends to zero, is shown.

Key words: *pseudoparabolic equation, boundary value problem, classic solution, Fourier method, small parameter.*

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Введение.

Многие прикладные задачи физики, механики, биологии сводятся к псевдопараболическим уравнениям, в частности вопросы фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах [4], передачи тепла в гетерогенной среде [4, 5], влагопереноса в почвы грунтах [6,10] приводят к псевдопараболическим уравнениям в частных производных третьего порядка.

D.Colton в работах [13, 14] изучая некорректную задачу Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем, ввел термин псевдопараболическое уравнение.

Локальные, нелокальные и смешанные краевые задачи для уравнений псевдопараболического типа исследовались в работах [1, 6, 11, 13-15].

Прямые и обратные задачи для псевдопараболических уравнений более подробно изучены в работе [1]. В работе [3] исследована разрешимость первой начально-краевой задачи для уравнения Буссинеска-Лява. В данной работе рассматривается вторая начально-краевая задача для псевдопараболического уравнения третьего порядка с малым параметром.

Постановка задачи и полученные результаты.

1. В области $\Omega_T = \{(x,t,)\,|\; 0 < x < l,\, 0 < t \le T\}$ рассмотрим вторую начально-краевую задачу для псевдопараболического уравнения с малым параметром

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$\left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)(0,t) = \varphi(t), \ \left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)(l,t) = \psi(t), \ 0 \le t \le T. \tag{3}$$

Здесь $\alpha > 0 -$ малый параметр.

Задача (1)-(3) является сингулярным возмущением второй начально-краевой задачи для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{4}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \varphi(t), \ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \psi(t), \ 0 \le t \le T. \tag{6}$$

Теорема 1. Пусть $u_0(x) \in C^2[0,l],\, \varphi(t) \in C^1[0,T],\, \psi(t) \in C^1[0,T]$, а также выполнены условия согласования $u_0^{'}(0) = \varphi(0)$, $u_0^{'}(l) = \psi(0)$. Тогда существует единственное решение задачи (1) -(3).

Доказательство. Заметим, что при выполнении условий согласования граничные условия (3) можно переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \mu_1(t), \ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \mu_2(t), \ 0 \le t \le T, \tag{7}$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

где

$$\mu_1(t)=\varphi(0)e^{-\frac{1}{\alpha}t}+\frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau, \qquad \mu_2(t)=\psi(0)e^{-\frac{1}{\alpha}t}+\frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}\psi(\tau)d\tau.$$

В силу линейности задачи (1)-(3), ее решение можно искать в виде

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t), \tag{8}$$

где v - новая неизвестная функция, а

$$w(x,t)=u_0(x)+x\left[\mu_1(t)-\mu_1(0)\right]+\frac{x^2}{2l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)+\mu_1(0)-\mu_2(0)\right].$$

Тогда функция $v(x,t)$ будет удовлетворять однородным граничным условиям

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,t)=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}(l,t)=0,\ 0\le t\le T,$$

и однородному начальному условию

$$v(x,0)=u_0(x)-u_0(x)-x\left[\mu_1(0)-\mu_1(0)\right]-\frac{x^2}{2l}[\mu_2(0)-\mu_1(0)+\mu_1(0)-\mu_2(0)]=0.$$

Так как уравнение (1) содержит малый параметр α, то решение задачи (1) -(3) зависит от этого параметра и далее обозначим его через $u_\alpha(x,t)$.

Итак, для доказательства теоремы однозначной разрешимости исходной задачи (1) -(3) достаточно доказать существование и единственность решения начально-краевой задачи относительно функции $u_\alpha(x,t)$:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial x^2\partial t}-\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2}=f_\alpha(x,t), \quad (x,t)\in\Omega_T, \tag{9}$$

$$u_\alpha(x,0)=0, \quad 0\le x\le l, \tag{10}$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}(0,t)=0,\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial x}(l,t)=0,\ 0\le t\le T, \tag{11}$$

где

$$f_\alpha(x,t)=u_0''(x)+\frac{1}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)+\mu_1(0)-\mu_2(0)\right]-x\mu_1'(t)-\left(\frac{x^2}{2l}+\frac{\alpha}{l}\right)\left[\mu_2'(t)-\mu_1'(t)\right].$$

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad X'(0)=X'(l)=0$$

соответствующую задаче (9)-(11). Собственные значения и собственные функции этой задачи имеют вид

$$\lambda_0=0,\ X_0(x)=1, \quad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{l},\ n\in\mathrm{N}.$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Решение задачи (9) - (11) будем искать в виде ряда по системе собственных функций $X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{l}x, \quad n=0,1,...,...$ задачи (9) -(11):

$$u_\alpha(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{l}xT_{\alpha n}(t), \tag{12}$$

где $T_{\alpha n}(t)$ - пока неизвестные функции.

Далее, как и в работе [8] разложим функцию $f_\alpha(x,t)$ на сегменте $[0,l]$ при каждом $t\in[0,T]$ в ряд Фурье по системе $X_n(x)$:

$$f(x,t)=\frac{f_0(t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{13}$$

где $f_{\alpha 0}(t)=\frac{1}{l}\int\limits_0^l f_\alpha(x,t)dx, \quad f_{\alpha n}(t)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f_\alpha(x,t)\cos(\frac{n\pi}{l}x)dx.$

Подставив ряды (12), (13) в (9) и преобразуя полученные выражения, имеем

$$T'_{\alpha 0}(t)=\frac{f_{\alpha 0}(t)}{2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\alpha(\frac{n\pi}{l})^2\right)T'_{\alpha n}(t)+(\frac{n\pi}{l})^2T_{\alpha n}(t)-f_{\alpha n}(t)\right\}\cos\frac{n\pi}{l}x=0.$$

Итак, учитывая начальное условие (10) для определения функции $T_{\alpha n}(t)$, получим систему:

$$\begin{cases} T'_{\alpha 0}(t)=\dfrac{f_{\alpha 0}(t)}{2}, \\ T_{\alpha 0}(0)=0, \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} T'_{\alpha n}(t)+\dfrac{l^2}{\left(l^2+\alpha(n\pi)^2\right)}\dfrac{(n\pi)^2}{l^2}T_{\alpha n}(t)=\dfrac{l^2}{\left(l^2+\alpha(n\pi)^2\right)}f_{\alpha n}(t), \\ T_{\alpha n}(0)=0. \end{cases} \tag{15}$$

Решая задачи (14) и (15), находим

$$T_{\alpha 0}(t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t f_{\alpha 0}(\tau)d\tau,$$

$$T_{\alpha n}(t)=\frac{l^2}{l^2+\alpha(n\pi)^2}\int\limits_0^t\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+\alpha(n\pi)^2}(t-\tau)\right)f_{\alpha n}(\tau)d\tau. \tag{16}$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Теперь найдем коэффициенты Фурье. Учитывая (8), (9), получим

$$f_{\alpha 0}(t)=\frac{1}{l}\int_0^l f_\alpha(x,t)dx=\frac{1}{l}\big(\psi(0)-\varphi(0)\big)(1-e^{-\frac{1}{\alpha}t})-\frac{1}{\alpha l}\int_0^t\big(\psi(\tau)-\varphi(\tau)\big)e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}d\tau-$$
$$-\frac{2}{\alpha l}\left(\varphi(t)-\frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau-\varphi(0)e^{-\frac{1}{\alpha}t}\right)+\left(\frac{l}{6}+\frac{\alpha}{l}\right)\times \qquad (17)$$
$$\times\tfrac{1}{\alpha}\left(\big(\psi(0)-\varphi(0)\big)e^{-\frac{1}{\alpha}t}-\left[\psi(t)-\varphi(t)\right]+\frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}\left[\psi(\tau)-\varphi(\tau)\right]d\tau\right),$$

$$f_{\alpha n}(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f_\alpha(x,t)\cos(\tfrac{n\pi}{l}x)dx=\frac{2}{l}\int_0^l u_0''(x)\cos(\tfrac{n\pi}{l}x)dx+$$
$$+\frac{2}{l^2}\int_0^l[\mu_2(t)-\mu_1(t)+\mu_1(0)-\mu_2(0)]\cos(\tfrac{n\pi}{l}x)dx+\frac{2}{l}\mu_1'(t)\int_0^l x\cos(\tfrac{n\pi}{l}x)dx$$
$$-\frac{2}{l}\left[\mu_2'(t)-\mu_1'(t)\right]\int_0^l\left(\frac{x^2}{2l}+\frac{\alpha}{l}\right)\cos(\tfrac{n\pi}{l}x)dx= \qquad (18)$$
$$=\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 u_{0n}+\frac{2}{l}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2(-1)^n\left[\psi(t)-\frac{1}{\alpha}\psi(0)e^{-\frac{1}{\alpha}t}-\frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}\psi(\tau)d\tau\right]-$$
$$-\frac{2}{l}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\left[\varphi(t)-\frac{1}{\alpha}\varphi(0)e^{-\frac{1}{\alpha}t}-\frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau\right],$$

где

$$u_{0n}=\frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Подставив выражения (16) в (12), имеем формальное решение задачи (9) -(11):

$$u_\alpha(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t f_{\alpha 0}(\tau)d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{l^2}{l^2+\alpha(n\pi)^2}\int_0^t\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2+\alpha(n\pi)^2}(t-\tau)\right)f_{\alpha n}(\tau)d\tau\right\}\cos\frac{n\pi}{l}x, \qquad (19)$$

где коэффициенты Фурье $f_{\alpha 0}(t)$, $f_{\alpha n}(t), n=1,2,...,...$ вычисляются по формулам (17), (18). Из условий теоремы следует, сходимость ряда (19), а также сходимость соответствующих производных $u_{\alpha t}(x,t), u_{\alpha xx}(x,t), u_{\alpha xxt}(x,t)$.

Найдем теперь решение начально-краевой задачи (4) -(6). Для задачи (4) -(6) справедлива.

Теорема 2. Пусть $u_0(x)\in C^2[0,l]$, $\varphi(t)\in C^1[0,T]$, $\psi(t)\in C^1[0,T]$, а также выполнены условия согласования $u_0'(0)=\varphi(0)$, $u_0'(l)=\psi(0)$. Тогда задача (4) -(6) имеет единственное

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

решение. Более того, решение возмущенной задачи (1) -(3) при $\alpha \to 0$ сходится к решению задачи (4) -(6), т.е. $\left\| u_\alpha(x,t) - u(x,t) \right\|_{C(\bar{\Omega}_T)} \underset{\alpha \to 0}{\to} 0$.

Доказательство. Сначала сведем задачу (4) -(6) к задаче с однородными граничными условиями, пологая

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \tag{20}$$

здесь $v(x,t)$ - новая неизвестная функция, а

$$w(x,t) = u_0(x) + x\left[\varphi(t) - \varphi(0)\right] + \frac{x^2}{2l}\left[\psi(t) - \varphi(t) + \varphi(0) - \psi(0)\right].$$

Тогда относительно неизвестной функции $v(x,t)$, получим следующую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{21}$$

$$v(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{22}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = 0, \ \frac{\partial v}{\partial x}(l,t) = 0, \ 0 \le t \le T, \tag{23}$$

где

$$f(x,t) = u_0''(x) + \frac{1}{l}\left[\psi(t) - \varphi(t) + \varphi(0) - \psi(0)\right] - x\varphi'(t) - \frac{x^2}{2l}\left[\psi'(t) - \varphi(t)\right].$$

Как известно [8], решение этой начально-краевой задачи имеет вид

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t f_0(\tau)d\tau + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^t \exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{l^2}(t-\tau)\right) f_n(\tau)d\tau\right\}\cos\frac{n\pi}{l}x. \tag{24}$$

Здесь

$$f_0(t) = \frac{1}{l}\int_0^l f(x,t)dx = \frac{1}{l}\left(\psi(t) - \varphi(t)\right) - \frac{l^2}{3}\varphi'(t) - \frac{l^2}{2}\psi'(t),$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\cos(\tfrac{n\pi}{l}x)dx = \frac{2}{l}\int_0^l u_0''(x)\cos(\tfrac{n\pi}{l}x)dx +$$

$$+\frac{2}{l^2}\int_0^l \left[\psi(t) - \varphi(t) + \varphi(0) - \psi(0)\right]\cos(\tfrac{n\pi}{l}x)dx + \frac{2}{l}\varphi'(t)\int_0^l x\cos(\tfrac{n\pi}{l}x)dx$$

$$-\frac{2}{l}\left[\psi'(t) - \varphi'(t)\right]\int_0^l \frac{x^2}{2l}\cos(\tfrac{n\pi}{l}x)dx = \frac{2}{l}\left((-1)^n u_0'(l) - u_0'(0)\right) - \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 u_{0n} -$$

$$-\frac{2}{l}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \varphi'(t) - \frac{(-1)^n l}{(n\pi)^2}\left[\psi'(t) + \varphi'(t)\right].$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$ в (19), получим решение задачи (21)-(23). Отсюда следует заключение теоремы 2. Теорема 2 доказана.

Литература:

1. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. - Бишкек: Илим, 2001. - 183 с.
2. Аблабеков Б.С. Метод полуобращения и существование решений начальной, начально-краевой задачи. / Республиканский научно-теоретический журнал «Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана», №4. – Бишкек, 1999. - С. 12-19.
3. Аблабеков Б.С., Касымалиева А.А. О разрешимости решений первой начально-краевой задачи для уравнения Буссинеска-Лява. / Республиканский научно-теоретический журнал «Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана», №2. - Бишкек, 2017. - С. 3-8.
4. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. / Прикладная математика и механика, 1960. - №25. - Вып. 5. - С. 852-864.
5. Дзекцер Е.С. Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах. - ДАН СССР, 1975. - Т. 220. - №3. - С. 540-543.
6. Макаова Р.Х. Первая краевая задача для неоднородного уравнения Аллера. / Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат.науки. 2016. №4-1(16). - С. 45-49.
7. Рубинштейн Л.И. К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах. / Известия АН СССР. Серия География, 1948. - Т.12. - №1. - С. 27-45.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.Н. Уравнения математической физики. - Москва: Наука, 1972. - 724 с.
9. Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах. / Дифференциальные уравнения, 1982. - Т.18. - №4. - С. 689-699.
10. Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. - М.: Наука, 1976. - 352 с.
11. Ting T., Cooling A. Process According to Two Temperature theory of heat conduction. // J. Math. Anal. Appl., 1974, 45, №9.
12. Hallaire M. L’eau et la production vegetable // Institute National de la Recherché Agronomique, 1964. - №9.
13. Colton D.L. Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Different. equations, 1972. - Vol. 12. - P. 559-565.
14. Colton D.L. Integral operators and the first initial-boundary value problems for pseudoparabolic equations with analytic coefficients // J. Different equations, 1973. - Vol.13. - P. 506-522.
15. Showalter R.E., Ting T. Pseudoparabolic partial differential equations. // Siam. J. Math. Anal, 1970. - Vol. 1. - P. 1-26.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Касымалиева А.А.