DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



*Аблабеков Б.С., Жороев А.К.*

# ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ГИПЕРБОЛАЛЫК ТЕНДЕМЕ ҮЧҮН КОШИ МАСЕЛЕСИ

*Аблабеков Б.С., Жороев А.К.*

# ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

*B.S. Ablabekov, A.K. Joroev*

# THE CAUCHY PROBLEM FOR THE HYPERBOLIC EQUATION OF THE THIRD ORDER

*УДК: 517.95*

*Математикалык физиканын тескери маселелерин изилдөөдө тиешелүү түз маселенин айкын чыгарылышын жана анын касиеттерин билүү зарыл. Макалада үчүнчү тартиптеги гиперболалык теңдеме үчүн Коши маселеси каралган. Берилген маселени чыгаруу үчүн классикалык Коши маселесинен ага тиешелүү жалпыланган Коши маселесине өтөбүз. Жалпыланган функциялардын мейкиндигинде жалпыланган чыгарылыштын жашашы жана жалгыздыгы далилденген. Коюлган маселенин жалпыланган чыгарылыштын жашашын жана жалгыздыгын далилдеш үчүн, каралып жаткан оператордун тургузулган фундаменталдык чыгарылышынын жардамы менен айкын чыгарылышын табууга мүмкүн болгон ыкма сунушталган. Андан кийин, берилген баштапкы шарттардагы функцияларга коюлган шарттардан жалпыланган чыгарылыштан классикалык чыгарылыш бөлүнүп алынган. Жалпыланган маселе менен классикалык маселенин байланышынан алгачкы маселенин классикалык чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы далилденген. Даламбердин формуласына түспөлдөш, маселенин айкын чыгарылышынын формуласы алынган.*

***Негизги сөздөр**: гиперболалык тендеме, Коши маселеси, жалпыланган чыгарылыш, классикалык чыгарылыш, фундаменталдык чыгарылыш.*

*Для исследования обратных задач математической физики необходимо знать явное решение и ее свойства соответствующей прямой задачи. В статье рассматривается задача Коши для гиперболического уравнения третьего порядка. При решении исходной задачи осуществляется переход от классической задачи Коши к обобщенной задаче Коши. В пространстве обобщенных функций доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи. Для доказательства существования и единственности обобщенного решения поставленной задачи предложен метод, позволяющий найти явное решение с помощью построенных фундаментальных решений рассматриваемого оператора. Затем для заданных начальных функций требуя достаточные условия гладкости из обобщенных решений выделено классические решение исходной задачи. Пользуясь связью классической и обобщенной задачи Коши, доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи. Получено явное решение рассматриваемой задачи, аналогичное формуле Даламбера.*

***Ключевые слова**: гиперболическое уравнение, Задача Коши, обобщенное решение, классическое решение, фундаментальное решение.*

*To study inverse problems of mathematical physics, it is necessary to know the explicit solution and properties of the corresponding direct problem. The article deals with the Cauchy problem for a third-order hyperbolic equation. When solving the original problem, a transition is made from the classical Cauchy problem to the generalized Cauchy problem. In the space of generalized functions, the existence and uniqueness of a generalized solution of the problem are proved. In order to prove the existence and uniqueness of the generalized solution of the problem posed, a method is proposed that allows one to find an explicit solution using the constructed fundamental solutions of the considered operator. Then for the given initial functions requiring sufficient smoothness conditions from the generalized solutions, we single out the classical solution of the original problem. Using equivalence, we prove the existence and uniqueness of the classical solution of the original problem. An explicit solution was obtained for the problem under consideration, analogous to the d'Alembert formula.*

***Key words:** hyperbolic equation, Cauchy problem, classic solution, classical solution, fundamental solution.*

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



**Киришүү.** Бул макалада үчүнчү тартиптеги гиперболалык теңдеме үчүн Коши маселесинин классикалык чыгарылышы жашаары жана жалгыз экендиги жөнүндө суроо каралган. Гиперболалык тендеме көптөгөн физикалык кубулуштардын жана процесстердин математикалык модели болуп эсептелинет. Тескери маселелерди изилдөөдө, алгач тиешелүү түз маселелердин чыгарылышынын жашашы, жалгыздыгы жөнүндө маалыматтарды, алардын кандай касиеттерге ээ болоорун билүү зарыл экендиги белгилүү [1].

**1. Маселенин коюлушу**. $Q_T$ областында

$$Lu=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=f(x,t) \tag{1}$$

гиперболалык теңдемеси үчүн

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad u_{tt}(x,0)=u_2(x),\quad x\in R. \tag{2}$$

баштапкы шарттарын канаттандырган Коши маселесин карайлы.

Мында $f(x,t)\in D'(Q_T),\quad u_i(x)\in D'(R),\quad i=0,1,2.$ шарттарын канааттандырсын деп эсептейли.

Белгилей кетсек, үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык тендеме үчүн Коши маселесинин айкын чыгарылышы [1-2] иштеринде тескери маселени изилдеген учурунда алынган. Ал эми үчүнчү тартиптеги гиперболалык тендеме үчүн Коши маселесинин классикалык чыгарылышы биринчи жолу мүнөздөгүчтөр ыкмасынын жардамы менен [3] макаласында, [4] эмгектеринде ал чыгарылыш түз жана тескери маселелерди изилдеш үчүн пайдаланылган. Төмөндөгү

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\rho\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=0$$

тендеме дисперсиялуу чөйрөдө сызыктуу акустикалык толкундарды таратуу процессинин математикалык модели болуп эсептелинет, мында $\rho\in(0,1)$ - сандык параметр [5]. Бул иште, маселенин чыгарылышын тиешелүү оператордун фундаменталдык чыгарылышынын жардамы менен табабыз.

**2.** $Lu=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)$ операторунун фундаменталдык чыгарылышы.

**1-аныктама.** Жалпыланган $E(x,t)$ функциясы $L$ оператору үчүн Коши маселесинин фундаменталдык чыгарылышы ([4]) деп аталат, эгерде ал төмөнкү барабардыктарды канаттандырса

$$LE(x,t)=\delta(x,t),\quad (x,t)\in R^2,\quad E\big|_{t<0}\equiv 0. \tag{3}$$

**1-теорема.** $L$ операторунун фундаменталдык чыгарылышы төмөнкү түргө ээ

$$E(x,t)=\frac{1}{2}\theta\left(t-|x|\right)+\frac{\left(t+|x|\right)}{2}\theta\left(t-|x|\right). \tag{4}$$

**Далилдөө.** (1) барабардыгына Фурьенин өзгөртүүсүн $F_x$ колдонуп,

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



$$\left(\frac{d}{dt}-i\xi\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}+\xi^2\right)\tilde{E}(\xi,t)=\delta(t).$$

туюнтмасын алабыз.

$\left(\frac{d}{dt}-i\xi\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}+\xi^2\right)$ операторунун фундаменталдык чыгарылышы [1] ,

$\tilde{E}(\xi,t)=\theta(t)Z(\xi,t)$ ,

туюнтмасына барабар, мында $Z(\xi,t)$

$$\left(\frac{d}{dt}-i\xi\right)^2\left(\frac{d}{dt}+i\xi\right)Z(\xi,t)=0,\quad Z(\xi,0)=Z_t(\xi,0)=0,\quad Z_{tt}(\xi,0)=1 \tag{5}$$

маселесинин чыгарылышы. (5) маселесинин жалпы чыгарылышынан

$$Z(\xi,t)=(C_1+C_2t)e^{i\xi t}+C_3e^{-i\xi t},$$

баштапкы шарттарды колдонуп,

$$Z(\xi,t)=\frac{i}{2\xi^2}\sin\xi t+\frac{it}{2\xi}e^{-i\xi t}$$

анын жекече чыгарылышын алабыз.

Демек, фундаменталдык чыгарылыш

$$\tilde{E}(\xi,t)=\theta(t)\left[\frac{i\sin\xi t}{2\xi^2}+\frac{it}{2\xi}e^{-i\xi t}\right]$$

туюнтмасы менен аныкталарына ээ болдук.

Мындан, Фурьенин тескери өзгөртүүсүн $F_\xi^{-1}$, колдонуп жана төмөнкүлөрдү эске алып [6],

$$F_\xi^{-1}\left[\frac{\sin\xi t}{\xi}\right]=\frac{1}{2}\theta\left(t-|x|\right),\ F_\xi^{-1}\left[\frac{\sin\xi t}{\xi^2}\right]=F_\xi^{-1}\int_0^t\left[\frac{cos\xi\tau}{\xi}\right]d\tau=\left(t+|x|\right),$$

(4) туюнтмасын алабыз. 1-теорема далилденди.

**2. Коши маселесинин жалпыланган чыгарылышы**

Эми биз (1),(2) маселесин жалпыланган функциялардын терминдеринде формулировкаланган жалпыланган Коши маселесине алмаштыралы. Ал төмөнкүчө формулировкаланат:

$$L_1\tilde{u}\ (x,t)=f(x,t)\theta(t)+\delta(t)[u_2(x)+u_1(x)-u_0''(x)] \tag{3}$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



$$\tilde{u}\,\Big|_{t<0} \equiv 0. \qquad (4)$$

шарттарын канааттандырган $\tilde{u}(x,t) \in D'$ жалпыланган функциясын табуу керек.

(1),(2) жана (3),(4) маселелеринин ортосундагы байланыш төмөнкү лемма аркылуу берилет.

**1-ЛЕММА.** Мейли $u(x,t)$ (1), (2) маселесинин чыгарылышы болсун. Анда

$$\tilde{u}\,(x,t) = \theta(t)u(x,t) \qquad (5)$$

функциясы (3),(4) маселесинин чыгарылышы болот.

**Далилдөө.** (5) барабардыгын жана $\theta(t)$, $\delta(t)$ функцияларынын касиеттерин пайдаланып

$$\tilde{u}_t = \theta(t)u_t(x,t) + u_0(x)\delta(t),$$

$$\tilde{u}_{tt} = \theta(t)u_{tt}(x,t) + \delta(t)u_1(x) + \delta'(t)u_0(x),$$

$$\tilde{u}_{ttt} = \theta(t)u_{ttt}(x,t) + \delta(t)u_2(x) + \delta'(t)u_1(x) + \delta''(t)u_0(x),$$

$$\tilde{u}_{xx} = \theta(t)u_{xx}(x,t),$$

$$\tilde{u}_{ttx}(x,t) = \theta(t)u_{ttx}(x,t) + \delta(t)u_1'(x) + \delta'(t)u_0''(x),$$

$\tilde{u}_{txx}(x,t) = \theta(t)u_{txx}(x,t) + \delta(t)u_0''(x), \quad \tilde{u}_{xxx}(x,t) = \theta(t)u_{xxx}(x,t)$ туундуларын табабыз.

Мындан

$$L\tilde{u}(x,t) = \theta(t)Lu(x,t) + \delta(t)[u_2(x) + u_1'(x) - u_0''(x)] + \delta'(t)[u_1(x) + u_0''(x)] + \delta''(t)u_0(x) =$$
$$= \theta(t)f(x,t) + \delta(t)[u_2(x) + u_1'(x) - u_0''(x)] + \delta'(t)[u_1(x) + u_0''(x)] + \delta''(t)u_0(x)$$

туюнтмасын алабыз. (4) барабардыгы (5) барабардыгынан түздөн-түз келип чыгат.

1-лемма далилденди.

**2-теорема.** (3), (4) жалпыланган Коши маселесинин чыгарылышы

$$\tilde{u}(x,t) = \iint\limits_{R^2} E(x-\xi,t-\tau)\theta(t)\,f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau + \int\limits_R E(x-\xi,t)\Big[u_2(\xi) + u_1(\xi) - u_0''(\xi)\Big]d\xi +$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_R E(x-\xi,t)\Big[u_1(\xi) + u_0'(\xi)\Big]d\xi + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_R E(x-\xi,t)u_0(\xi)d\xi \qquad (6)$$

формуласы менен берилет, мында $E(x,t)$ функциясы $L$ операторунун фундаменталдык чыгарылышы.

**Далилдөө.** (3),(4) Коши маселесинин чыгарылышы

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



$$\tilde{u}(x,t) = E(x,t) * [f(x,t)\theta(t) + \delta(t)[u_2(x) + u_1(x) - u_0''(x)] +$$
$$+\delta'(t)[u_1(x) + u_0'(x)] + \delta''(t)u_0(x)] = \int_{R^2} E(x-\xi, t-\tau)\theta(\tau) f(\xi,\tau)d\xi d\tau +$$
$$+\int_R E(x-,t)(u_2(\xi) + u_1(\xi) - u_0''(\xi))d\xi + \frac{\partial}{\partial t}\int_R E(x-,t)(u_1(\xi) + u_0'(\xi))d\xi + \tag{7}$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_R E(x-,t)u_0(\xi)d\xi$$

формуласы менен туюндурулат.

(5) формуласынан $\tilde{u}\ (x,t) = u(x,t)\quad t > 0$ болгондугун эске алсак, акыркы туюнтмадан (6) формуласы келип чыгат. 2-теорема далилденди.

**3-теорема.** (3), (4) Коши маселесинин жалпыланган чыгарылышы үчүн

$$u(x,t) = \frac{1}{4}u_0(x+t) + \frac{3}{4}u_0(x-t) + \frac{t}{2}u'_0(x-t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(s)ds +$$
$$+\frac{1}{4}\int_{x-t}^{x+t}(x+t-s)u_2(s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}(x-s+t-\tau) f(s,\tau)dsd\tau \tag{8}$$

формуласы орун алат.

**Далилдөө.** (8) формуласын алыш үчүн $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$ операторунун фундаменталдык чыгарылышын колдонобуз.

Төмөнкү потенциалдарды киргизели:

$$V^{(0)} = E(x,t) * \{[u_2(x) + u_1(x) - u_0''(x)] \times \delta(t)\},$$
$$V^{(1)} = E(x,t) * [(u_1(x) + u_0'(x)) \times \delta'(t)], \tag{9}$$
$$V^{(2)} = E(x,t) * [u_0(x) \times \delta''(t)],$$
$$V^{(3)} = E(x,t) * [f(x,t)\theta(t)],$$

мында *- свертканын белгиси, ×- жалпыланган функциялардын түз көбөйтүндүсү, $u_i$, $i = 0,1,2$ – $D'(R^2)$ классындагы жалпыланган функциялар.

Анда (3), (4) маселесинин чыгарылышын $u = V^{(0)} + V^{(1)} + V^{(2)} + V^{(3)}$. түрүндө көрсөтүүгө болот.

$V^{(0)}, V^{(1)}, V^{(2)}$ и $V^{(3)}$ үчүн сверткаларын эсептеп, (8) формуласын алууга болот. (9) формуласынан $u(x,t)$ жалпыланган функциясы $D'(R^2)$ мейкиндигинде $t \to +0$ (4) баштапкы шарттарын канаттандыргандыгына ээ болобуз.

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



**3. Коши маселесинин классикалык чыгарылышы.**

Бул пунктта жалпыланган чыгарылыштан кантип классикалык чыгарылышты бөлүп аларыбызды көрсөтөбүз.

**2-аныктама.** (1),(2) Коши маселесинин классикалык чыгарылышы деп (1) тендемесиндеги бардык үзгүлтүксүз туундуларына ээ болгон жана (1),(2) шарттарын канааттандырган $u(x,t)$ функциясын айтабыз.

Төмөнкү теорема орун алат.

**4-теорема**. Мейли $u_0 \in C^3(R), \quad u_1 \in C^2(R), \; u_2 \in C^1(R), \; f \in C(\bar{Q}_T)$.

Анда (1), (2) Коши маселесинин жалгыз классикалык чыгарылышы жашайт жана ал чыгарылыш төмөнкү формула менен берилет

$$u(x,t) = \frac{1}{4}u_0(x+t) + \frac{3}{4}u_0(x-t) + \frac{t}{2}u'_0(x-t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(s)ds + \\ + \frac{1}{4}\int_{x-t}^{x+t}(x+t-s)u_2(s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}(x-s+t-\tau)f(s,\tau)dsd\tau. \tag{10}$$

**Далилдөө.** (9) потенциалдарын түздөн-түз эсептегенден кийин (8) формуласына ээ болобуз. (1),(2) маселесинин берилген функциялары $u_0 \in C^3(R), \quad u_1 \in C^2(R), \quad u_2 \in C^1(R), \quad f \in C(\bar{Q}_T)$ шарттарын канааттандыргандыгынан (8) формуласын түздөн-түз дифференцирлеп (1),(2) Коши маселесинин классикалык чыгарылышы болооруна ээ болобуз.

Мындан тышкары, бул чыгарылыш баштапкы $u_i, \quad i = 0,1,2$ функцияларынан үзгүлтүксүз көз каранды.

Демек, (1), (2) Коши маселеси корректүү коюлган маселе, ал эми $C^3(Q_T) \bigcap C^1(\bar{Q}_T)$ - (1),(2) классикалык Коши маселеси үчүн корректүүлүк классы жана $D'(R^2)$ - жалпыланган Коши маселеси үчүн корректүүлүк классы.

**Адабияттар:**


1. Аблабеков Б.С. Метод полуобращения и существование решений начальной, начально-краевой задачи. / Республиканский научно-теоретический журнал «Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана», №4. - Бишкек, 1999. - С. 12-19.
2. Аблабеков Б.С., Осмонова Н.О. О задаче Коши для одного гиперболического уравнения третьего порядка. // Вестник КГНУ. Серия ЕТН. - 1998. - Вып.1. - С. 199-203.
3. Аблабеков Б.С., Байсеркеева А.Б. Явное решение задачи Коши для двумерного псевдопараболического уравнения. / Республиканский научно-теоретический журнал «Известия вузов Кыргызстана, №10. - Бишкек, 2015. - С. 3-7.
4. Аблабеков Б.С. Элементы прикладной математики (обобщенные функции и их приложение). / Учебное пособие. - Бишкек: Maxprint, 2017. - 225 с.
5. Руденко О.В., Солуян С.Н. Теоретические основы нелинейной механики. - Москва, 1975.
6. Яхно В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. - Новосибирск: Наука, 1990. - 301 с.


**Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Касымалиева А.А.**