DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Чекеев А.А., Абдраимова М.А., Касымова А.Б., Бекболот кызы А.

БИР КАЛЫПТУУ ЖЕТИК ЧАГЫЛДЫРУУЛАРДЫН МҮНӨЗДӨМӨСҮ ЖӨНҮНДӨ

Чекеев А.А., Абдраимова М.А., Касымова А.Б., Бекболот кызы А.

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ РАВНОМЕРНО СОВЕРШЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

A.A. Chekeev, M.A. Abdraimova, A.B. Kasymova, Bekbolot kyzy A.

ON CHARACTERIZATION OF UNIFORMLY PERFECT MAPPINGS

УДК: 515.12

Белгилүү болгондой, функционалдык анализдин негизги принциптеры болуп туюк график жөнүндөгү теорема, ачык чагылдыруу жөнүндөгү теорема жана бир калыпта чектелгендик принциби эсептелинет. «Туюк график жөнүндө» теоремасынын мазмуну болуп Банах мейкиндиктеринин сызыктуу чагылдыруусунун үзгүлтүксүз болушунун зарыл жана жетиштүү шарты бул чагылдыруунун графиги берилген Банах мейкиндиктеринин көбөйтүндүсүндө туюк көптүк болушу болуп эсептелинет. Бул теорема ар тараптуу топологиялык жалпылоолорго ээ болгон жана аларда эң маанилүү касиет болуп Хаусдорфдук топологиялык мейкиндиктердин үзгүлтүксүз чагылдыруусу туюк графикке ээ болушу жана прообраз ар дайым графикке гомеоморфтуу болушу касиеттери орун алышы болгон. Бул макалада бир калыптуу мейкиндиктеринин бир калыптуу чыгылдыруусу үчүн прообраз графикке бир калыпта гомеоморфтуулугун зарыл жана жетиштүү шарты далилденет. Бул жыйынтыктын негизинде чагылдыруулардын графигин пайдаланып бир калыпта жетик чагылдыруулардын мүнөздөмөсү алынды.

Негизги сөздөр: *үзгүлтүксүз чагылдыруу, бир калыпта үзгүлтүксүз чагылдыруу, жетик чагылдыруу, бир калыпта жетик чагылдыруу, чагылдыруунун графиги, гомеоморфизм, бир калыптуу гомеоморфизм, Самюэль компактификациясы, бир калыптуулуктардын көбөтүндүсү.*

Известно, что основными принципами функционального анализа являются теорема о замкнутом графике, теорема об открытом отображении и принцип равномерной ограниченности. Содержание теоремы «о замкнутом графике» является то, что линейное отображение между Банаховыми пространствами непрерывно тогда и только тогда, когда график этого отображения является замкнутым подпространством произведения исходных Банаховых пространств. Эта теорема получила различные топологические обобщения и одним из важных свойств явилось то, что непрерывное отображение Хаусдорфовых топологических пространств имеет замкнутый график и прообраз всегда гомеоморфен графику. В данной статье доказано необходимое и достаточное условие, когда для равномерного непрерывного отображения равномерных пространств прообраз равномерно гомеоморфен графику отображения. С помощью этого результата посредством графика отображений получена характеристика равномерно совершенных отображений.

Ключевые слова: *непрерывное отображение, равномерно непрерывное отображение, совершенное отображение, равномерно совершенные отображения, график отображения, гомеоморфизм, равномерный гомеоморфизм, Самюэлевская компактификация, произведение равномерностей.*

It is known, the basic principles of functional analysis are the theorem on a closed graph, the theorem on open mapping and the uniform boundedness principle. The content of the "closed graph" theorem is a linear mapping between Banach spaces is continuous if and only if the graph of this mapping is a closed subspace of the product of the original Banach spaces. This theorem has various topological generalizations and one of the important properties is the continuous mapping of Hausdorff topological spaces has a closed graph and the preimage is always homeomorphic to the graph. In this paper, a necessary and sufficient condition is proved, when for a uniform continuous mapping of uniform spaces, the preimage is uniformly homeomorphic to the mapping graphics. Using this result, a characterization of uniformly perfect mappings is obtained by means of a graph of mappings.

Key words: *continuous mapping, uniformly continuous mapping, perfect mapping, uniformly perfect mappings, mapping graph, homeomorphism, uniform homeomorphism, Samuel compactification, product of uniformities.*

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

1. Введение и предварительные сведения.

Непрерывное отображение в Хаусдорфово пространстве всегда имеет замкнутый, в произведении прообраза и образа, график. Обратное не всегда верно. Однако для линейных отображений Банаховых пространств замкнутость графика равносильна непрерывности. Этот результат является одним из основных принципов функционального анализа.

Для непрерывных отображений хаусдорфовых топологических пространств прообраз всегда гомеоморфен графику отображения. Для равномерно непрерывных отображений равномерных пространств для формулировки и доказательства аналогичного утверждения требуется дополнительное условие на отображение.

Всюду для равномерных пространств будем придерживаться обозначений из книги [1]. Информация о топологических пространствах из книги [2].

Пусть $f:(X,\mathrm{U})\to(Y,\mathrm{V})$ - равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V). Через $\Gamma_f=\{(x,f(x)):x\in X\}$ обозначим *график* отображения f. Ясно, что $\Gamma_f\subseteq X\times Y$.

Если (X,U) и (Y,V) - равномерные пространства, то $\mathrm{U}\times\mathrm{V}$ обозначает произведение равномерностей U и V на произведении $X\times Y$, $\mathrm{U}\times\mathrm{V}|_{\Gamma_f}$ - сужение равномерности $\mathrm{U}\times\mathrm{V}$ на график Γ_f. Если α и β - семейства множеств, то $\alpha\wedge\beta=\{A\cap B:A\in\alpha,B\in\beta\}$, $\alpha\times\beta=\{A\times B:A\in\alpha,B\in\beta\}$.

Пусть F - подмножество X и $f:X\to Y$ - отображение. Тогда $f|_F:F\to f(F)$ - сужение отображении f и $\mathrm{U}|_F$ сужены равномерности U на F в X.

Определение 1.1. [1]. Равномерно непрерывное отображение $f:(X,\mathrm{U})\to(Y,\mathrm{V})$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) называется *равномерно совершенным*, если оно предкомпактно и совершенно.

Предложение 1.2. [1]. *Если* (B,U) *- бикомпактное равномерное пространство, тогда естественная проекция* $\pi_Y:(B\times Y,\mathrm{U}\times\mathrm{V})\to(Y,\mathrm{V})$ *является равномерно совершенным отображением для любого равномерного пространства* (Y,V).

Предложение 1.3. [1]. *Если* $f:(X,\mathrm{U})\to(Y,\mathrm{V})$ *- равномерно совершенное отображение равномерного пространства* (X,U) *в равномерное пространство* (Y,V) *и* $F\subset X$ *- замкнутое подпространство. Тогда отображение сужения* $g=f|_F:(F,\mathrm{U}|_F)\to(Y,\mathrm{V})$ *также равномерно совершенно.*

Для равномерного пространства (X,U) через $(sX,s\mathrm{U})$ обозначается Самюэлевская компактификация [1, 2].

2. Основные результаты.

Теорема 2.1. *Для отображения* $f:(X,\mathrm{U})\to(Y,\mathrm{V})$ *равномерное пространство* (X,U) *равномерно гомеоморфно пространству* $\left(\Gamma_f,\mathrm{U}\times\mathrm{V}|_{\Gamma_f}\right)$ *как подпространству произведения* $(X\times Y,\mathrm{U}\times\mathrm{V})$ *тогда и только тогда, когда для любого равномерного покрытия* $\alpha\in\mathrm{U}$ *найдутся равномерные покрытия* $\beta\in\mathrm{V}$ *и* $\gamma\in\mathrm{U}$ *такие, что покрытие* $f^{-1}(\beta)\wedge\gamma$ *вписано в* α.

Доказательство. Пусть существует равномерный гомеоморфизм $\psi:(\Gamma_f,\mathrm{U}\times\mathrm{V}|_{\Gamma_f})\to(X,\mathrm{U})$. Тогда $\psi=f^{-1}\circ P_Y$, где $P_Y:(X\times Y,\mathrm{U}\times\mathrm{V})\to(Y,\mathrm{V})$ -естественная проекция. Следовательно, для любого $\alpha\in\mathrm{U}$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

существуют покрытия $\beta \in \mathrm{V}$ и $\gamma \in \mathrm{U}$ такие, что покрытие γ вписано в покрытие $\alpha \in \mathrm{U}$ и покрытие $\psi(\gamma \times \beta \wedge \Gamma_f)$ вписано в покрытие α.

Тогда $\psi(\gamma \times \beta \wedge \Gamma_f) = (f^{-1} \circ P_Y)(\gamma \times \beta \wedge \Gamma_f) = f^{-1}(P_Y(\gamma \times \beta \wedge \Gamma_f)) = f^{-1}(\beta)$ вписано в покрытие α. Итак, мы имеем, γ вписано в α и $f^{-1}(\beta)$ вписано в α, т.е. $f^{-1}(\beta) \wedge \gamma$ вписано в α.

Обратно, пусть выполнено условие теоремы. Покажем, что естественная биекция $\varphi : (X, \mathrm{U}) \to (\Gamma_f, \mathrm{U} \times \mathrm{V}|_{\Gamma_f})$, где $\varphi(x) = (x, f(x))$ для любого $x \in X$, является равномерным гомеоморфизмом.

Пусть $\alpha \in \mathrm{U}$ и $\beta \in \mathrm{V}$ произвольны и $\gamma \in \mathrm{U}$ таково, что γ вписано в α и $f(\gamma)$ вписано в β. Тогда $\varphi(\gamma) = \{\Gamma \times f(\Gamma) : \Gamma \in \gamma\}$ вписано в $\alpha \times \beta = \{A \times B : A \in \alpha, B \in \beta\}$. Итак, отображение $\varphi : (X, \mathrm{U}) \to (\Gamma_f, \mathrm{U} \times \mathrm{V}|_{\Gamma_f})$ -равномерно непрерывно. Покажем равномерную непрерывность обратного отображения $\varphi^{-1} : (\Gamma_f, \mathrm{U} \times \mathrm{V}|_{\Gamma_f}) \to (X, \mathrm{V})$.

По условию для любого $\alpha \in \mathrm{U}$ существуют покрытия $\beta \in \mathrm{V}$ и $\gamma \in \mathrm{U}$ такие, что $f^{-1}(\beta) \wedge \gamma$ вписано в α. Покажем, что $\varphi^{-1}(\gamma \times \beta)$ вписано в α. Действительно, для любого $\Gamma \in \gamma$ и $B \in \beta$ существует $A_{B\Gamma} \in \alpha$ такое, что $f^{-1}(B) \cap \Gamma \subset A_{B\Gamma}$. Покажем, что $\varphi^{-1}(\Gamma \times B) \subset A_{B\Gamma}$. Пусть $x \in \varphi^{-1}(\Gamma \times B)$ -произвольная точка. Тогда $(x, f(x)) \in \Gamma \times B$, где $x \in \Gamma$ и $f(x) \in B$. Имеем $x \in \Gamma$ и $x \in f^{-1}(f(x)) \subseteq f^{-1}(B)$. По условию, $f^{-1}(B) \cap \Gamma \subseteq A_{B\Gamma}$, следовательно, $x \in A_{B\Gamma}$. Итак, $\varphi^{-1}(\Gamma \times B) \subset A_{B\Gamma}$ и покрытие $\varphi^{-1}(\gamma \times \beta)$ вписано в α, а отображение $\varphi^{-1} : (\Gamma_f, \mathrm{U} \times \mathrm{V}|_{\Gamma_f}) \to (X, \mathrm{U})$ равномерно непрерывно. Таким образом, естественная биекция $\varphi : (X, \mathrm{U}) \to (\Gamma_f, \mathrm{U} \times \mathrm{V}|_{\Gamma_f})$ является равномерным гомеоморфизмом.

Используя аналогичные рассуждения мы можем дать критерий равномерной совершенности равномерно непрерывного совершенного отображения.

Теорема 2.2. *Пусть* $f : (X, \mathrm{U}) \to (Y, \mathrm{V})$ *равномерно непрерывное совершенное отображение равномерного пространства* (X, U) *на равномерное пространство* (Y, V) *и* $(sX, s\mathrm{U})$ - *Самуэловское бикомпактное расширение пространства* (X, U). *Тогда равномерное пространство* (X, U) *равномерно гомеоморфно замкнутому подпространству* $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ *произведения* $(sX \times Y, s\mathrm{U} \times \mathrm{V})$ *тогда и только тогда, когда отображение* $f : (X, \mathrm{U}) \to (Y, \mathrm{V})$ *предкомпактно.*

Доказательство. Покажем сначала, что $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ замкнуто в $sX \times Y$. Пусть $(p, y) \in sX \times Y \setminus \Gamma_f$, тогда $p \notin f^{-1}(y) = F$ и множество F бикомпактно в X, поэтому замкнуто в sX. Так как $p \in sX$ и $p \notin F$, то существует открытая окрестность V точки p такая, что $\bar{V} \cap F = \varnothing$. Это следует из нормальности sX. Множество $B = \bar{V} \cap X$ замкнуто в X и $f^{-1}(y) \cap B = \varnothing$. В силу совершенности отображения f, $f(B)$ замкнуто в Y. Тогда $W = Y \setminus f(B)$ открыто в Y и $y \in W$. Имеем $V \times W \cap \Gamma_f = \varnothing$.

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Предположим противное, т.е. $V\times W\cap\Gamma_f\neq\varnothing$. Тогда существует точка $x\in X$ такая, что $(x,f(x))\in V\times W$ и $(x,f(x))\in\Gamma_f$. Тогда $x\in V$ и тем более $x\in B=\bar{V}\cap X$ и $f(x)\in W=Y\setminus f(B)$. Противоречие. Итак, $V\times W\cap\Gamma_f=\varnothing$

Предположим, что равномерное пространство (X,U) равномерно гомеоморфно $(\Gamma_f, s\mathrm{U}\times\mathrm{V}|_{\Gamma_f})$ как подпространству произведения $(sX\times Y, s\mathrm{U}\times\mathrm{V})$. Тогда отображение $f:(X,\mathrm{U})\to(Y,\mathrm{V})$ представляется как $f=\pi_Y|_{\Gamma_f}:(\Gamma_f, s\mathrm{U}\times\mathrm{V}|_{\Gamma_f})\to(Y,\mathrm{V})$ сужение естественной проекции $\pi_Y:(sX\times Y, s\mathrm{U}\times\mathrm{V})\to(Y,\mathrm{V})$ на замкнутое подпространство Γ_f. В силу предложения 1.2. отображение π_Y равномерно совершенно, а в силу предложения 1.3., отображение f также равномерно совершенно и тем более отображение f предкомпактно, так как равномерная совершенность отображения равносильна совершенности и предкомпактности (см.1.1.)

Обратно, пусть отображение $f:(X,\mathrm{U})\to(Y,\mathrm{V})$ равномерно непрерывно, предкомпактно, и в силу условия теоремы, совершенно топологически. Покажем, что естественная биекция $\varphi:(X,\mathrm{U})\to(\Gamma_f, s\mathrm{V}|_{\Gamma_f})$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство $(\Gamma_f, s\mathrm{U}\times\mathrm{V}|_{\Gamma_f})$ является равномерным гомеоморфизмом.

Равномерная непрерывность отображения φ доказывается аналогично доказательству теоремы 2.1.. Покажем равномерную непрерывность обратного отображения $\varphi^{-1}:(\Gamma_f, s\mathrm{U}\times\mathrm{V}|_{\Gamma_f})\to(X,\mathrm{U})$. В силу предкомпактности отображения $f:(X,\mathrm{U})\to(Y,\mathrm{V})$, для любого $\alpha\in\mathrm{U}$ существуют покрытия $\beta\in\mathrm{V}$ и конечное $\gamma\in\mathrm{U}$ такие, что $f^{-1}(\beta)\wedge\gamma$ вписано в α. Ясно, что $\gamma\in s\mathrm{U}\wedge X=\mathrm{U}_p$, где U_p максимальная предкомпактная равномерность содержащаяся в U и порождающая исходную топологию пространства X. Покажем, что $\varphi^{-1}(\gamma\times\beta\wedge\Gamma_f)$ вписано в α. По подбору покрытий $\beta\in\mathrm{V}$ и $\gamma\in\mathrm{U}_p$, для любого $\Gamma\in\gamma$ и $B\in\beta$ существует $A_{B\Gamma}\in\alpha$ такое, что $f^{-1}(B)\cap\Gamma\subset A_{B\Gamma}$. Покажем, что $\varphi^{-1}(B\times\Gamma)\subset A_{B\Gamma}$. Пусть $x\in\varphi^{-1}(B\times\Gamma)$ произвольная точка. Тогда $(x,f(x))\in B\times\Gamma\cap\Gamma_f$, т.е. $x\in\Gamma$ и $f(x)\in B$. Тогда $x\in\Gamma$ и $x\in f^{-1}(B)$, т.е. $x\in f^{-1}(B)\cap\Gamma\subset A_{B\Gamma}$. Итак, $x\in A_{B\Gamma}$, т.е. $x\in\varphi^{-1}(B\times\Gamma\cap\Gamma_f)\subseteq A_{B\Gamma}$, следовательно, покрытие $\varphi^{-1}(\gamma\times\beta\wedge\Gamma_f)$ вписано в α, что доказывает равномерную непрерывность отображения φ^{-1}. Мы доказали, что равномерное пространство (X,U) равномерно гомеоморфно замкнутому подпространству Γ_f пространства $sX\times Y$, если равномерно непрерывное совершенное отображение $f:(X,\mathrm{U})\to(Y,\mathrm{V})$ предкомпактно. Теорема 2.2. доказана.

Отметим, что эта теорема обобщает известный результат А.А.Борубаева ([1], лемма 2.3.10.) и дает

Следствие 2.3. *Пусть* $f:(X,\mathrm{U})\to(Y,\mathrm{V})$ *равномерно непрерывное совершенное отображение равномерного пространства* (X,U) *в равномерное пространство* (Y,V). *Тогда равномерное пространство* (X,U) *равномерно гомеоморфно замкнутому подпространству* $\Gamma_f=\{(x,f(x)):x\in X\}$ *произведения* $(sX\times Y, s\mathrm{U}\times\mathrm{V})$ *тогда и только тогда, когда отображение* $f:(X,\mathrm{U})\to(Y,\mathrm{V})$ *равномерно совершенно.*

Доказательство следует из предложения 1.3. и окончания доказательства теоремы 2.2..

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Традиционно через U_f обозначается (*-fine*) максимальная равномерность тихоновского пространства X ([2, 3]).

Следствие 2.4. ([1]). Отображение $f:(X,\mathrm{U})\to(Y,\mathrm{V})$ *равномерно совершенно тогда и только тогда, когда* f *- совершенно и предкомпактно.*

Доказательство. Если $f:(X,\mathrm{U})\to(Y,\mathrm{V})$ равномерно совершенно, то оно совершенно и предкомпактно по определению. Обратное вытекает из теоремы 2.2.

Следствие 2.5. *Отображение* $f:X\to Y$ *тихоновского пространства* X *на тихоновское пространство* Y *совершено тогда и только тогда, когда равномерно совершенно отображение* $f:(X,\mathrm{U}_f)\to(Y,\mathrm{V}_f)$.

Доказательство. Пусть $f(X)=Y$ и $f:X\to Y$ - совершенное отображение тихоновских пространств X и Y. Тогда Самуэловские бикомпактные расширения $(sX,s\mathrm{U}_f)$ и $(sY,s\mathrm{V}_f)$ совпадают со Стоун-Чеховскими расширениями βX и βY ([2]), тогда по следствию 2.3. равномерное пространство (X,U_f) равномерно гомеоморфно замкнутому подпространству $\Gamma_f=\{(x,f(x)):x\in X\}$ произведения $(sX\times Y,s\mathrm{U}_f\times\mathrm{V}_f)$, т.е. отображение $f:(X,\mathrm{U}_f)\to(Y,\mathrm{V}_f)$ предкомпактно.

Примечание 2.6. Совершенные и равномерно совершенные отображения равномерных пространств для решения других задач исследовались в работах [4], [5].

Литература:

1. Борубаев А.А., Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. - Фрунзе: Илим, 1990. - 171 с.
2. Энгелькинг Р. Общая топология. / Перевод с англ. / Р.Энгелькинг. - М.: Мир, 1986. - 752 с.
3. Isbell, J.R., Uniform spaces, Providence, US, 1964. - Vol. 12. - P. 175.
4. Чекеев А.А., Чанбаева А.И. О замкнутых и совершенных отображениях равномерных пространств. / Республиканский научно-теоретический журнал «Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана», №4. - Бишкек, 2014. - С. 3-6.
5. Аблабекова Ч.А. Об оперениях равномерных абсолютов. / Республиканский научно-теоретический журнал «Известия вузов Кыргызстана», №1. - Бишкек, 2014. - С. 3-5.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Касымова Т.Дж.